ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—февраль 2013. Том 20, № 1. С. 3–11

УДК 519.718

ПОЛУХРОМАТИЧЕСКОЕ ЧИСЛО ГРАФА

В. Г. Визинг

Аннотация. Для графов с непустым множеством рёбер введено понятие полухроматического числа. Доказано, что полухроматическое число отличается от половины хроматического числа не больше, чем на 1.

Ключевые слова: хроматическое число, полухроматическое число, инъективная раскраска.

Введение. Основные понятия

Рассматриваются конечные неориентированные графы без петель и кратных рёбер [2, 3]. Через $G = (V, E)$ обозначается граф G с множествами вершин V и рёбер E, а через $e = (x, y)$ — ребро e, инцидентное вершинам x и y. Цветами являются натуральные числа. Раскраска вершин графа называется *правильной*, если смежные вершины окрашены различно. Под раскраской графа понимается правильная раскраска его вершин. Наименьшее число цветов, необходимое для раскраски графа G (*хроматическое число*), обозначается через $\chi(G)$. Раскраска графа с помощью $\chi(G)$ цветов называется *минимальной*. Граф называется *t-вырожденным*, если любой его подграф имеет вершину, степень которой не больше t. Известно [4], что хроматическое число t-вырожденного графа не больше $t + 1$.

Введём понятие нормальной раскраски и полухроматического числа графа. Пусть φ — раскраска графа $G = (V, E)$ и $e = (x, y) \in E$. Неупорядоченную пару $(\varphi(x), \varphi(y))$ будем называть (*цветовым*) *окаймлением* ребра e. Пусть $e = (a, b)$ и $e' = (a', b')$ — различные рёбра, причём $\varphi(a) < \varphi(b)$, $\varphi(a') < \varphi(b')$. Рёбра e, e' и их окаймления называются *сопряжёнными*, если либо $\varphi(a) < \varphi(a') < \varphi(b) < \varphi(b')$, либо $\varphi(a') < \varphi(a) < \varphi(b') < \varphi(b)$. Будем обозначать через $J(G, \varphi)$ граф, различными вершинами которого служат различные окаймления рёбер графа G при раскраске φ, причём две вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующие окаймления сопряжены. Раскраска ψ вершин графа G, при которой достигается минимум величины $\chi(J(G, \psi))$,

называется *нормальной*, а число $\chi(J(G,\psi))$ называется *полухроматическим числом* графа G и обозначается через $\gamma(G)$.

Говоря о полухроматическом числе графа, будем без специальных оговорок предполагать, что граф имеет непустое множество рёбер. Очевидно, что $\gamma(H) \leqslant \gamma(G)$, если H — подграф графа G.

Заметим, что для минимальной раскраски не важно, как обозначены используемые цвета, важно лишь число различных цветов. Для нормальной раскраски обозначения используемых цветов существенны. Однако если ψ — нормальная раскраска графа G, при которой используются цвета $c_1 < c_2 < \ldots < c_r$, то нормальной будет раскраска α, определяемая следующим образом: если v — вершина и $\psi(v) = c_i$, то $\alpha(v) = c_{i+1}$ при $1 \leqslant i \leqslant r-1$ и $\alpha(v) = c_1$ при $i = r$. Нормальность раскраски α следует из того, что после такой «циклической» перекраски отношения сопряжённости рёбер не изменяются.

В настоящей работе доказано, что $\gamma(G) = 1$ тогда и только тогда, когда $2 \leqslant \chi(G) \leqslant 3$. Ответ на вопрос, верно ли, что хроматическое число графа не больше 3, является NP-трудной задачей [1]. Поэтому NP-трудна задача отыскания полухроматического числа графа.

Насколько известно автору, до сих пор не найдены числовые характеристики графа, через которые достаточно точно оценивалось бы хроматическое число. Полухроматическое число является такой характеристикой. В настоящей работе показано, что оно отличается от половины хроматического числа не больше, чем на 1.

Гипотеза. *Если* $\chi(G) \geqslant 4$, *то* $\gamma(G) = \lceil \chi(G)/2 \rceil$.

Подтверждение этой гипотезы при $4 \leqslant \chi(G) \leqslant 6$ приводится в конце статьи.

1. Свойства нормальной раскраски

Пусть φ — раскраска графа G цветами $c_1, \ldots, c_r$ и V_i — подмножество вершин, окрашенных цветом c_i $(i = 1, \ldots, r)$. *Склейкой* графа G, *соответствующей раскраске* φ, назовём граф G' с вершинами $v_1, \ldots, v_r$, в котором вершины v_p и v_q смежны тогда и только тогда, когда в графе G есть хотя бы одно ребро, соединяющее вершину из V_p с вершиной из V_q.[1] Будем говорить, что раскраска φ' склейки *индуцирована* раскраской φ, если $\varphi'(v_i) = c_i$ $(i = 1, \ldots, r)$. Ясно, что $J(G,\varphi)$ и $J(G',\varphi')$ — один и тот же граф и $\gamma(G) = \gamma(G')$.

[1] Склейку называют ещё гомоморфным образом графа [2].

Раскраску графа будем называть *инъективной*, если различные вершины окрашиваются в различные цвета. Индуцированная раскраска φ' является инъективной раскраской склейки.

Очевидно

Утверждение 1. *Пусть φ — раскраска графа G, G' — соответствующая склейка. Тогда $\gamma(G') \geqslant \gamma(G)$, $\chi(G') \geqslant \chi(G)$. При этом если φ' — раскраска склейки G', индуцированная раскраской φ, то φ' является нормальной (минимальной) раскраской склейки G' тогда и только тогда, когда φ — нормальная (минимальная) раскраска графа G.*

Раскраска графа, называется *плотной*, если используются все цвета из интервала $[1, k]$ и k — наибольший используемый цвет.

Утверждение 2. *Существует нормальная раскраска графа $G = (V, E)$, являющаяся плотной.*

Доказательство. Предположим, что нормальная раскраска φ не плотна. Пусть s — максимальный цвет, использованный при раскраске φ. Уменьшим на 1 те цвета вершин, которые больше цвета, не использованного при раскраске φ. Очевидно, что отношения сопряжённости рёбер при новой раскраске сохранятся. Поэтому новая раскраска является нормальной с максимальным использованным цветом $s - 1$. Эту процедуру повторяем до тех пор, пока не будет получена плотная раскраска. Утверждение 2 доказано.

Нормальную раскраску, использующую минимальное число цветов, назовём *экономной*. Если $\chi(G) = 2$, то экономная нормальная раскраска производится с помощью двух цветов, и после склейки получается полный 2-вершинный граф.

Утверждение 3. *Пусть $\chi(G) \geqslant 3$ и φ — экономная нормальная раскраска графа G. Тогда склейка G' имеет гамильтонов цикл.*

Доказательство. Пусть φ — плотная раскраска с помощью n цветов, φ' — индуцированная инъективная раскраска склейки G'. Будем обозначать через v_i вершину склейки, окрашенную в цвет i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Покажем, что $[v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1]$ — гамильтонов цикл склейки G'. Предположим противное. Без ограничения общности будем считать, что вершины v_1 и v_2 не смежны. Это означает, что в графе G не смежны вершины цвета 1 и 2. Обозначим через φ_1 такую раскраску графа G, которая отличается от φ только тем, что вершины цвета 2 окрашены в цвет 1. Рассмотрим графы $H = J(G, \varphi)$ и $H_1 = J(G, \varphi_1)$. Так как φ — экономная нормальная раскраска графа G, $\chi(H) = \gamma(G)$. Раскраска φ_1 использует

меньше цветов, чем раскраска φ. Поэтому раскраска φ_1 не может быть нормальной, тем самым $\chi(H_1) > \gamma(G)$. Однако $\chi(H_1) \leqslant \chi(H)$; противоречие.

Введём понятия особой вершины графа H_1 и её предка в графе H. Если в графе H есть вершина вида $(2,p)$, где $p \geqslant 3$, но нет вершины $(1,p)$, то вершину $(1,p)$ графа H_1 назовём *особой*, а её *предком* — вершину $(2,p)$ графа H. Так как $\chi(H) = \gamma(G)$, существует правильная раскраска вершин графа H с помощью $\gamma(G)$ цветов. Обозначим через f такую раскраску. Затем раскрасим вершины графа H_1 следующим образом. Вершины, которые не являются особыми, окрасим так же, как они окрашены в графе H, а особые вершины — так же, как в графе H окрашены их предки. Такую раскраску вершин графа H_1 обозначим через f_1. Убедимся в правильности раскраски f_1. Для этого нужно только показать, что если особая вершина $(1,q)$ графа H_1 окрашена так же, как вершина (r,s) этого графа, то окаймления $(1,q)$ и (r,s) не сопряжены. Пусть $r < s$. Условие сопряжённости окаймлений $(1,q)$ и (r,s) имеет вид

$$1 < r < q < s. \tag{1}$$

При $r = 1$ это условие не выполняется. Пусть $r \neq 1$. Так как у графа H_1 нет вершины $(2,s)$, имеем $r \geqslant 3$. Поэтому если выполняется (1), то

$$2 < r < q < s. \tag{2}$$

Цвет вершины $(1,q)$ графа H_1 совпадает с цветом вершины $(2,q)$ графа H, а вершины $(2,q)$ и (r,s) в графе H окрашены одинаково. При выполнении условия (2) одинаково окрашенные вершины $(2,q)$ и (r,s) графа H были бы смежными, что противоречит правильности раскраски f. Поэтому неравенства (1) не могут выполняться, а f_1 — правильная раскраска графа H_1. Но раскраска f_1 использует те же цвета, что и раскраска f. Таким образом, $\chi(H_1) \leqslant \chi(H)$. Утверждение 3 доказано.

2. Случай $\gamma(G) = 1$

Пусть имеется инъективная раскраска вершин графа, использующая цвета $c_1 < c_2 < \ldots < c_n$. Ребро $e = (x,y)$ и его окаймление $(\varphi(x), \varphi(y))$ называются *активными*, если цвета $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$ не являются соседними в цикле $c_1, c_2, \ldots, c_n, c_1$. В противном случае ребро e и его окаймление называются *пассивными*. Вершины графа $J(G,\varphi)$ будем называть *активными* и *пассивными* соответственно. Ясно, что пассивные вершины являются изолированными вершинами графа $J(G,\varphi)$.

Утверждение 4. *Пусть φ — инъективная раскраска графа G такая, что $\chi(J(G,\varphi)) = 1$. Тогда G — 2-вырожденный граф.*

Доказательство. Утверждение очевидно, когда число n вершин графа G не больше 3. Пусть $n \geqslant 4$. Будем считать, что φ — плотная раскраска вершин цветами $1, 2, \ldots, n$, и для краткости каждую вершину будем обозначать так же, как и её цвет. Если все рёбра графа пассивные, то степень каждой вершины графа не больше 2, и утверждение доказано. Предположим, что G имеет активные рёбра. Назовём высотой активного ребра (i, j) число $|i-j|$. Пусть $e = (p, q)$, где $p < q$, — активное ребро наименьшей высоты. Так как $q \geqslant p+2$ и в G нет рёбер, сопряжённых с ребром e, вершине $p+1$ могут быть инцидентны только пассивные рёбра, т. е. степень вершины $p+1$ не больше 2. Значит, в графе G есть вершина, степень которой не больше 2. Пусть теперь H — подграф, порождённый произвольным непустым подмножеством вершин. Тогда H либо не содержит рёбер и, значит, имеет вершину степени 0, либо H имеет рёбра и $\chi(J(H,\varphi)) = 1$. По доказанному подграф H имеет вершину, степень которой в этом подграфе не больше 2. Утверждение 4 доказано.

Теорема 1. *Равенство $\gamma(G) = 1$ имеет место тогда и только тогда, когда $2 \leqslant \chi(G) \leqslant 3$.*

Доказательство. Пусть $2 \leqslant \chi(G) \leqslant 3$. Построим минимальную раскраску φ графа G. Тогда граф $J(G,\varphi)$ состоит из двух или трёх изолированных вершин и его хроматическое число равно 1. Поэтому φ — нормальная раскраска графа G и $\gamma(G) = 1$. Пусть теперь $\gamma(G) = 1$. Это означает, что граф G имеет рёбра, и поэтому $2 \leqslant \chi(G)$. Построим нормальную раскраску ψ графа G и рассмотрим соответствующую склейку G'. В силу утверждения 4 склейка G' является 2-вырожденным графом. Следовательно, $\chi(G') \leqslant 3$. Так как $\chi(G) \leqslant \chi(G')$, то $\chi(G) \leqslant 3$. Теорема 1 доказана.

3. Полухроматическое число полного графа

Утверждение 5. *Пусть φ — инъективная раскраска n-вершинного графа $G = (V, E)$ ($n \geqslant 3$) и E_0 — подмножество попарно не сопряжённых при этой раскраске активных рёбер графа. Тогда $|E_0| \leqslant n - 3$.*

Доказательство. Построим граф H с тем же множеством так же окрашенных вершин и с множеством рёбер $E_0 \cup E_1$, где E_1 — множество, состоящее из n рёбер с пассивным при раскраске φ окаймлением. Тогда $\gamma(H) = 1$, причём φ — инъективная нормальная раскраска графа H. В силу утверждения 4 граф H 2-вырожденный n-вершинный. Поэтому

в H не больше $2(n-2)+1 = 2n-3$ рёбер, из которых n рёбер пассивные. Следовательно, активных рёбер не больше $n-3$. Утверждение 5 доказано.

Укажем точное значение полухроматического числа для полных n-вершинных графов. Это число равно 1, если $2 \leqslant n \leqslant 3$.

Теорема 2. *Пусть $n \geqslant 4$ и K_n — полный n-вершинный граф. Тогда $\gamma(K_n) = \lceil n/2 \rceil$.*

Доказательство. Пусть φ — раскраска цветами $1, 2, \ldots, n$ графа K_n. Будем вершины графа K_n обозначать так же, как и их цвета. Построим граф $J(K_n, \varphi)$. Нужно доказать, что $\chi(J(K_n, \varphi)) = \lceil n/2 \rceil$. Поскольку пассивные вершины являются изолированными вершинами графа $J(K_n, \varphi)$, их не нужно принимать во внимание при установлении хроматического числа этого графа. Докажем неравенство $\chi(J(K_n, \varphi)) \geqslant \lceil n/2 \rceil$. Число активных рёбер графа K_n равно $n(n-1)/2 - n = n(n-3)/2$. Значит, граф $J(K_n, \varphi)$ имеет $n(n-3)/2$ активных вершин. В силу утверждения 5 одним и тем же цветом можно окрасить не больше $n-3$ активных вершин графа $J(K_n, \varphi)$. Поэтому $\gamma(K_n) = \chi(J(K_n, \varphi)) \geqslant n/2$. Так как $\gamma(K_n)$ — целое число, то $\gamma(K_n) \geqslant \lceil n/2 \rceil$. Осталось доказать, что

$$\gamma(K_n) \leqslant \lceil n/2 \rceil. \tag{3}$$

Очевидно, что можно ограничиться случаем, когда n — чётное число. Пусть $n = 2k$ $(k \geqslant 2)$. Покажем, что множество активных рёбер разбивается на k подмножеств, каждое из которых не содержит сопряжённых рёбер и имеет мощность $n-3$. Поскольку число активных рёбер равно $k(n-3)$, неравенство (3) доказано. При $k = 2$ требуемое разбиение таково: $E_1 = (1, 3)$, $E_2 = (2, 4)$. Пусть $k \geqslant 3$. При каждом s, $1 \leqslant s \leqslant k$, образуем два множества активных рёбер

$$E_{s1} = \{(s, s+2), (s, s+3), \ldots, (s, s+k)\},$$

$$E_{s2} = \{(s+k, s+k+2 (\operatorname{mod} n)), (s+k, s+k+3 (\operatorname{mod} n)), \ldots, \\ (s+k, s+2k-1 (\operatorname{mod} n))\}.$$

Каждое множество $E_s = E_{s1} \cup E_{s2}$ состоит из $2k-3 = n-3$ попарно не сопряжённых активных рёбер. Осталось показать, что каждое активное ребро графа K_n принадлежит одному из множеств E_s $(s = 1, 2, \ldots, k)$. Пусть $e = (p, q)$ — активное ребро, где $p < q \leqslant 2k$. Это означает, что

$$2 \leqslant q - p \leqslant 2k - 2. \tag{4}$$

Рассмотрим возможные случаи.

Случай 1: $2 \leqslant q-p \leqslant k$. Обозначим $r = q-p$. Тогда $q = p+r$ и $e = (p, p+r)$. Поэтому если $p \leqslant k$, то $e \in E_{p1} \subseteq E_p$. Если же $p = i+k$, где $i \geqslant 1$, то $r \leqslant k-1$ и $e \in E_{i2} \subseteq E_i$.

Случай 2: $q-p \geqslant k+1$. Тогда $q = j+k$, где $j \geqslant 2$, и $p+2k \leqslant q+k-1$. Пусть t такое, что $p+2k = q+t$. Имеем $t \leqslant k-1$ и $p \equiv (q+t) (\mathrm{mod}\ n)$. Из равенства $t = 2k-(q-p)$ и правого неравенства в (4) получаем, что $t \geqslant 2$. Следовательно, $e = (j+k, j+k+t (\mathrm{mod}\ n))$. Таким образом, $e \in E_{j2} \subseteq E_j$. Теорема 2 доказана.

4. Случай $\gamma(G) \geqslant 2$

Теорема 3. *Пусть $G = (V, E)$ — граф, у которого $\gamma(G) \geqslant 2$. Тогда*

$$2\gamma(G) - 1 \leqslant \chi(G) \leqslant 2\gamma(G) + 2. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть φ — минимальная раскраска графа G, G' — соответствующая склейка. По утверждению 1 имеем $\gamma(G') \geqslant \gamma(G)$. Так как G' является полным $\chi(G)$-вершинным графом, то $\gamma(G') = \lceil \chi(G)/2 \rceil$. Значит, $\gamma(G) \leqslant \lceil \chi(G)/2 \rceil$, откуда $\chi(G) \geqslant 2\gamma(G) - 1$. Таким образом, левое неравенство в (5) доказано. Докажем справедливость верхней оценки для $\chi(G)$.

Пусть ψ — нормальная раскраска графа G и G'' — соответствующая склейка с раскраской ψ', индуцированной раскраской ψ. По утверждению 1 раскраска ψ' является нормальной раскраской графа G'', $\gamma(G'') = \gamma(G)$, $\chi(G) \leqslant \chi(G'')$. Осталось доказать, что $\chi(G'') \leqslant 2\gamma(G) + 2$. Для этого достаточно убедиться, что склейка G'' является $(2\gamma(G) + 1)$-вырожденным графом. Рассмотрим произвольный k-вершинный подграф H склейки G'' и покажем, что H обязательно имеет вершину, степень которой в H' не больше $(2\gamma(G) + 1)$. Если H вообще не содержит рёбер, то все его вершины имеют степень $0 < 2\gamma(G) + 1$. Если же H имеет рёбра, то его полухроматическое число не больше $\gamma(G)$. В силу утверждения 5 подграф H имеет не больше $\gamma(G)(k-3)$ активных рёбер (при раскраске ψ'). Поскольку пассивных рёбер у H не больше k, всего у H не больше $k + \gamma(G)(k-3) = k(\gamma(G) + 1) - 3\gamma(G)$ рёбер и сумма степеней вершин k-вершинного графа H не больше $k(2\gamma(G)+2) - 6\gamma(G)$. Следовательно, H содержит вершину, степень которой не больше $2\gamma(G) + 1$, и склейка G'' является $(2\gamma(G) + 1)$-вырожденным графом. Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Пусть G — граф, у которого $\chi(G) \geqslant 4$. Тогда*

$$\lceil \chi(G)/2 \rceil - 1 \leqslant \gamma(G) \leqslant \lceil \chi(G)/2 \rceil.$$

Доказательство. Так как $\chi(G) \geqslant 4$, в силу теоремы 1 $\gamma(G) \geqslant 2$. Из (5) следует, что $\chi(G)/2 - 1 \leqslant \gamma(G) \leqslant (\chi(G)+1)/2$. Поскольку $\gamma(G)$ — натуральное число, имеем

$$\lceil \chi(G)/2 \rceil - 1 \leqslant \gamma(G) \leqslant \lfloor (\chi(G)+1)/2 \rfloor = \lceil \chi(G)/2 \rceil.$$

Теорема 4 доказана.

Обратимся теперь к гипотезе из введения. Справедливость гипотезы при $4 \leqslant \chi(G) \leqslant 6$ устанавливается с помощью теоремы о четырёх красках [5]. Пусть $\gamma(G) = 2$ и φ — экономная нормальная раскраска графа G цветами $1, 2, \ldots, n$. Рассмотрим склейку G' графа G с индуцированной раскраской φ'. Будем обозначать вершины склейки так же, как цвета, в которые они окрашены. В силу утверждения 1 и теоремы 1 имеем $\chi(G') \geqslant \chi(G) \geqslant 4$. Как видно из доказательства утверждения 3, склейка G' имеет гамильтонов цикл $[1, 2, \ldots, n, 1]$. Этот цикл разбивает плоскость на две части: внутреннюю и внешнюю. Так как граф $J(G', \varphi')$ двудольный, активные рёбра графа G' разбиваются на два множества (доли) в зависимости от того, к какой доле графа $J(G', \varphi')$ принадлежат их цветовые окаймления. Поместив активные рёбра первой доли во внутреннюю часть, а второй доли — во внешнюю, получим плоскую реализацию графа G'. По теореме о четырёх красках имеем $\chi(G') = 4$. Следовательно, если $\gamma(G) = 2$, то $\chi(G) = 4$. Обратно, если $\chi(G) = 4$, то $\gamma(G) = 2$. Это вытекает из теорем 1 и 4.

Пусть теперь $5 \leqslant \chi(G) \leqslant 6$. Тогда $\gamma(G) > 2$, но $\gamma(G) \leqslant 3$ в силу теоремы 4. Поэтому $\gamma(G) = \lceil \chi(G)/2 \rceil$ при $5 \leqslant \chi(G) \leqslant 6$. При $\chi(G) = 7$ вопрос открыт.

Учитывая результаты настоящей работы, можно дать эквивалентную формулировку гипотезы.

Гипотеза. *Если G — граф с непустым множеством рёбер, то минимальная раскраска графа нормальная.*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. — М.: Мир, 1982. — 416 с.
2. **Евстигнеев В. А., Касьянов В. Н.** Толковый словарь по теории графов в информатике и программировании. — Новосибирск: Наука, 1999. — 288 с.
3. **Зыков А. А.** Основы теории графов. — М: Вузовская книга, 2004. — 663 с.

4. **Jensen T. R., Toft B.** Graph coloring problems. — New York: John Wiley & Sons, 1995. — 296 p.
5. **Robertson N., Sanders D., Seymour P. D., Thomas R.** The four-colour theorem // J. Comb. Theory. Ser. B. — 1997. — Vol. 70. — P. 2–44.

Визинг Вадим Георгиевич,
e-mail: vizing@paco.net

Статья поступила
31 июля 2012 г.