ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Март—апрель 2013. Том 20, № 2. С. 75–87

УДК 519.178

РАСШИРЯЮЩИЕ ОПЕРАТОРЫ ДЛЯ ЗАДАЧИ О НЕЗАВИСИМОМ МНОЖЕСТВЕ *)

Д. С. Малышев

Аннотация. Введено понятие расширяющего оператора для задачи о независимом множестве, являющееся полезным инструментом конструктивного формирования новых случаев эффективной разрешимости этой задачи в семействе наследственных классов графов. Данное понятие применяется к наследственным частям множества $\mathcal{F}ree(\{P_5, C_5\})$. Доказано, что если для связного графа G задача полиномиально разрешима в классе $\mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, G\})$, то для любого p она остаётся таковой в классе $\mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, G \circ \overline{K}_2, G \oplus K_{1,p}\})$. Также найдены два новых наследственных подмножества $\mathcal{F}ree(\{P_5, C_5\})$ с полиномиально разрешимой задачей о независимом множестве, не являющиеся следствием применения указанного оператора.

Ключевые слова: задача о независимом множестве, вычислительная сложность, расширяющий оператор, эффективный алгоритм.

Введение

Данная работа является продолжением статьи [5], в которой рассматривался конструктивный подход к построению новых случаев полиномиальной разрешимости задачи о независимом множестве в представительном семействе наследственных классов графов. Напомним, что *независимым множеством* обыкновенного графа называется произвольное подмножество из попарно не смежных его вершин. Оно называется *наибольшим*, если содержит максимально возможное число вершин. Число

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 11–01–00107–а и 12–01–00749–а), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2012 гг.» (гос. контракты 16.740.11.0310, 14.B37.21.0393 и соглашение 8861), лаборатории алгоритмов и технологий анализа сетевых структур НИУ ВШЭ, гранта Правительства РФ (дог. 11.G34.31.0057), гранта Президента РФ МК-1148.2013.1 и Программы «Научный фонд НИУ ВШЭ», 2013–2014 гг. (проект № 12–01–0035.)

вершин в наибольшем независимом множестве графа G называется *числом независимости* G и обозначается через $\alpha(G)$. Задача о независимом множестве (задача НМ) для данного графа состоит в нахождении его наибольшего независимого множества. Известно, что для любого класса графов задача НМ полиномиально эквивалентна задаче вычисления числа независимости.

Класс графов $\mathcal{X}$ называется *наследственным*, если он замкнут относительно изоморфизма и удаления вершин. Любой наследственный (и только наследственный) класс графов $\mathcal{X}$ может быть задан множеством своих запрещённых порождённых подграфов $\mathcal{S}$. В этом случае принята запись $\mathcal{X} = \mathcal{F}ree(\mathcal{S})$. Совокупность наследственных классов графов является достаточно представительным континуальным семейством и включает такие известные подсемейства, как замкнутые относительно удаления вершин и рёбер (называемые ещё *сильно наследственными*, или *монотонными*) и замкнутые относительно удаления вершин и рёбер, стягивания и подразбиения рёбер (*минорно замкнутые*) классы графов.

Во многих работах выявляются новые области эффективной (полиномиальной) разрешимости задачи НМ, в том числе и в семействе наследственных классов графов. Следуя терминологии из [7], наследственный класс графов с полиномиально разрешимой задачей НМ будем называть НМ-*простым*. Все известные автору результаты работ по выявлению новых НМ-простых классов являются обобщениями уже известных старых случаев. Вместе с тем (как отмечено в [5]), хотелось бы иметь «универсальные» обобщения такого рода. Именно, в [5] предложено рассматривать преобразования $f : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ (функции одного или многих (неизвестных) аргументов — графов из части $\mathcal{S}$) такие, что $\mathcal{F}ree(\mathcal{S}) \subset \mathcal{F}ree(\mathcal{S}')$ и из НМ-простоты класса $\mathcal{F}ree(\mathcal{S})$ следует НМ-простота класса $\mathcal{F}ree(\mathcal{S}')$. Такого рода преобразования будем называть *расширяющими операторами* для задачи о независимом множестве.

Полезность понятия расширяющего оператора состоит в том, что конкретные операторы такого рода позволяют конструктивно («регулярным образом») порождать новые НМ-простые случае. Например, если $\mathcal{F}ree(\mathcal{S})$ — конкретный НМ-простой класс, а f — расширяющий оператор, для которого $\mathcal{S}$ входит в область его определения, то $\mathcal{F}ree(f(\mathcal{S}))$, $\mathcal{F}ree(f(f(\mathcal{S})))$, $\mathcal{F}ree(f(f(f(\mathcal{S}))))$ — монотонно возрастающая бесконечная цепь (по отношению включения) из НМ-простых классов. Заметим, что такие трансформации могут быть особенно полезными, когда известно сразу несколько расширяющих операторов (поскольку можно рас-

сматривать действия их суперпозиций). Заметим также, что понятие расширяющего оператора может быть применено к любой задаче на графах, а не только к задаче о независимом множестве.

В [5] доказано, что отображение $\{G\} \to \{G \oplus K_1\}$ является расширяющим оператором (под *суммой* $G_1 \oplus G_2$ понимается объединение графов G_1 и G_2 с непересекающимися множествами вершин), и показано, что оператор $\{P_5, C_5, G\} \to \{P_5, C_5, G \circ K_1\}$ расширяющий (под *произведением* $G_1 \circ G_2$ графов G_1 и G_2 понимается граф $V(G_1) \cup V(G_2), E(G_1) \cup E(G_2) \cup V(G_1) \times V(G_2)$). Интерес, проявленный в [5] к наследственным подклассам класса $\mathcal{F}ree(\{P_5, C_5\})$, объясняется рядом причин. Так, среди всех связных графов G с пятью вершинами случай простого пути является единственным, для которого статус задачи НМ в классе $Free(\{G\})$ остаётся открытым вопросом [21]. Вместе с тем, имеются десятки работ, в которых к графу P_5 добавляется один или несколько других запрещённых порождённых подграфов и доказывается, что этот класс НМ-простой (см., например, [8–10, 17, 18, 20–22]). Доказано также, что для любого графа G с не более чем пятью вершинами, отличного от P_5 и C_5, задача НМ полиномиально разрешима в классе графов $\mathcal{F}ree(\{P_5, G\})$ [21]. Вопрос для класса $\mathcal{F}ree(\{P_5, C_5\})$ пока остаётся открытым. Именно эти обстоятельства подтолкнули к рассмотрению в [5] расширяющих операторов для аргументов $\mathcal{S}$, содержащих P_5 и C_5.

Настоящая работа состоит из трёх разделов. В разд. 1 доказаны некоторые вспомогательные результаты. В разд. 2 показано, что некоторые два наследственные подмножества $\mathcal{F}ree(\{P_5, C_5\})$ (не поглощаемые известными автору результатами о НМ-простых классах) НМ-просты. В разд. 3 доказано, что $\{P_5, C_5, G\} \to \{P_5, C_5, G \oplus K_{1,p}, G \circ \overline{K}_2\}$ для любого натурального p является расширяющим оператором в предположении связности графа G.

В статье приняты следующие обозначения:

$N_k(x)$ — множество вершин, отстоящих от x в точности на расстояние k, $N_1(x) = N(x)$;

$\mathrm{ring}_1, \mathrm{ring}_2, \mathrm{ring}_3$ — графы, получающиеся добавлением вершины x к простому циклу $(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_7)$ и рёбер $(x, y_1), (x, y_3)$ (для ring_1), $(x, y_1), (x, y_2), (x, y_3)$ (для ring_2), $(x, y_1), (x, y_2), (x, y_3), (x, y_4)$ (для ring_3).

Все основные понятия и обозначения теории графов, которые не приводятся, можно найти, например, в [2, 3, 6, 11, 13].

1. Вспомогательные результаты

В [5] доказано, что любой связный граф из класса $\mathcal{F}ree(\{P_5\})$ имеет радиус не более чем 2 (лемма 2). Основная идея доказательства это-

го утверждения состоит в том, что рассматривается вершина x с наибольшим значением величины $|\{x\} \cup N(x) \cup N_2(x)|$ и показывается, что расстояние от x до любой другой вершины не превосходит двух. Доказательство основано на следующем наблюдении: если для некоторой вершины y_1 множество $N_3(y_1)$ непусто, то существует вершина $y_2 \in N_2(y_1)$ такая, что $\{y_1\} \cup N(y_1) \cup N_2(y_1) \subset \{y_2\} \cup N(y_2) \cup N_2(y_2)$. Этот факт позволяет довольно просто доказать следующее утверждение, усиливающее лемму 2 из [5].

Лемма 1. *Для любого связного графа $G \in \mathcal{F}ree(\{P_5\}) \backslash \mathcal{F}ree(\{K_{1,p}\})$ существует вершина x такая, что для любой вершины $y \in V(G)$ расстояние от x до y не более чем 2 и $N(y)$ содержит не менее p независимых вершин.*

Одна из вспомогательных процедур при решении задачи НМ состоит в упрощении, «сжатии» текущего графа. При этом вместо исходного графа рассматривается его порождённый подграф такой, что их числа независимости совпадают. Иногда идеи такого рода даже приводят к созданию алгоритма решения задачи НМ. Например, для непустых хордальных графов (т. е. графов без порождённых циклов длины четыре и более) всегда возможно удаление так называемой смежно поглощающей вершины [1].

Говорят, что вершина a *смежно поглощает* b, если a и b смежны и $N(b) \setminus \{a\} \subseteq N(a) \setminus \{b\}$. Значение этого понятия состоит в том, что при удалении из графа любой смежно поглощающей вершины не изменяется число независимости [1]. Возможность применения к некоторым графам идеи удаления вершины с сохранением числа независимости доказывается далее.

Лемма 2. *Пусть в связном графе $G = (V, E)$ из $\mathcal{F}ree(\{P_5\})$ вершина x — центральная, и пусть существуют несмежные $y_1, y_2 \in N(x)$ такие, что*

(i) *$N(z) \setminus (N(x) \cup \{x\}) \subseteq N(y_1) \setminus (N(x) \cup \{x\})$ для любой вершины $z \in N(x) \setminus (N(y_1) \cup \{y_1\})$, причём для $z = y_2$ включение строгое*;

(ii) *никакая вершина из $N_2(y_1) \setminus (N(y_1) \cup N(x))$ не смежна ни с какой вершиной из $N(y_1) \setminus (N(x) \cup \{x\})$;*

(iii) *каждая вершина из $N(y_2) \setminus (N(x) \cup \{x\})$ смежна со всеми вершинами множества $N(y_1) \setminus (N(x) \cup \{x\})$.*

Тогда $\alpha(G) = \alpha(G[V \setminus \{x\}])$.

Доказательство. Рассмотрим произвольное наибольшее независимое множество графа G, которое обозначим через IS. Если ни одна из

вершин множества $N(y_2) \setminus (N(x) \cup \{x\})$ (по условию (iii) порождающего в G полный подграф) не принадлежит IS, то из условий (i), (ii) следует, что $IS \setminus \{x\} \cup \{y_2\}$ — наибольшее независимое множество графа G. Если хотя бы одна вершина $z \in IS$ принадлежит $N(y_2) \setminus (N(x) \cup \{x\})$, то $(IS \cap N(y_1)) \setminus (N(x) \cup \{x\}) = \{z\}$ по условию (iii). По условию (i) существует такая вершина $z' \in N(y_1) \setminus (N(y_2) \cup N(x))$, что $(z', z) \in E$. Из условий (i), (ii) вытекает, что $IS \setminus \{y_2, z'\} \cup \{x, z\}$ — наибольшее независимое множество графа G. В обоих возможных случаях справедливо равенство $\alpha(G) = \alpha(G[V \setminus \{x\}])$. Лемма 2 доказана.

Леммы 1 и 2 являются вспомогательными утверждениями, необходимыми для доказательства одного из основных утверждений настоящей работы, которое, в свою очередь, является полезным инструментом формирования новых случаев полиномиальной разрешимости задачи о независимом множестве. Другими инструментами такого рода могут оказаться некоторые соединения графов из уже известных НМ-простых классов. Одно из таких преобразований рассматривается далее. Именно, будет введено понятие композиции наследственных классов графов и доказано, что эффективная разрешимость задачи НМ сохраняется при композиции.

Пусть $\mathcal{X}_1$ и $\mathcal{X}_2$ — два наследственных класса. *Композицией* $\mathcal{X}_1$ и $\mathcal{X}_2$ (обозначаемой через $\mathcal{X}_1 \star \mathcal{X}_2$) называется множество тех графов G, для которых существуют графы $G_1 \in \mathcal{X}_1$, $G_2 \in \mathcal{X}_2$ и подмножества $V_1 \subseteq V(G_1)$, $V_2 \subseteq V(G_2)$ такие, что

$$V(G) = V(G_1) \cup V(G_2) \quad \text{и} \quad E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup V_1 \times V_2.$$

Лемма 3. *Если $\mathcal{X}_1$ и $\mathcal{X}_2$ —* НМ-*простые классы, то их композиция $\mathcal{X}_1 \star \mathcal{X}_2$ —* НМ-*простой класс.*

Доказательство. Ясно, что композиция $\mathcal{X}_1$ и $\mathcal{X}_2$ — наследственный класс. Покажем, что этот класс НМ-прост. Пусть граф $G = (V, E)$ принадлежит классу $\mathcal{X}_1 \star \mathcal{X}_2$, и пусть $G_1 = (V_1', E_1'), G_2 = (V_2', E_2'), V_1, V_2$ — графы и множества, которые для G фигурируют в определении композиции. Очевидно, что если $V_1 \times V_2 = \varnothing$ (т. е. если $V_1 = \varnothing$ или $V_2 = \varnothing$), то $\alpha(G) = \alpha(G_1) + \alpha(G_2)$, поэтому число независимости графа G вычисляется за полиномиальное от $|V(G)|$ время. Если $V_1 \times V_2 \neq \varnothing$, то любое независимое множество графа G содержит вершины из не более чем одного множества V_1 и V_2. Тем самым $\alpha(G) = \alpha(G[V_1' \setminus N(x)]) + \alpha(G[V \setminus V_2])$ $(\alpha(G) = \alpha(G[V_2' \setminus N(y)]) + \alpha(G[V \setminus V_1]))$, если некоторое наибольшее независимое множество графа G содержит хотя бы одну вершину $x \in V_1$

($y \in V_2$). Если ни одна из вершин $V_1 \cup V_2$ не принадлежит ни одному наибольшему независимому множеству графа G, то

$$\alpha(G) = \alpha(G[V \setminus V_1]) + \alpha(G[V \setminus V_2]).$$

Значит, в случае, когда $V_1 \times V_2$ непусто, справедливо равенство

$$\alpha(G) = \max(\max_{x \in V_1} \alpha(G[V_1' \setminus N(x)]) + \alpha(G[V \setminus V_2]), \\ \max_{y \in V_2} \alpha(G[V_2' \setminus N(y)]) + \alpha(G[V \setminus V_1]), \alpha(G[V \setminus V_1]) + \alpha(G[V \setminus V_2])).$$

Таким образом, число независимости графа G вычисляется за полиномиальное время независимо от пустоты множества $V_1 \times V_2$. Лемма 3 доказана.

2. Полиномиальная разрешимость задачи НМ в классах графов $\mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, \overline{\mathrm{ring}_1}, \overline{\mathrm{ring}_3}, \overline{P_2 \oplus P_4}\})$ и $\mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, \overline{\mathrm{ring}_2}, \overline{\mathrm{ring}_3}, \overline{2P_3}\})$

В этом разделе доказано, что задача о независимом множестве эффективно разрешима для графов без наборов порождённых подграфов $P_5, C_5, \overline{\mathrm{ring}_1}, \overline{\mathrm{ring}_3}, \overline{P_2 \oplus P_4}$ и $P_5, C_5, \overline{\mathrm{ring}_2}, \overline{\mathrm{ring}_3}, \overline{2P_3}$. Этот новый результат является одним из основных в настоящей работе и не перекрывается другими известными автору НМ-простыми подмножествами класса $\mathcal{F}ree(\{P_5\})$ (см., например, [8–10, 14, 17–22]).

Теорема 1. *Классы графов*

$$\mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, \overline{\mathrm{ring}_1}, \overline{\mathrm{ring}_3}, \overline{P_2 \oplus P_4}\}) \quad \text{и} \quad \mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, \overline{\mathrm{ring}_2}, \overline{\mathrm{ring}_3}, \overline{2P_3}\})$$

НМ-*просты.*

Доказательство. Напомним, что *совершенным* называется граф, наследственно обладающий свойством равенства хроматического и кликового чисел (что эквивалентно равенству числа независимости и числа кликового покрытия [16]). Известно [12], что множество совершенных графов совпадает с множеством графов из $\mathcal{F}ree(\{C_5, \overline{C_5}, C_7, \overline{C_7}, \ldots\})$ и что некоторые классические экстремальные задачи на графах (включая задачу о независимом множестве [15]) эффективно разрешимы для совершенных графов. Вместе с тем можно заметить, что все графы из классов $\mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, \overline{\mathrm{ring}_1}, \overline{\mathrm{ring}_3}, \overline{P_2 \oplus P_4}\}) \cap \mathcal{F}ree(\{\overline{C_7}\})$ и $\mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, \overline{\mathrm{ring}_2}, \overline{\mathrm{ring}_3}, \overline{2P_3}\}) \cap \mathcal{F}ree(\{\overline{C_7}\})$ совершенны. Поэтому для доказательства

теоремы достаточно рассматривать только графы из данных классов, содержащие порождённый подграф $\overline{C_7}$.

Пусть G_1 — произвольный граф из класса $\mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, \overline{\mathrm{ring}_1}, \overline{\mathrm{ring}_3}, P_2 \oplus P_4\})$, G_2 — произвольный граф из $\mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, \overline{\mathrm{ring}_2}, \overline{\mathrm{ring}_3}, \overline{2P_3}\})$, каждый из которых содержит порождённый подграф $\overline{C_7}$. Ясно, что граф $H_1 = \overline{G_1} \in \mathcal{F}ree(\{\overline{P_5}, \overline{C_5} = C_5, \mathrm{ring}_1, \mathrm{ring}_3, P_2 \oplus P_4\})$ содержит C_7 в качестве порождённого подграфа. Это же верно и для графа

$$H_2 = \overline{G_2} \in \mathcal{F}ree(\{\overline{P_5}, C_5, \mathrm{ring}_2, \mathrm{ring}_3, 2P_3\}).$$

Покажем, что любая вершина из $V(H_1) \setminus V(C_7)$ и любая вершина из $V(H_2) \setminus V(C_7)$ либо смежна с каждой вершиной соответствующего цикла C_7, либо не смежна ни с одной его вершиной. Докажем это утверждение только для графа H_1, для H_2 оно доказывается аналогично.

Предположим, что существует вершина $x \in V(H_1)$, не обладающая этим свойством. Рассмотрим множество $N(x) \cap V(C_7)$, циклически упорядоченное в порядке следования его элементов в цикле. Расстояние (в смысле обычного расстояния в графах) между двумя последовательными вершинами (в смысле введённого упорядочивания) из $N(x) \cap V(C_7)$ не может быть равным 3 (иначе H_1 содержит порождённый подграф C_5). Поскольку H_1 не содержит порождённого подграфа $\overline{P_5}$, то $N(x) \cap V(C_7)$ не содержит последовательных вершин y_1, y_2 и y_3 таких, что расстояние между y_1 и y_2 (между y_2 и y_3) равно 2, а расстояние между y_2 и y_3 (между y_1 и y_2) равно 1. Так как $H_1 \in \mathcal{F}ree(\{\mathrm{ring}_3\})$, вершина x смежна не более чем с тремя вершинами цикла C_7, причём если $|N(x) \cap V(C_7)| = 3$, то $N(x) \cap V(C_7)$ составляют три последовательные вершины y_1, y_2, y_3 цикла C_7, а если $|N(x) \cap V(C_7)| = 2$, то $N(x) \cap V(C_7)$ образуют две вершины, расстояние между которыми в цикле равно 2. Оба случая невозможны, так как в первом случае H_1 содержит порождённый множеством вершин $\{x, y_2\} \cup V(C_7) \setminus \{y_1, y_2, y_3\}$ подграф $P_2 \oplus P_4$, а во втором — H_1 содержит порождаемый множеством вершин $\{x\} \cup V(C_7)$ подграф ring_1. Остаётся только один случай, когда x смежна ровно с одной вершиной цикла C_7. В этом случае H_1 содержит порождённый подграф $P_2 \oplus P_4$; противоречие с предположением.

Понятно, что $2C_7$ не является порождённым подграфом графов H_1 и H_2. Поэтому если H_1 содержит два цикла длины 7 с непересекающимися множествами вершин в качестве подграфов, то существуют две смежные вершины x и y, принадлежащие разным таким циклам. Поэтому x смежна со всеми вершинами одного из циклов, а y — со всеми вершинами другого. Значит, для любой вершины одного цикла есть смежная

с ней вершина другого цикла. Отсюда и из доказанного в предыдущем абзаце утверждения следует, что в графе H_1 каждая вершина любого цикла C_7 смежна с каждой вершиной любого другого цикла C_7. Это же верно и для графа H_2.

Пусть $\mathcal{X}_1$ — множество графов, каждая компонента связности которого является подграфом графа C_7, а $\mathcal{X}_2$ — множество всех совершенных графов. Оба класса НМ-просты. В силу доказанного выше

$$\mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, \overline{\mathrm{ring}_1}, \overline{\mathrm{ring}_3}, \overline{P_2 \oplus P_4}\}) \cup \mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, \overline{\mathrm{ring}_2}, \overline{\mathrm{ring}_3}, \overline{2P_3}\}) \subseteq \mathcal{X}_1 \star \mathcal{X}_2.$$

Значит, по лемме 3 классы

$$\mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, \overline{\mathrm{ring}_1}, \overline{\mathrm{ring}_3}, \overline{P_2 \oplus P_4}\}) \text{ и } \mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, \overline{\mathrm{ring}_2}, \overline{\mathrm{ring}_3}, \overline{2P_3}\})$$

НМ-просты. Теорема 1 доказана.

3. Новый расширяющий оператор для задачи о независимом множестве

Один из возможных подходов к решению задачи о независимом множестве состоит в использовании ветвления по каким-нибудь образом выбираемой вершине. Суть этого метода состоит в том, что в графе $G = (V, E)$ выбирается некоторая вершина x и задача НМ для графа G сводится к той же задаче для графов $G_1 = G[V \setminus \{x\}]$ и $G_2 = G[V \setminus N(x)]$. Данное рекурсивное правило основано на справедливости очевидного равенства $\alpha(G) = \max(\alpha(G_1), \alpha(G_2))$. К сожалению, в общем случае этот процесс не является полиномиальным по времени, но иногда применение идеи ветвления (по удачно выбираемой вершине) действительно приводит к созданию эффективных алгоритмов. Так, в [4] показано, что для любого графа $G \in \mathcal{F}ree(\{P_5, C_5\})$ существует такая вершина x, что кликовое число графа G_2 меньше, чем аналогичный параметр для графа G. Это сразу же приводит к возможности решения задачи НМ за полиномиальное время для графов из $\mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, K_p\})$ при любом фиксированном p. Другой (более общий) пример удачного использования ветвления состоит в выборе такой вершины x, что хотя бы один из графов G_1 и G_2 принадлежит заранее выбранному случаю полиномиальной разрешимости задачи НМ. По аналогии с доказательством теоремы 3 из [4] нетрудно доказать, что в данном случае временна́я сложность ветвления также полиномиальна. Удачный выбор вершины для ветвления позволяет доказать одно из основных утверждений настоящей работы. Именно, что

для любого p преобразование $\{P_5, C_5, H\} \to \{P_5, C_5, H \circ \overline{K}_2, H \oplus K_{1,p}\}$ является расширяющим оператором при дополнительном условии связности графа H.

Пусть G — связный граф класса $\mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, H \circ \overline{K}_2, H \oplus K_{1,p}\})$. Можно считать, что G не содержит смежно поглощающих вершин. Поскольку при любом s класс $\mathcal{F}ree(\{P_5, K_{1,s}\})$ НМ-прост [18], можно также считать, что граф G содержит $K_{1,p+1}$ в качестве порождённого подграфа. По лемме 1 существует центральная вершина x графа G (радиуса не более чем 2), для которой $N(x)$ содержит $p+1$ независимых вершин $y_1, y_2, \ldots, y_{p+1}$. Для каждой вершины $y \in N(x)$ через $N'(y)$ обозначим множество $N(y) \setminus (N(x) \cup \{x\})$. Поскольку G не содержит смежно поглощающих вершин, для любого такого y множество $N'(y)$ непусто. На множестве вершин $N(x)$ введём отношение квазипорядка R следующим образом: $uRv \Leftrightarrow N'(u) \subseteq N'(v)$.

В [4, лемма 2] доказано, что если граф класса $\mathcal{F}ree(\{P_5, C_5\})$ содержит порождённый вершинами a, b, c (в указанном порядке) подграф P_3, то в этом графе либо $N(a) \setminus N(b) \subseteq N(c)$, либо $N(c) \setminus N(b) \subseteq N(a)$. Это означает, что квазипорядок R на $A = \{y_1, y_2, \ldots, y_{p+1}\}$ линейный. Поэтому существует такая вершина $y^* \in A$, что $N'(y') \subseteq N'(y^*)$ для любой $y' \in A$. Рассмотрим квазипорядок R на $\{y \in N(x) \mid N'(y^*) \subseteq N'(y)\}$. На этом множестве R не обязательно линейный, но обязательно имеет максимальный элемент y_1. Ясно, что для любой не смежной с y_1 вершины $y \in N(x)$ выполнено включение $N'(y) \subseteq N'(y_1)$, причём строгое, если $G[N'(y_1)] \in \mathcal{F}ree(\{H\})$ (множество $B = N(x) \setminus (N(y_1) \cup \{y_1\})$ обязательно непусто, так как иначе y_1 — смежно поглощающая вершина).

Обозначим через C множество вершин G, отстоящих от y_1 на расстояние 2 и не принадлежащих множеству $N(x) \cup N(y_1)$.

Лемма 4. *Граф $G[C]$ принадлежит классу $\mathcal{F}ree(\{H\})$.*

Доказательство. Если $C = \varnothing$, то утверждение очевидно. Если множество C непусто, то никакая вершина из C не является смежной ни с какой вершиной из $A \cup B$ (так как для любой вершины $y \in A \cup B$ имеет место включение $N'(y) \subseteq N'(y_1)$). Поэтому $G[C] \in \mathcal{F}ree(\{H\})$, поскольку в противном случае некоторые вершины из C, любые p вершин из A и вершина x порождают в G подграф $H \oplus K_{1,p}$. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Если существуют смежные вершины $z_1 \in C$ и $z_2 \in N'(y_1)$, то $G[B] \in \mathcal{F}ree(\{H\})$.*

Доказательство. Каждая из вершин множества B смежна с z_2, поскольку существование не смежной с z_2 вершины $y \in B$ означает, что

вершины y, x, y_1, z_2, z_1 порождают P_5 (напомним, что $(y, z_1) \notin E(G)$). Значит, $G[B] \in \mathcal{F}ree(\{H\})$, поскольку в противном случае некоторые вершины из B и вершины x, z_2 порождают в G подграф $H \circ \overline{K}_2$. Лемма 5 доказана.

Рассмотрим вершину y_2 — максимальный элемент множества B относительно порядка R. Ясно, что $G[N'(y_2)] \in \mathcal{F}ree(\{H\})$ и что если $G[N'(y_1)] \notin \mathcal{F}ree(\{H\})$, то $N'(y_2) \subset N'(y_1)$. Понятно также, что для любой вершины $y \in B \setminus (A \cup N(y_2))$ справедливо включение $N'(y) \subseteq N'(y_2)$. Обозначим через D множество $N'(y_1) \setminus N'(y_2)$. В лемме 6 предполагается, что D непусто.

Лемма 6. *Если $G[B \setminus A] \notin \mathcal{F}ree(\{H\}), E(G[N'(y_2)]) \times E(G[D]) \nsubseteq E(G)$ или $E(G[N'(y_2)]) \times E(G[D]) \subseteq E(G)$ и $G[N'(y_2)]$ не является полным, то $G[N'(y_1)] \in \mathcal{F}ree(\{H\}) \star \mathcal{F}ree(\{H\})$.*

Доказательство. Сначала докажем, что каждая вершина из $N'(y_2)$ либо смежна с каждой вершиной из D, либо не смежна ни с одной такой вершиной. Предположим напротив, что существует $z_1 \in N'(y_2)$, смежная с вершиной $z_2 \in D$ и не смежная с $z_3 \in D$. Заметим, что каждая не смежная с y_2 вершина $y \in B \setminus A$ смежна с вершиной z_1, так как в противном случае граф G содержит порождённый вершинами y, x, y_2, z_1, z_2 подграф P_5. Вместе с тем, каждая вершина y' из $N(y_2) \cap (B \setminus A)$ должна быть смежна с z_1, поскольку в противном случае граф G содержит порождённый вершинами y', y_2, z_1, y_1, z_3 подграф P_5 (если $(y', z_3) \notin E(G)$) или подграф C_5 (если $(y', z_3) \in E(G)$). Значит, каждая из вершин множества $B \setminus A$ одновременно смежна как с x, так и с z_1. Но так как G не содержит порождённого подграфа $H \circ \overline{K}_2$, граф $G[B \setminus A]$ не содержит порождённого подграфа H; противоречие с условием леммы. Поэтому предположение о существовании вершин z_1, z_2, z_3 неверно.

Пусть существует вершина $a \in N'(y_2)$, не смежная ни с одной вершиной из D. Из вышеприведённых рассуждений следует, что a смежна сразу со всеми вершинами из $N(y_2) \cap (B \setminus A)$. Так как граф $G[N(y_2) \cap (B \setminus A)]$ не принадлежит классу $\mathcal{F}ree(\{H\})$, а граф $G[B \setminus A]$ ему принадлежит, из связности H следует существование двух смежных вершин $b \in N(y_2) \cap (B \setminus A)$ и $c \in B \setminus A$ таких, что $(a, b) \in E(G)$ и $(a, c) \notin E(G)$. Тогда вершина b должна быть смежна сразу со всеми вершинами из D, иначе в графе G есть порождённый вершинами c, b, a, y_1 и некоторой вершиной из D подграф P_5. Поэтому $G[D] \in \mathcal{F}ree(\{H\})$, так как все вершины из D одновременно смежны с несмежными вершинами b и y_1. Значит, $G[N'(y_1)] \in \mathcal{F}ree(\{H\}) \star \mathcal{F}ree(\{H\})$.

Пусть $E(G[N'(y_2)]) \times E(G[D]) \subseteq E(G)$ и граф $G[N'(y_2)]$ неполный. То-

гда существуют две несмежные вершины u и v, одновременно смежные со всеми вершинами из D. Тем самым граф $G[D]$ не содержит H в качестве порождённого подграфа. Отсюда и из доказанного выше следует, что $G[N'(y_1)]$ принадлежит композиции классов $\mathcal{F}ree(\{H\})$ и $\mathcal{F}ree(\{H\})$. Лемма 6 доказана.

Одним из основных результатов настоящей работы является

Теорема 2. *Если класс $\mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, H\})$ для некоторого связного графа H* НМ-*прост, то класс $\mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, H \circ \overline{K}_2, H \oplus K_{1,p}\})$ для любого p также* НМ-*прост.*

Доказательство. Используем идею ветвления по таким образом выбираемой вершине v текущего графа, что либо его подграф без v, либо его подграф без $N(v)$ принадлежит некоторому НМ-простому расширению класса $\mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, H\})$. Это обеспечивает возможность решения задачи НМ в классе $\mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, H \circ \overline{K}_2, H \oplus K_{1,p}\})$ за полиномиальное время. Можно считать, что текущим является граф $G = (V, E)$ из этого класса, удовлетворяющий всем условиям из начала разд. 3: связность, отсутствие смежно поглощающих вершин и отсутствие принадлежности классу $\mathcal{F}ree(\{K_{1,p+1}\})$. Опишем правила выбора вершины v.

1. Если $G[B \setminus A] \in \mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, H\})$, что проверяется за полиномиальное от числа вершин графа G время, то положим $v = y_1$. В этом случае

$$G[V \setminus N(y_1)] = G[C] \oplus G[(B \setminus A) \cup (A \setminus N(y_1))],$$

а $G[C] \in \mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, H\})$ по лемме 4. Вместе с тем, в графе $G[(B \setminus A) \cup (A \setminus N(y_1))]$ рассмотрим всевозможные независимые подмножества множества $A \setminus N(y_1)$ (которых, очевидно, не более 2^{p+1} штук). Для каждого такого подмножества рассмотрим подграф графа $G[B \setminus A]$, порождённый всевозможными вершинами, не смежными с вершинами из выбранного подмножества. Такой подграф принадлежит классу $\mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, H\})$. Значит, задача НМ для графа $G[V \setminus N(y_1)]$ решается за полиномиальное от числа его вершин время.

2. Если $G[B \setminus A] \notin \mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, H\}), E(G[N'(y_2)]) \times E(G[D]) \nsubseteq E(G)$ или если $G[B \setminus A] \notin \mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, H\}), E(G[N'(y_2)]) \times E(G[D]) \subseteq E(G)$ и граф $G[N'(y_2)]$ неполный, то положим $v = x$. Из леммы 5 следует, что

$$G[V \setminus (N(x) \cup \{x\})] = G[C] \oplus G[N'(y_1)],$$

а $G[C] \in \mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, H\})$ по лемме 4. Если D пусто, то $G[N'(y_1)]$ принадлежит $\mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, H\})$. Если D непусто, то $G[N'(y_1)]$ принадлежит

$\mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, H\})\star\mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, H\})$ (лемма 6). Поэтому из леммы 3 следует, что задача НМ для графа $G[V \setminus N(x)]$ решается за полиномиальное от числа его вершин время.

3. Если $G[B \setminus A] \notin \mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, H\})$, $E(G[N'(y_2)]) \times E(G[D]) \subseteq E(G)$ и $G[N'(y_2)]$ — полный граф, то $\alpha(G) = \alpha(G \setminus \{x\})$ по лемме 2. Таким образом, третий случай сводится к первым двум за счёт удаления избыточной вершины.

Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алексеев В. Е., Таланов В. А.** Графы и алгоритмы. Структуры данных. Модели вычислений. — М.: Интернет-Университет Информационных Технологий; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. — 320 с.
2. **Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.** Лекции по теории графов. — М.: Наука, 1990. — 384 с.
3. **Зыков А. А.** Основы теории графов. — М.: Наука, 1987. — 383 с.
4. **Малышев Д. С.** Полиномиальная разрешимость задачи о независимом множестве в классе графов без порождённых простых пути и цикла с пятью вершинами и большой клики // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2012. — Т. 19, № 3. — С. 58–64.
5. **Малышев Д. С.** Полиномиальная разрешимость задачи о независимом множестве для одного класса графов малого диаметра // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2012. — Т. 19, № 6. — С. 37–48.
6. **Харари Ф.** Теория графов. — М.: Мир, 1982. — 301 с.
7. **Alekseev V. E.** On easy and hard hereditary classes of graphs with respect to the independent set problem // Discrete Appl. Math. — 2004. — Vol. 132. — P. 17–26.
8. **Arbib C., Mosca R.** On $(P_5, diamond)$-free graphs // Discrete Math. — 2002. — Vol. 250. — P. 1–22.
9. **Brandstadt A., Mosca R.** On the structure and stability number of P_5- and co-chair-free graphs // Discrete Appl. Math. — 2003. — Vol. 132. — P. 47–65.
10. **Brandstadt A., Le H.-O., Mosca R.** Chordal co-gem-free and (P_5, gem)-free graphs have bounded clique-width // Discrete Appl. Math. — 2005. — Vol. 145, N 2. — P. 232.
11. **Bondy A., Murty U.** Graph theory. — Heidelberg: Springer-Verl., 2008. — 654 p. (Grad. Texts Math.; Vol. 244).
12. **Chudnovsky M., Robertson N., Seymour P., Thomas R.** The strong perfect graph theorem // Ann. Math. — 2002. — Vol. 164. — P. 51–229.
13. **Diestel R.** Graph theory. — Heidelberg: Springer-Verl., 2010. — 451 p. (Grad. Texts Math.; Vol. 173).
14. **Gerber M., Lozin V.** On the stable set problem in special P_5-free graphs // Discrete Appl. Math. — 2003. — Vol. 125. — P. 215–224.

15. **Grotschel M., Lovasz L., Schrijver A.** Geometric algorithms and combinatorial optimization (algorithms and combinatorics) // Berlin: Springer-Verl., 1993. — 564 p.
16. **Lovasz L.** A characterization of perfect graphs // J. Comb. Theory, Ser. B. — 1972. — Vol. 13. — P. 95–98.
17. **Lozin V., Mosca R.** Maximum independent sets in subclasses of P_5-free graphs // Inf. Process. Lett. — 2009. — Vol. 109, N 6. — P. 319–324.
18. **Mosca R.** Polynomial algorithms for the maximum stable set problem on particular classes of P_5-free graphs // Inf. Process. Lett. — 1997. — Vol. 61, N 3. — P. 137–143.
19. **Mosca R.** Stable sets in certain P_6-free graphs // Discrete Appl. Math. — 1999. — Vol. 92. — P. 177–191.
20. **Mosca R.** Some results on maximum stable sets in certain P_5-free graphs // Discrete Appl. Math. — 2003. — Vol. 132. — P. 175–183.
21. **Mosca R.** Some observations on maximum weight stable sets in certain P_5-free graph // Eur. J. Oper. Res. — 2008. — Vol. 184, N 3. — P. 849–859.
22. **Simone C. D., Mosca R.** Stable set and clique polytopes of (P_5, gem)-free graphs // Discrete Math. — 2007. — Vol. 307, N 22. — P. 2661–2670.

Малышев Дмитрий Сергеевич,
e-mail: dsmalyshev@rambler.ru

Статья поступила
8 февраля 2012 г.

Переработанный вариант —
20 апреля 2012 г.