ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Март—апрель 2013. Том 20, № 2. С. 58–74

УДК 519.95

ЕДИНИЧНЫЕ ПРОВЕРЯЮЩИЕ ТЕСТЫ ДЛЯ СХЕМ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В БАЗИСАХ ИЗ ЭЛЕМЕНТОВ, ИМЕЮЩИХ НЕ БОЛЕЕ ДВУХ ВХОДОВ

С. С. Коляда

Аннотация. Рассматриваются схемы в базисах из функциональных элементов, имеющих не более двух входов. Установлена возможность реализации любой булевой функции от n переменных схемой, допускающей при константных неисправностях единичные проверяющие тесты линейной по n длины.

Ключевые слова: схема из функциональных элементов, единичный проверяющий тест, константная неисправность.

В работе рассматривается задача построения легкотестируемых схем из функциональных элементов [1] в базисах из элементов, имеющих не более двух входов. Допускаются единичные произвольные константные неисправности на выходах элементов [2–5], когда в неисправное состояние может перейти ровно один элемент схемы, который вне зависимости от того, что подаётся на его входы, выдаёт некоторую булеву константу $\delta \in \{0,1\}$.

Пусть S — схема, реализующая в исправном состоянии булеву функцию $f(\widetilde{x})$, $\widetilde{x} = (x_1,\dots,x_n)$. Схему S будем считать *неизбыточной*, если при переходе в любое неисправное состояние любого элемента эта схема реализует *нетривиальную* [3], т. е. отличную от $f(\widetilde{x})$, функцию неисправности $g(\widetilde{x})$.

Множество наборов $T = \{\widetilde{\sigma}_1,\dots,\widetilde{\sigma}_l\}$ называется *единичным проверяющим тестом* для схемы S, реализующей функцию f, если для любой нетривиальной функции неисправности g существует набор $\widetilde{\sigma}$ из T такой, что $f(\widetilde{\sigma}) \neq g(\widetilde{\sigma})$; число l называется *длиной теста*.

Рассмотрим все базисы [4] из элементов, имеющих не более двух входов: $B_1 = \{x\&y,\ \overline{x}\}$, $B_2 = \{x\&y,\ x\oplus y,\ 1\}$, $B_3 = \{x\&y,\ x\oplus y\oplus 1,\ 0\}$, $B_4 = \{x\&y,\ x\oplus y,\ x\oplus y\oplus 1\}$, $B_5 = \{\overline{x\&y}\}$, $B_6 = \{x\vee y,\ \overline{x}\}$, $B_7 = \{x\vee y,\ x\oplus y,\ 1\}$, $B_8 = \{x\vee y,\ x\oplus y\oplus 1,\ 0\}$, $B_9 = \{x\vee y,\ x\oplus y,\ x\oplus y\oplus 1\}$, $B_{10} = \{\overline{x\vee y}\}$,

$B_{11} = \{x\&\overline{y},\ \overline{x}\}$, $B_{12} = \{x\&\overline{y},\ 1\}$, $B_{13} = \{x \vee \overline{y},\ \overline{x}\}$, $B_{14} = \{x \vee \overline{y},\ 0\}$, $B_{15} = \{x\&\overline{y},\ x \oplus y \oplus 1\}$, $B_{16} = \{x \vee \overline{y},\ x \oplus y\}$, $B_{17} = \{x\&\overline{y},\ x \vee \overline{y}\}$.

Теорема 1. *Для любой булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ и для любого $i \in I = \{1, \ldots, 17\}$ существует неизбыточная схема в базисе B_i, реализующая f и допускающая единичный проверяющий тест длины, не превосходящей $n + 3$.*

Аналогичная оценка для схем в базисе Жегалкина получена в [6], однако метод построения легкотестируемых схем из [6] годится только для базисов, содержащих конъюнкцию и линейную функцию ($x \oplus y$ или $x \oplus y \oplus 1$).

Прежде чем доказывать теорему, покажем, что справедлива

Лемма 1. *Пусть B и B' — базисы такие, что каждая функция из базиса B реализуется неизбыточной схемой из функциональных элементов в базисе B' со всеми возможными функциями неисправности, являющимися константами 0 и 1, и для булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ существует неизбыточная схема S в базисе B, допускающая единичный проверяющий тест длины l. Тогда существует неизбыточная схема S' в базисе B', реализующая $f(x_1, \ldots, x_n)$ и допускающая единичный проверяющий тест длины l.*

Доказательство. Рассмотрим неизбыточную схему S в базисе B, реализующую функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ и допускающую единичный проверяющий тест длины l. Заменим каждый функциональный элемент S на соответствующую ему по условию леммы подсхему из элементов базиса B'. Полученную схему обозначим через S'. Очевидно, что S' реализует $f(x_1, \ldots, x_n)$. Также заметим, что любая поломка любого элемента полученной схемы эквивалентна поломке элемента в схеме S, т. е. множества функций неисправности схем S' и S совпадают. Значит, схема S' неизбыточна и единичный проверяющий тест для S является единичным проверяющим тестом для S'. Лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 1 проведём конструктивно, т. е. при каждом i для произвольной булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ построим схему в базисе B_i и найдём единичный проверяющий тест, удовлетворяющий условиям теоремы. Без ограничения общности можно считать, что заданная функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ существенно зависит от всех своих переменных (несущественные переменные можно отбросить).

Заметим, что если теорема 1 доказана для некоторого базиса B, то для её доказательства в базисе $\overline{B}$, состоящем из функций, двойственных к функциям из B, достаточно в доказательстве теоремы 1 для B заме-

нить все единицы нулями, нули единицами и все функции двойственными. Тем самым достаточно доказать теорему только в базисах B_i, $i \in I_i = \{1, 2, 3, 4, 5, 11, 12, 15, 17\}$, так как для остальных базисов B_j, $j \in I \setminus I_i$, найдётся базис B_i, $i \in I_i$, такой, что все его функции двойственны функциям из B_j. Рассмотрим девять случаев.

Случай 1. Пусть $i = 1$, $B_1 = \{x\&y,\ \overline{x}\}$.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — некоторая функция, а $P = K_1 \oplus \ldots \oplus K_h \oplus c$ — её полином Жегалкина, в котором K_1 — конъюнкция минимальной длины, содержащая наименьшее число переменных (если таких конъюнкций несколько, выбираем из них любую). Без ограничения общности можно предполагать, что $K_1 = x_1\& \ldots \&x_m$.

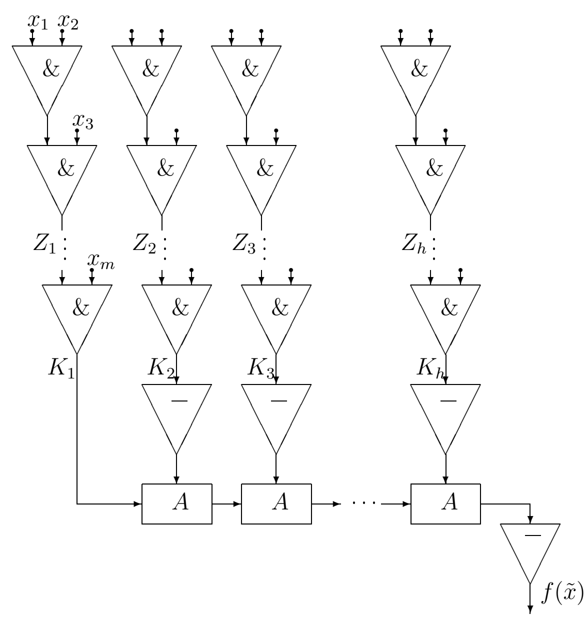


Рис. 1

Функцию $f(\widetilde{x})$ реализуем схемой S, представленной на рис. 1, где $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots, Z_h$ — цепи из конъюнкторов и инверторов, реализующие $K_1, \overline{K}_2, \overline{K}_3, \ldots, \overline{K}_h$ соответственно. Во всех цепях переменные подаются по возрастанию индекса (пример для конъюнкции $K' = x_1\&x_3\&x_8\&x_{20}$ изображён на рис. 2). Под блоком A понимается подсхема, изображённая на рис. 3; очевидно, при подаче на входы этого блока переменных x и y в исправном состоянии на выходе будет реализована функция $x \oplus y$. Заметим, что при различных поломках в этом блоке на выходе могут получиться пять функций неисправности: $x \vee y$, $\overline{x}\&y$, $x\&\overline{y}$ и константы 0, 1.

Последний инвертор в схеме отвечает за добавление константы (его может и не быть). Легко убедиться, что в исправном состоянии схема S реализует функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Пусть множество T состоит из n-разрядных наборов $\widetilde{\sigma}_1 = (0, 0, \ldots, 0)$, $\widetilde{\sigma}_2 = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{m}, 0, 0, \ldots, 0)$, $\widetilde{\sigma}_3 = (1, 1, \ldots, 1)$ и всех наборов с $n-1$ единицами, кроме наборов $(0, 1, 1, \ldots, 1, 1)$ и $(1, 1, \ldots, 1, 1, 0)$. Покажем, что T является единичным проверяющим тестом для схемы S.

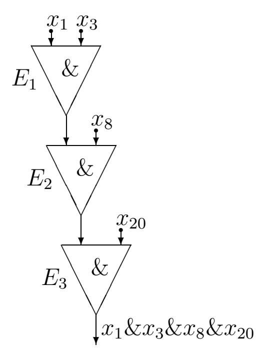


Рис. 2

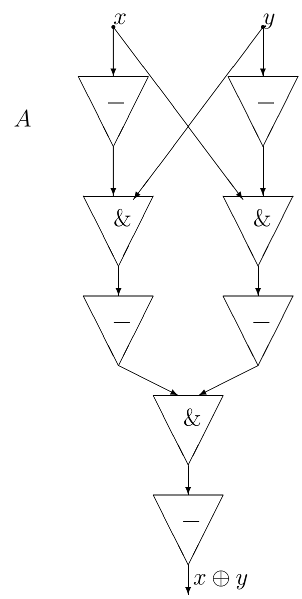


Рис. 3

Предположим, что неисправность произошла в одном из блоков A. Тогда вместо суммы значений, подающихся на его входы, он выдаст одну из пяти функций неисправности. Заметим, что значение $x \oplus y$ отличается от $x\&\overline{y}$ и константы 0 на наборе $(0, 1)$, значения функций $x \oplus y$ и $\overline{x}\&y$ различаются на наборе $(1, 0)$, а на наборе $(1, 1)$ функция $x \oplus y$ отличается от $x \vee y$ и константы 1, т. е. для обнаружения неисправности произвольного блока A достаточно на его входы подать эти три набора.

Заметим, что если подать на вход схемы набор $\widetilde{\sigma}_1$, то на i-й слева блок A будет подаваться $(i (\bmod 2) \oplus 1, 1)$. Если подать на вход схемы набор $\widetilde{\sigma}_2$, то на i-й слева блок A будет подаваться $(i (\bmod 2), 1)$. Следовательно, для любого блока A есть два набора в тесте, на которых на его входы приходят $(0, 1)$ и $(1, 1)$. Теперь заметим, что на наборе $\widetilde{\sigma}_3$ на любой

блок A будет приходить набор $(1, 0)$. Тем самым показано, что неисправность любого блока A будет обнаружена на одном из трёх наборов $\widetilde{\sigma}_1$, $\widetilde{\sigma}_2$, $\widetilde{\sigma}_3$.

Далее можем считать, что все блоки A исправны. Если в неисправное состояние перейдёт последний (выходной) инвертор схемы, то опять же на наборах $\widetilde{\sigma}_1$, $\widetilde{\sigma}_2$ неисправность будет обнаружена (в исправном состоянии схема на этих наборах меняет своё значение, а при такой неисправности на выходе схемы будет реализована константа).

Осталось рассмотреть ситуацию, когда в неисправное состояние переходит элемент какой-нибудь цепи Z_s.

Тогда на выходе схемы вместо $K_1 \oplus \overline{K}_2 \oplus \ldots \oplus \overline{K}_h \oplus c'$ реализуется $K_1 \oplus \overline{K}_2 \oplus \ldots \oplus \overline{K}_h \oplus \overline{K}_s \oplus \overline{K}'_s \oplus c'$, где $\overline{K'_s}$ — либо константа, либо отрицание конъюнкции K'_s, которая короче конъюнкции K_s. Чтобы обнаружить неисправность, надо найти набор, на котором $\overline{K}'_s \oplus \overline{K}_s$ или $K'_s \oplus K_s$ равно 1.

Если $K'_s = 1$, то неисправность обнаруживается на наборе $\widetilde{\sigma}_1 = (0, 0, \ldots, 0)$, если $K'_s = 0$, то — на $\widetilde{\sigma}_3 = (1, 1, \ldots, 1)$.

Если K'_s — не константа, то существует переменная x_i, $i \neq 1, \neq n$, которая входит в конъюнкцию K_s и не входит в K'_s. Переменная x_n может понадобиться только в случае поломки последнего конъюнктора цепи, но тогда на выходе «сломанной» цепи будет константа, а этот случай рассмотрен. Можем не рассматривать переменную x_1, так как она может понадобиться только при поломке самого верхнего элемента цепи, но на него подаются две переменные, и можно выбрать другую переменную (если это x_n, то на выходе «сломанной» цепи окажется константа, а этот случай рассмотрен). Поэтому на наборе с единственным нулём в i-м разряде (во всех остальных разрядах этого набора единицы), который имеется в T, получаем $K'_s \oplus K_s = 1$. Неисправность будет обнаружена. Тем самым T является единичным проверяющим тестом для схемы S. Его длина равна $n + 1$, что меньше чем $n + 3$. Неизбыточность очевидна (в ходе перебора всех неисправностей не получено тривиальной функции неисправности). Теорема в случае $i = 1$ доказана.

Случай 2. Пусть $i = 2$, $B_2 = \{x \& y,\ x \oplus y,\ 1\}$.

Теорема в этом базисе доказана в [6].

Случай 3. Пусть $i = 3$, $B_3 = \{x \& y,\ x \oplus y \oplus 1,\ 0\}$.

В базисе B_3 доказательство аналогично доказательству из [6], где необходимо заменить константу 1 константой 0, а сумму по модулю два — эквивалентностью $x \oplus y \oplus 1$.

Случай 4. Пусть $i = 4$, $B_4 = \{x\&y,\ x \oplus y,\ x \oplus y \oplus 1\}$.

В базисе B_4 доказательство также аналогично доказательству из [6]: вместо прибавления константы 1 надо в цепочке сумматоров заменить последний сумматор эквивалентностью.

Случай 5. Пусть $i = 5$, $B_5 = \{\overline{x\&y}\}$.

Заметим, что в этом случае можно получить требуемую оценку для длины теста, используя рассуждения случая 1 и лемму 1.

Для этого построим неизбыточные схемы, реализующие $x\&y$ и $\overline{x}$ и удовлетворяющие условиям леммы (рис. 4).

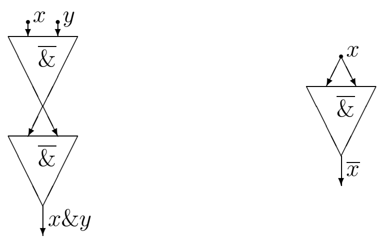


Рис. 4

Применив лемму 1 к базисам B_1 и B_5, получаем, что теорема в случае $i = 5$ доказана.

Случай 6. Пусть $i = 11$, $B_{11} = \{x\&\overline{y},\ \overline{x}\}$.

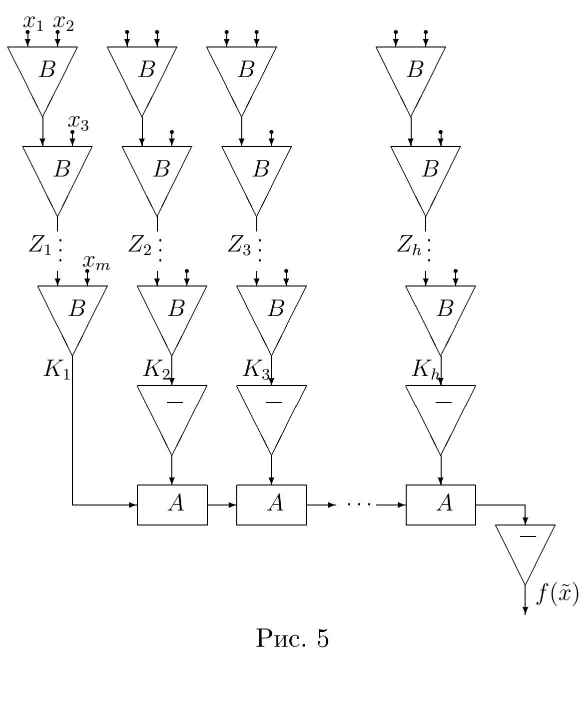


Рис. 5

Пусть $P = K_1 \oplus \ldots \oplus K_h \oplus c$ — полином Жегалкина функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, в котором K_1 — конъюнкция минимальной длины (если таких конъюнкций несколько, выбираем из них любую). Без ограничения общности можно перенумеровать переменные так, что $K_1 = x_1 \& \ldots \& x_m$.

Функцию $f(\widetilde{x})$ реализуем схемой S, представленной на рис. 5.

Под блоком B понимается подсхема, изображённая на рис. 6; очевидно, что при подаче на входы этого блока переменных x и y в исправном состоянии на выходе будет реализована функция $x \& y$. В схеме S цепи $Z_1, \ldots, Z_h$ состоят из блоков B и инверторов; эти цепи реализуют соответственно $K_1, \overline{K}_2, \overline{K}_3, \ldots, \overline{K}_h$. Во всех цепях переменные подаются по возрастанию индекса. Под блоком A понимается подсхема, изображённая на рис. 7; очевидно, что при подаче на входы этого блока переменных x и y в исправном состоянии на выходе будет реализована функция $x \oplus y$. Заметим, что при различных поломках в этом блоке на выходе могут получиться четыре функции неисправности: $\overline{x} \& y$, $x \& \overline{y}$ и константы 0, 1. Последний инвертор в схеме отвечает за добавление константы (его может и не быть). Легко убедиться, что в исправном состоянии схема S реализует функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$.

B

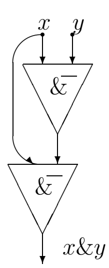


Рис. 6

A

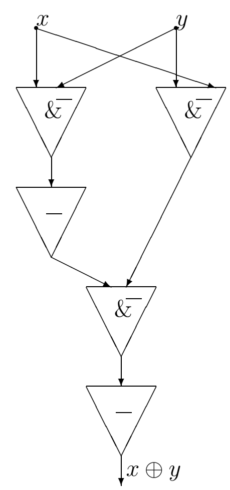


Рис. 7

Пусть множество T состоит из n-разрядных наборов $\widetilde{\sigma}_1 = (0, 0, \ldots, 0)$, $\widetilde{\sigma}_2 = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{m}, 0, 0, \ldots, 0)$, $\widetilde{\sigma}_3 = (1, 1, \ldots, 1)$ и всех наборов с $n-1$ единицами, кроме набора $(0, 1, 1, \ldots, 1, 1)$. Покажем, что T является единичным проверяющим тестом для схемы S.

Предположим, что неисправность произошла в одном из блоков A. Тогда вместо суммы значений, подающихся на его входы, он выдаст одну из четырёх функций неисправности. Заметим, что значение $x \oplus y$ отличается от $x \& \overline{y}$ и константы 0 на наборе $(0, 1)$, на наборе $(1, 0)$ $x \oplus y$ отличается от $\overline{x} \& y$, а на наборе $(1, 1)$ $x \oplus y$ отличается от константы 1. Чтобы обнаружить неисправность произвольного блока A, надо на его входы подать эти три набора.

Заметим, что если подать на вход схемы набор $\widetilde{\sigma}_1$, то на i-й слева блок A будет подаваться $(i (\bmod 2) \oplus 1, 1)$. Если подать на вход схемы набор $\widetilde{\sigma}_2$, то на i-й слева блок A будет подаваться $(i (\bmod 2), 1)$. Следовательно, для любого блока A имеем два набора в тесте, на которых на его входы приходят $(0, 1)$ и $(1, 1)$. Теперь заметим, что на наборе $\widetilde{\sigma}_3$ на любой блок A будет приходить набор $(1, 0)$. Тем самым неисправность любого блока A будет обнаружена на одном из трёх наборов $\widetilde{\sigma}_1$, $\widetilde{\sigma}_2$ и $\widetilde{\sigma}_3$.

Далее можно считать, что все блоки A исправны. Если в неисправное состояние перейдёт последний инвертор схемы, то опять же на наборах $\widetilde{\sigma}_1$, $\widetilde{\sigma}_2$ неисправность будет обнаружена (в исправном состоянии схема на этих наборах меняет своё значение, а при такой неисправности на выходе схемы будет реализована константа).

Осталось рассмотреть ситуацию, когда в неисправное состояние переходит элемент какой-нибудь цепи Z_s.

Заметим, что при различных поломках в блоке B на его выходе могут получиться три функции неисправности: x и константы 0, 1. Тогда на выходе схемы вместо $K_1 \oplus \overline{K}_2 \oplus \ldots \oplus \overline{K}_h \oplus c'$ реализуется $K_1 \oplus \overline{K}_2 \oplus \ldots \oplus \overline{K}_h \oplus \overline{K}_s \oplus \overline{K}'_s \oplus c'$, где $\overline{K'_s}$ — либо константа, либо отрицание конъюнкции K'_s, которая короче конъюнкции K_s. Чтобы обнаружить неисправность, надо найти набор, на котором $\overline{K}'_s \oplus \overline{K}_s$ или, что то же самое, $K'_s \oplus K_s$ равно 1.

Если $K'_s = 1$, то неисправность обнаруживается на наборе $\widetilde{\sigma}_1 = (0, 0, \ldots, 0)$, если $K'_s = 0$, то — на наборе $\widetilde{\sigma}_3 = (1, 1, \ldots, 1)$.

Если K'_s — не константа, то существует переменная x_i, $i \neq 1$, которая входит в конъюнкцию K_s и не входит в K'_s. Можно рассматривать переменную x_1, так как если она присутствует в K_s, то подаётся только на левый вход самого верхнего блока B (переменные подаются по возрастанию индекса). Значит, либо она входит в K'_s, либо в K'_s не входит ещё какая-нибудь переменная из K_s, кроме x_1. Поэтому на наборе с единственным нулём в i-м разряде, который имеется в T, получаем $K'_s \oplus K_s = 1$. Неисправность будет обнаружена. Тем самым T является единичным проверяющим тестом для схемы S. Его длина равна $n+2$, что меньше чем $n+3$. Неизбыточность очевидна (в ходе перебора всех неис-

правностей не получено тривиальной функции неисправности). Теорема в случае $i = 11$ доказана.

Случай 7. Пусть $i = 12$, $B_{12} = \{x\&\overline{y},\ 1\}$.

Заметим, что в этом случае можно получить требуемую оценку для длины теста, используя рассуждения случая 6 и лемму 1.

Для этого построим неизбыточную схему, реализующую $\overline{x}$ и удовлетворяющую условиям леммы (рис. 8). Элемент $x\&\overline{y}$ присутствует в обоих базисах, поэтому схема, которая его реализует, состоит из одного элемента и удовлетворяет условиям леммы.

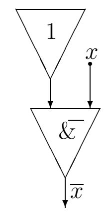


Рис. 8

Применяем лемму 1 к базисам B_{11} и B_{12}. Теорема 1 в случае $i = 12$ доказана.

Случай 8. Пусть $i = 15$, $B_{15} = \{x\&\overline{y},\ x \oplus y \oplus 1\}$.

Пусть $P = K_1 \oplus \ldots \oplus K_h \oplus c$ — полином Жегалкина функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, в котором K_1 — конъюнкция минимальной длины (если таких конъюнкций несколько, берём любую). Без ограничения общности можно перенумеровать переменные так, что $K_1 = x_1\& \ldots \&x_m$.

Функцию $f(\widetilde{x})$ реализуем схемой S, представленной на рис. 9.

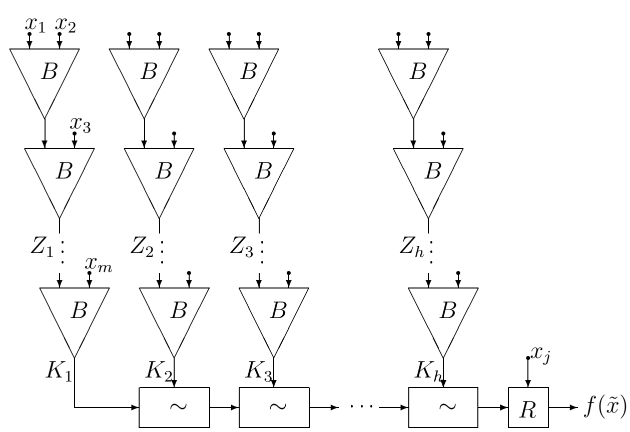


Рис. 9

Под блоком B понимается подсхема, изображённая на рис. 10; очевидно, что при подаче на входы этого блока переменных x и y в исправном состоянии на выходе будет реализована функция $x\&y$. Цепи $Z_1, \ldots, Z_h$ из блоков B реализуют $K_1, \ldots, K_h$ соответственно; во всех цепях переменные подаются по возрастанию индекса. Под блоком R понимается

подсхема, изображённая на рис. 11; при подаче на входы этого блока переменных x и y в исправном состоянии на выходе будет реализована функция $\overline{x}$. Заметим, что при различных поломках в этом блоке на выходе могут получиться шесть функций неисправности: $x\&y$, $\overline{x\&y}$,$x\&\overline{y}$, $\overline{x\&\overline{y}}$ и константы 0, 1. Данный блок отвечает за добавление константы (его может и не быть): $f(x_1, \ldots, x_n) = K_1 \sim \ldots \sim K_h \oplus c \oplus h (\bmod 2) \oplus 1$. Следовательно, если $c \oplus h (\bmod 2) = 1$, то блок отсутствует, иначе присутствует. Легко убедиться, что в исправном состоянии схема S реализует функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$.

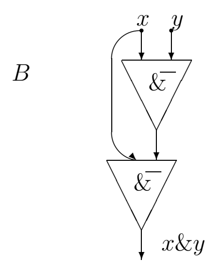


Рис. 10

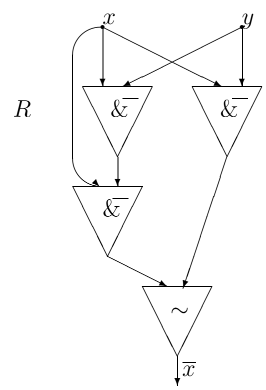


Рис. 11

Обозначим $\widetilde{\sigma}_1 = (0, 0, \ldots, 0)$, $\widetilde{\sigma}_2 = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{m}, 0, 0, \ldots, 0)$, тогда $f(\widetilde{\sigma}_1) \neq f(\widetilde{\sigma}_2)$. Следовательно, $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ на одном из этих наборов. Для определённости будем считать, что это набор $\widetilde{\sigma}_1$ (в обоих случаях доказательства аналогичны).

Рассмотрим сначала случай, когда существует $\widetilde{\sigma}_0$, удовлетворяющее неравенствам $\widetilde{\sigma}_0 \neq \widetilde{\sigma}_1$ и $f(\widetilde{\sigma}_0) = 0$, т. е. имеем два различных нулевых набора функции $f(x_1, \ldots, x_n)$. Пусть они различаются в j-м разряде, тогда x_j подаётся на правый вход блока R.

Пусть множество T состоит из n-разрядных наборов $\widetilde{\sigma}_0$, $\widetilde{\sigma}_1$, $\widetilde{\sigma}_2$, $\widetilde{\sigma}_3 = (1, 1, \ldots, 1)$ и всех наборов с $n - 1$ единицами, кроме $(0, 1, 1, \ldots, 1, 1)$. Покажем, что T является единичным проверяющим тестом для схемы S.

Предположим, что в неисправное состояние перешёл какой-нибудь элемент, реализующий эквивалентность. Заметим, что на наборах $\widetilde{\sigma}_1 = (0, 0, \ldots, 0)$, $\widetilde{\sigma}_2 = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{m}, 0, 0, \ldots, 0)$ в исправном состоянии все цепи $Z_2, Z_3, \ldots, Z_h$ на обоих наборах выдают 0, так как каждая из конъюнкций $K_2, K_3, \ldots, K_h$ содержит хотя бы одну переменную x_l, $l > m$ (это

следует из того, что K_1 — конъюнкция минимальной длины). Конъюнкция K_1 на этих наборах меняет своё значение, а значит, и функция, реализуемая исправной схемой, меняет своё значение на этих наборах. Но если неисправна какая-либо эквивалентность, то функция неисправности на наборах $\widetilde{\sigma}_1$, $\widetilde{\sigma}_2$ постоянна, стало быть, на одном из них неисправность будет обнаружена.

Далее можем считать, что все эквивалентности исправны. Если в схеме есть блок R и он перейдёт в неисправное состояние, то на выходе схемы будет одна из шести функций неисправности: $\overline{f}\&x_j$, $\overline{\overline{f}\&x_j}$, $\overline{f}\&\overline{x_j}$, $\overline{\overline{f}\&\overline{x_j}}$ или константа 0 или 1. Первая из них будет обнаружена на одном из наборов $\widetilde{\sigma}_1$, $\widetilde{\sigma}_2$, так как на одном из них $f = 1$, а $\overline{f}\&x_j = 0$. Вторая будет обнаружена в случае, когда $f = 0$ и $x_j = 0$, так как тогда $\overline{\overline{f}\&x_j} = 1$. Но на одном из наборов $\widetilde{\sigma}_0$, $\widetilde{\sigma}_1$ переменная x_j равна 0, так как они различны в j-м разряде (в случае, когда $f(\widetilde{\sigma}_1) = 1$, надо рассмотреть наборы $\widetilde{\sigma}_0$, $\widetilde{\sigma}_2$). Значит, на одном из них эта неисправность будет обнаружена. Третья функция неисправности (так же, как и первая) будет обнаружена на одном из наборов $\widetilde{\sigma}_1$, $\widetilde{\sigma}_2$, поскольку на одном из них $f = 1$, а $\overline{f}\&\overline{x_j} = 0$. Четвёртая будет обнаружена в случае, когда $f = 0$ и $x_j = 1$, так как тогда $\overline{\overline{f}\&\overline{x_j}} = 1$. Но $x_j = 1$ на одном из наборов $\widetilde{\sigma}_0$, $\widetilde{\sigma}_1$, поскольку они различны в j-м разряде (в случае, когда $f(\widetilde{\sigma_1}) = 1$, надо рассмотреть наборы $\widetilde{\sigma}_0$, $\widetilde{\sigma}_2$). Значит, на одном из них эта неисправность будет обнаружена. Константы 0, 1 будут обнаружены на одном из наборов $\widetilde{\sigma}_1$, $\widetilde{\sigma}_2$, так как функция меняет своё значение на этих наборах. Далее можно считать, что блок R исправен.

Осталось рассмотреть ситуацию, когда в неисправное состояние переходит элемент какой-нибудь цепи Z_s.

Заметим, что при различных поломках в блоке B на его выходе могут получиться три функции неисправности: x и константы 0, 1. Тогда на выходе схемы вместо $K_1 \sim K_2 \sim \ldots \sim K_h \oplus c$ реализуется $K_1 \sim K_2 \sim \ldots \sim K_h \oplus K_s \oplus K'_s \oplus c$, где K'_s — либо константа, либо конъюнкция K'_s, которая короче конъюнкции K_s. Чтобы обнаружить неисправность, надо найти набор, на котором $K'_s \oplus K_s$ равно 1.

Если $K'_s = 1$, то неисправность обнаруживается на наборе $\widetilde{\sigma}_1 = (0, 0, \ldots, 0)$.

Если $K'_s = 0$, то неисправность обнаруживается на наборе $\widetilde{\sigma}_3 = (1, 1, \ldots, 1)$.

Если K'_s — не константа, то существует переменная x_i, $i \neq 1$, которая входит в конъюнкцию K_s и не входит в K'_s. Можем не рассматривать переменную x_1, так как если она присутствует в K_s, то подаётся толь-

ко на левый вход самого верхнего блока B (переменные подаются по возрастанию индекса). Значит, либо она входит в K'_s, либо в K'_s не входит ещё какая-нибудь переменная из K_s помимо x_1. Поэтому на наборе с единственным нулём в i-м разряде, который имеется в T, получаем $K'_s \oplus K_s = 1$. Неисправность будет обнаружена. Тем самым T является единичным проверяющим тестом для схемы S. Его длина равна $n+3$. Неизбыточность очевидна (в ходе перебора всех неисправностей не получено тривиальной функции неисправности).

Осталось рассмотреть случай, когда $f(x_1,\ldots,x_n)=0$ только на одном наборе. С учётом существенной зависимости функции $f(\widetilde{\sigma})$ от всех своих переменных получаем $f(x_1,\ldots,x_n)=\overline{x_1^{\sigma_1}\& x_2^{\sigma_2}\&\ldots\& x_n^{\sigma_n}}$. Рассмотрим полином Жегалкина функции $f(x_1,\ldots,x_n)$.

Если все σ_i равны 0, то $f(x_1,\ldots,x_n)=K_1\oplus K_2\oplus\ldots\oplus K_h$, где $h=2^n-1$, следовательно, для его реализации потребуется чётное число эквивалентностей, и лишняя единица не появится. Значит, при реализации данной функции схемой рис. 9 не понадобится блока R, а значит, и набора $\widetilde{\sigma}_0$. Тест без набора $\widetilde{\sigma}_0$ будет единичным проверяющим тестом для схемы S. Его длина равна $n+2$.

Если в наборе $(\sigma_i,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)$ k компонент равны нулю, $0<k<n$, то

$$f(x_1,\ldots,x_n)=K_1\oplus K_2\oplus\ldots\oplus K_h\oplus 1,$$

где $h=2^k$. Следовательно, для реализации f потребуется нечётное число эквивалентностей, и лишняя единица не появится. При реализации данной функции схемой на рис. 9 не понадобится блок R, а значит, и набор $\widetilde{\sigma}_0$. Тест без набора $\widetilde{\sigma}_0$ будет единичным проверяющим тестом для схемы S. Его длина равна $n+2$.

Если все σ_i равны 1, то $f(x_1,\ldots,x_n)=x_1\& x_2\&\ldots\& x_n\oplus 1$. Данную функцию реализуем схемой S, изображённой на рис. 12, где B — подблок, изображённый на рис. 10.

Легко убедиться в том, что схема S в исправном состоянии реализует нашу функцию.

Пусть множество T состоит из n-разрядных наборов $\widetilde{\sigma}_1=(0,0,\ldots,0)$, $\widetilde{\sigma}_2=(1,1,\ldots,1)$ и всех наборов с $n-1$ единицами. Покажем, что T является единичным проверяющим тестом для данной схемы.

На выходе схемы при неисправности в каком-нибудь блоке B вместо f реализуется $K\oplus 1$, где K — либо константа, либо конъюнкция K, которая короче конъюнкции $x_1\& x_2\&\ldots\& x_n$. Чтобы обнаружить неисправность, надо найти набор, на котором $K\oplus x_1\& x_2\&\ldots\& x_n$ равно 1.

Если $K = 1$, то на наборе $\widetilde{\sigma}_1 = (0, 0, \ldots, 0)$ обнаруживается неисправность.

Если $K = 0$, то на наборе $\widetilde{\sigma}_2 = (1, 1, \ldots, 1)$ обнаруживается неисправность.

Если K — не константа, то существует переменная x_i, которая не входит в K. Поэтому на наборе с единственным нулём в i-м разряде из T получаем $K \oplus x_1 \& x_2 \& \ldots \& x_n = 1$. Неисправность будет обнаружена.

Если неисправна эквивалентность, то она будет обнаружена на одном из наборов $\widetilde{\sigma}_1$, $\widetilde{\sigma}_2$, так как исправная функция меняет своё значение на этих наборах. Если неисправен предпоследний элемент цепи, то возможны 2 функции неисправности: $x_1 \& x_2 \& \ldots \& x_{n-1}$ и $x_1 \& x_2 \& \ldots \& x_{n-1} \oplus 1$. Первую обнаружим на наборе $\widetilde{\sigma}_1$, вторую — на наборе $(1, 1, \ldots, 1, 0)$.

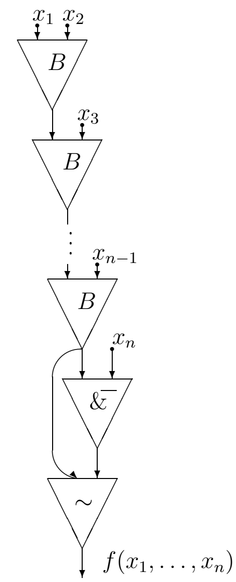


Рис. 12

Тем самым T является единичным проверяющим тестом для схемы S. Его длина равна $n + 2$. Неизбыточность очевидна (в ходе перебора всех неисправностей не получено тривиальной функции неисправности). Теорема в случае $i = 15$ доказана.

Случай 9. Пусть $i = 17$, $B_{17} = \{x \& \overline{y},\ x \vee \overline{y}\}$.

Пусть $P = K_1 \oplus \ldots \oplus K_h \oplus c$ — полином Жегалкина функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, в котором K_1 — конъюнкция минимальной длины (если таких конъюнкций несколько, то берём любую). Без ограничения общности можно перенумеровать переменные так, что $K_1 = x_1 \& \ldots \& x_m$. Также заметим, что $f(x_1, \ldots, x_n)$ можно представить в виде

$$P = K_1 \oplus \overline{K}_2 \oplus \overline{K}_2 \oplus \ldots \oplus \overline{K}_h \oplus c \oplus h(\mathrm{mod}\, 2) \oplus 1.$$

Функцию $f(\widetilde{x})$ реализуем схемой S, представленной на рис. 13.

Под блоком B понимается подсхема, изображённая на рис. 14; очевидно, что при подаче на входы этого блока переменных x и y в исправном состоянии на выходе будет реализована функция $x \& y$.

Под блоком Q понимается подсхема, изображённая на рис. 15; очевидно, что при подаче на входы этого блока переменных x и y в исправном состоянии на выходе будет реализована функция $\overline{x \& y}$.

Под блоком R понимается подсхема, изображённая на рис. 16. При подаче на входы этого блока переменных x и y в исправном состоянии на выходе будет реализована функция $\overline{y}$.

Под блоком A понимается подсхема, изображённая на рис. 17. При подаче на входы этого блока переменных x и y в исправном состоянии на выходе будет реализована функция $x \oplus y$.

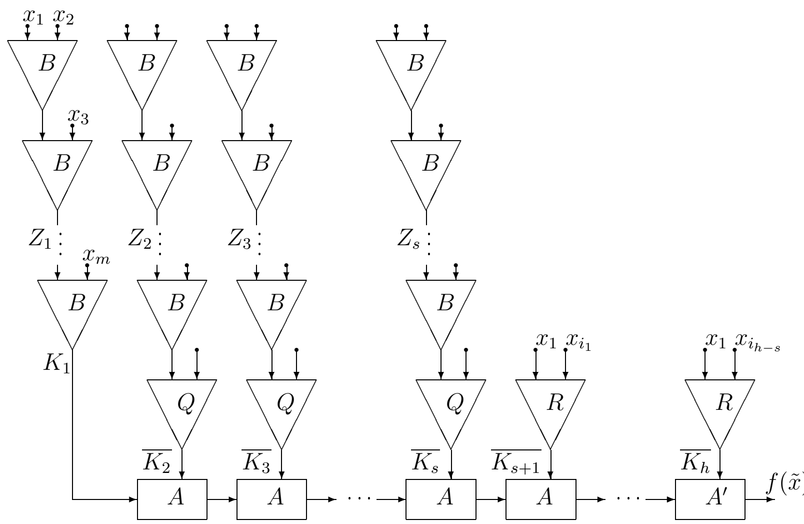
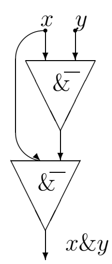


Рис. 13

B



Q

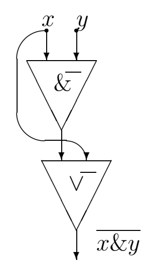
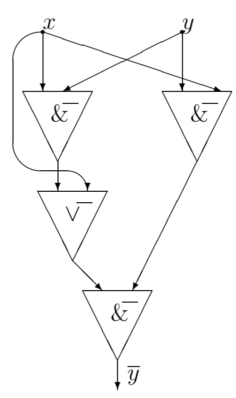


Рис. 14

Рис. 15

R



A

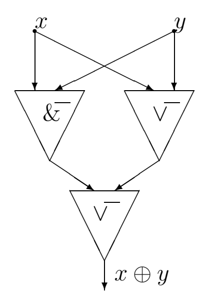


Рис. 16

Рис. 17

Под блоком A' понимается подсхема, изображённая на рис. 18. При подаче на входы этого блока переменных x и y в исправном состоянии на выходе будет реализована функция $x \sim y$.

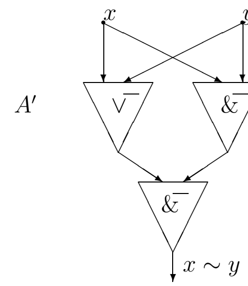


Рис. 18

В схеме S цепи $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots, Z_s$ состоят из блоков B и блоков Q; эти цепи реализуют $K_1, \overline{K}_2, \overline{K}_3, \ldots, \overline{K}_s$ соответственно. Во всех цепях переменные подаются по возрастанию индекса. Блоки R отвечают за реализацию отрицаний конъюнкций длины один (если такие присутствуют в нашем представлении функции f). При этом все эти конъюнкции длины один отличны от x_1, так как она в данном случае выступает в роли K_1. Нижняя цепочка состоит из блоков A, которые отвечают за суммирование. Выходным блоком схемы является A, если $c \oplus h (\operatorname{mod} 2) \oplus 1 = 0$, или A', если $c \oplus h (\operatorname{mod} 2) \oplus 1 = 1$ (отвечает за прибавление константы).

Пусть множество T состоит из n-разрядных наборов $\widetilde{\sigma}_1 = (0, 0, \ldots, 0)$, $\widetilde{\sigma}_2 = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{m}, 0, 0, \ldots, 0)$, $\widetilde{\sigma}_3 = (1, 1, \ldots, 1)$ и всех наборов с $n-1$ единицами. Покажем, что T является единичным проверяющим тестом для схемы S.

Предположим, что неисправность произошла в одном из блоков A. Тогда вместо суммы значений, подающихся на его входы, он выдаст одну из четырёх функций неисправности: $x \& \overline{y}$, $\overline{x} \& y$, 0 или 1. Заметим, что значение $x \oplus y$ отличается от значения $x \& \overline{y}$ и константы 0 на наборе $(0, 1)$, на наборе $(1, 0)$ значение $x \oplus y$ отличается от $\overline{x} \& y$, а на наборе $(1, 1)$ $x \oplus y$ отличается от константы 1. Чтобы обнаружить неисправность произвольного блока A, надо на его входы подать эти три набора.

Заметим, что если подать на вход схемы набор $\widetilde{\sigma}_1$, то на i-й слева блок A будет подаваться $(i (\operatorname{mod} 2) \oplus 1, 1)$. Если подать на вход схемы набор $\widetilde{\sigma}_2$, то на i-й слева блок A будет подаваться $(i (\operatorname{mod} 2), 1)$. Следовательно, для любого блока A имеем два набора в тесте, на которых на входы приходят $(0, 1)$ и $(1, 1)$. Теперь заметим, что на наборе $\widetilde{\sigma}_3$ на любой

блок A будет приходить $(1,0)$. Тем самым неисправность любого блока A будет обнаружена на одном из трёх наборов $\widetilde{\sigma}_1$, $\widetilde{\sigma}_2$ и $\widetilde{\sigma}_3$.

Теперь рассмотрим случай, когда в неисправное состояние перешёл блок A' (если он присутствует в схеме). Тогда вместо отрицания суммы значений, подающихся на его входы, он выдаст одну из четырёх функций неисправности: $x \vee \overline{y}$, $\overline{x} \vee y$, 0 или 1. Заметим, что значение $x \sim y$ отличается от $x \vee \overline{y}$ и константы 1 на наборе $(1,0)$, на наборе $(0,1)$ значение $x \sim y$ отличается от значения $\overline{x} \vee y$, а на наборе $(1,1)$ $x \sim y$ отличается от константы 0.

Заметим, что если подать на вход схемы набор $\widetilde{\sigma}_1$, то на блок A' будет подаваться $(h(\operatorname{mod} 2), 1)$. Если подать на вход схемы набор $\widetilde{\sigma}_2$, то на блок A' будет подаваться $(h(\operatorname{mod} 2) \oplus 1, 1)$. Следовательно, для блока A' имеем два набора в тесте, на которых на его входы приходят $(0,1)$ и $(1,1)$. Теперь заметим, что на наборе $\widetilde{\sigma}_3$ на блок A' будет приходить набор $(1,0)$. Тем самым неисправность блока A' будет обнаружена на одном из трёх наборов $\widetilde{\sigma}_1$, $\widetilde{\sigma}_2$, $\widetilde{\sigma}_3$.

Далее можно считать, что все блоки A и A' исправны.

Рассмотрим ситуацию, когда в неисправное состояние переходит элемент какой-нибудь цепи Z_j.

Заметим, что при различных поломках в блоке B на его выходе могут получиться три функции неисправности: x и константы 0, 1, а при различных поломках в блоке Q на его выходе могут получиться три функции неисправности: $\overline{x}$ и константы 0, 1. Тогда на выходе схемы вместо $K_1 \oplus \overline{K}_2 \oplus \ldots \oplus \overline{K}_h \oplus c \oplus h(\operatorname{mod} 2) \oplus 1$ реализуется $K_1 \oplus \overline{K}_2 \oplus \ldots \oplus \overline{K}_h \oplus \overline{K}_j \oplus \overline{K}'_j \oplus c \oplus h(\operatorname{mod} 2) \oplus 1$, где $\overline{K'_j}$ — либо константа, либо отрицание конъюнкции K'_j, которая короче конъюнкции K_j. Чтобы обнаружить неисправность, надо найти набор, на котором $\overline{K}'_j \oplus \overline{K}_j$ равно 1 или, что то же самое, $K'_j \oplus K_j$ равно 1.

Если $K'_j = 1$, то на наборе $\widetilde{\sigma}_1 = (0, 0, \ldots, 0)$ неисправность обнаруживается, если $K'_j = 0$, то на наборе $\widetilde{\sigma}_3 = (1, 1, \ldots, 1)$.

Если K'_j — не константа, то существует переменная x_i, которая входит в конъюнкцию K_j и не входит в K'_j. Поэтому на наборе с единственным нулём в i-м разряде, который имеется в T, получаем $K'_j \oplus K_j = 1$. Неисправность будет обнаружена.

Осталось только рассмотреть случай, когда поломка произошла в одном из блоков R, который реализуют в исправном состоянии $\overline{x}_{i_j}$. Тогда он выдаст одну из пяти функций неисправности: $x_1 \vee \overline{x}_{i_j}$, $\overline{x_1 \& x_{i_j}}$, $\overline{x_1 \vee x_{i_j}}$, 0 или 1. Чтобы отличить функцию $x_1 \vee \overline{x}_{i_j}$ и константу 1 от $\overline{x}_{i_j}$, надо подать на вход схемы такой набор, что $x_{i_j} = 1$ и $x_1 = 1$, например, набор $\widetilde{\sigma}_3$

(он содержится в T). Чтобы отличить функцию $\overline{x_1 \vee x_{i_j}}$ и константу 0 от $\overline{x}_{i_j}$, надо подать на вход схемы такой набор, что $x_{i_j} = 0$, а $x_1 = 1$, например, набор с единственным нулём в i_j-м разряде (он содержится в T). На наборе $(0, 1, \ldots, 1)$ мы отличим $\overline{x}_{i_j}$ от $\overline{x_1 \& x_{i_j}}$. Тем самым все возможные неисправности блоков R будут обнаружены.

Стало быть, T является единичным проверяющим тестом для схемы S. Его длина равна $n+3$. Неизбыточность очевидна (в ходе перебора всех неисправностей не получено тривиальной функции неисправности). Теорема в случае $i = 17$ доказана. Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лупанов О. Б.** Асимптотические оценки сложности управляемых систем. — М.: Изд-во МГУ, 1984. — 139 с.
2. **Редькин Н. П.** Надёжность и диагностика схем. — М.: Изд-во МГУ, 1992. — 191 с.
3. **Чегис И. А., Яблонский С. В.** Логические способы контроля электрических схем // Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. — 1958. — Т. 51. — С. 270–360.
4. **Яблонский С. В.** Введение в дискретную математику. 2-е изд. — М.: Наука, 1986. — 384 с.
5. **Яблонский С. В.** Некоторые вопросы надёжности и контроля управляющих систем // Мат. вопросы кибернетики. Вып.1. — М.: Наука. Физматлит, 1988. — С. 5–25.
6. **Reddy S. M.** Easily testable realization for logic functions // IEEE Trans. Comput. — 1972. — N 1. — P. 124–141.

Коляда Сергей Сергеевич,
e-mail: kolyadass@mail.ru

Статья поступила
15 января 2012 г.

Переработанный вариант —
9 октября 2012 г.