ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Март—апрель 2013. Том 20, № 2. С. 3–14

УДК 519.178

О ГРАФАХ ДЕЗА С ПАРАМЕТРАМИ ГРАФОВ, ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ К ТРЕУГОЛЬНЫМ И РЕШЁТЧАТЫМ *)

С. В. Горяинов, Л. В. Шалагинов

Аннотация. Рассматриваются точные графы Деза, полученные из графов, дополнительных к треугольным и решётчатым, графам Чанга и графу Шрикханде, с помощью их автоморфизмов порядка два. Показано, что эти графы определяются параметрами и строением окрестностей в классе точных графов Деза.

Ключевые слова: граф Деза, инволютивный автоморфизм.

Введение

Все рассматриваемые графы неориентированные, без петель и кратных рёбер. *Окрестностью вершины u в графе G* будем называть подграф, индуцированный на вершинах, смежных с u в графе G, и обозначаемый через $[u]$.

Сильно регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ) назовём v-вершинный регулярный граф степени k такой, что любая пара его смежных вершин имеет λ общих соседей, а любая пара несмежных вершин — μ соседей.

Важными вопросами теории сильно регулярных графов являются нахождение необходимых условий существования и построение сильно регулярных графов с заданным набором параметров, а также задача характеризации этих графов [5]. Например, в [11] доказано, что решётчатые $(n \times n)$-графы $L(n)$ (определение см. ниже) определяются набором своих параметров при $n \neq 4$, а в [6, 10] показано, что треугольные графы $T(n)$ определяются набором своих параметров при $n \neq 8$.

Рёберным графом графа G называется граф $L(G)$, множеством вершин которого является множество рёбер графа G, и его две вершины смежны, если соответствующие рёбра в G имеют общую вершину.

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта Президента РФ для молодых учёных (проект МК–938.2011.1).

Решётчатым графом называется рёберный граф полного двудольного графа $K_{m,n}$. В случае равных долей исходного графа (число вершин в каждой доле равно n) решётчатый граф является сильно регулярным с параметрами $(n^2, 2(n-1), n-2, 2)$ и обозначается через $L(n)$.

Графом Шрикханде называется сильно регулярный граф с параметрами $(16, 6, 2, 2)$, не являющийся решётчатым.

Треугольным графом называется рёберный граф полного графа. Треугольный граф, обозначаемый через $T(n)$, сильно регулярный с параметрами $\left(\binom{n}{2}, 2(n-2), n-2, 4\right)$, где n — число вершин в исходном полном графе.

Дополнительным к G *графом* называется граф $\overline{G}$, множество вершин которого совпадает с множеством вершин G, и две вершины смежны в $\overline{G}$ тогда и только тогда, когда они не смежны в G.

Очевидно, что граф, дополнительный к сильно регулярному графу, тоже сильно регулярный. Графы, дополнительные к $L(n)$ и $T(n)$, обозначим через $\overline{L}(n)$ и $\overline{T}(n)$ соответственно. Граф $\overline{L}(n)$ сильно регулярный с параметрами $(n^2, (n-1)^2, (n-2)(n-1), (n-2)^2)$, а $\overline{T}(n)$ — с параметрами $\left(\binom{n}{2}, \binom{n-2}{2}, \binom{n-3}{2}, \binom{n-4}{2}\right)$.

В [7] рассмотрен класс регулярных графов, в которых число общих соседей любой пары различных вершин принимает одно из двух возможных значений, но не определяется смежностью этих вершин. Такие графы естественно рассматривать как обобщения сильно регулярных графов. Этот класс графов назван *графами Деза.*

Графом Деза с параметрами (v, k, b, a), где $b \geqslant a$, называется v-вершинный граф, у которого степень каждой вершины равна k и любые две различные вершины имеют a или b общих соседей.

В зависимости от параметров графы Деза можно разделить на три класса: сильно регулярные (число общих соседей любых двух вершин определяется их смежностью); графы диаметра больше 2 (в этом случае $a = 0$); все остальные графы, которые называют *точными графами Деза.*

Некоторые свойства графов Деза изучены в [8], где предложено несколько способов построения точных графов Деза: из сильно регулярных графов с помощью автоморфизма порядка два, переставляющего только несмежные вершины, с помощью разностных множеств в группе и склеиванием классов в схемах отношений.

Для получения графов Деза из сильно регулярных графов нам понадобится следующая конструкция.

Теорема 1 [8]. *Пусть* G *— сильно регулярный граф с параметрами* (v, k, λ, μ), $k \neq \mu$, $\lambda \neq \mu$, *и матрицей смежности* M, P *— перестановоч-*

ная матрица размера $v \times v$. Матрица PM является матрицей смежности графа Деза G' с параметрами $(v, k, \max\{\lambda, \mu\}, \min\{\lambda, \mu\})$ тогда и только тогда, когда P задаёт инволютивный автоморфизм G, переставляющий только несмежные вершины. Кроме того, G' — точный граф Деза в том и только том случае, когда $P \neq I$, $\lambda \neq 0$ и $\mu \neq 0$.

В свете упомянутых результатов по характеризации $L(n)$ и $T(n)$ представляет интерес вопрос характеризации графов Деза, полученных из $L(n)$ и $T(n)$.

В $[2, 3]$ получены характеризации по параметрам и строению окрестностей графов Деза, построенных из треугольных и решётчатых графов с помощью автоморфизмов порядка 2, переставляющих несмежные вершины.

В данной статье рассмотрены графы, получаемые с помощью аналогичной конструкции из сильно регулярных графов, дополнительных к треугольному и решётчатому графам. Найдены все подходящие автоморфизмы этих сильно регулярных графов и доказано, что полученные графы Деза однозначно определяются своими параметрами и строением окрестностей вершин.

Заметим, что автоморфизмы графов $\overline{L}(n)$ и $\overline{T}(n)$, удовлетворяющие условиям теоремы 1, не связаны напрямую с аналогичными автоморфизмами графов $L(n)$ и $T(n)$, поэтому результаты по их характеризации не следуют из предыдущих.

Введём нумерацию вершин графов $T(n)$ и $L(n)$. Занумеруем вершины полного графа числами от 1 до n. Тогда вершинам $T(n)$ будут соответствовать неупорядоченные пары чисел $\{i, j\}$, где $i \neq j$, и вершина $\{i, j\}$ смежна с вершиной $\{k, l\}$ тогда и только тогда, когда $|\{i, j\} \cap \{k, l\}| = 1$. Занумеруем вершины каждой доли $K_{n,n}$ числами от 1 до n. Тогда вершинам $L(n)$ соответствуют упорядоченные пары чисел (i, j), где i, j меняются от 1 до n, и вершина (i, j) смежна с вершиной (k, l) тогда и только тогда, когда $i = k$ или $j = l$. Вершины, имеющие первую общую координату, будем называть *строками*, а вершины, имеющие вторую общую координату, — *столбцами*. Вершины дополнительных графов будем нумеровать так же. В дальнейшем будем считать вершины соответствующих графов занумерованными указанным образом.

Пусть F — некоторое множество графов. Будем называть G *локально F-графом*, если окрестность каждой его вершины изоморфна некоторому графу из множества F, причём для каждого графа H из F существует вершина графа G, окрестность которой изоморфна H.

1. Графы Деза с параметрами $\overline{T}(n)$

К сильно регулярным графам с параметрами $\left(\binom{n}{2}, 2(n-2), n-2, 4\right)$ относятся треугольные графы и три графа Чанга (при $n = 8$). В данной статье рассмотрим автоморфизмы этих графов и покажем, что графы Деза, полученные из них, однозначно определяются своими параметрами и строением окрестностей вершин в классе графов Деза.

Предложение 1. *Для графа $\overline{T}(n)$ с точностью до нумерации вершин существует единственный автоморфизм порядка* 2*, удовлетворяющий условию теоремы* 1.

Доказательство. Очевидно, что каждому подходящему автоморфизму графа $\overline{T}(n)$ соответствует автоморфизм $T(n)$. Рассмотрим действие этого автоморфизма на $T(n)$. Так как в $\overline{T}(n)$ он переставляет только пары несмежных вершин, в $T(n)$ он переставляет смежные вершины. Максимальный полный подграф под действием автоморфизма переходит в максимальный полный подграф. (В дальнейшем, говоря полный подграф, будем всегда иметь в виду максимальный полный подграф, если не оговорено противное). Полный подграф в $T(n)$ образуют вершины, в обозначении которых есть общее число, например $\{i,1\}, \{i,2\}, \ldots, \{i,i-1\}, \{i,i+1\}, \ldots, \{i,n\}$. Будем обозначать его через $K(i)$, причём подграфами такого вида при $i = 1, \ldots, n$ исчерпываются все полные подграфы в $T(n)$.

Каждый полный подграф либо переходит в полный подграф, либо остаётся на месте. Если автоморфизм не тривиальный, то найдутся два полных подграфа, которые переходят друг в друга. Можно считать, что это подграфы $K(1)$ и $K(2)$. Так как любая пара полных подграфов имеет ровно одну общую вершину, общая вершина $K(1)$ и $K(2)$ — вершина $\{1,2\}$ — остаётся неподвижной. Каждая вершина $\{i,1\}$ подграфа $K(1)$ имеет ровно 1 смежную с ней вершину $\{i,2\}$ в подграфе $K(2)$. Следовательно, автоморфизм переставляет именно эти вершины. Тогда в каждом подграфе $K(i)$, где $i \neq 1,2$, вершины $\{i,1\}$ и $\{i,2\}$ переходят друг в друга, а значит, и весь подграф переходит сам в себя. Каждая вершина $\{i,j\}$, где $i,j \neq 1,2$, лежит в подграфе $K(i)$ и в подграфе $K(j)$, каждый из которых неподвижен, следовательно, и сама вершина $\{i,j\}$ остаётся неподвижной. Таким образом, в $T(n)$ с точностью до нумерации вершин существует только один нетривиальный автоморфизм, удовлетворяющий условиям утверждения. Предложение 1 доказано.

Обозначим этот автоморфизм через Ψ, а полученный граф Деза — через $\Psi\overline{T}(n)$.

Лемма 1. *Граф $\Psi\overline{T}(n)$ является графом Деза с параметрами $\left(\binom{n}{2}, \binom{n-2}{2}, \binom{n-3}{2}, \binom{n-4}{2}\right)$ и имеет следующие окрестности вершин.*

(i) *Окрестность вершины $\{1,2\}$ изоморфна $\overline{T}(n-2)$.*

(ii) *В окрестности вершин $\{i,1\}$, $i = 3,\ldots,n$, добавятся рёбра, попарно соединяющие вершины $\{j,2\}$, $j = 3,\ldots,n$, а в окрестности вершины $\{i,2\}$ добавятся рёбра, попарно соединяющие вершины $\{j,1\}$, $j = 3,\ldots,n$. Таким образом, окрестности вершин $\{i,1\}$ и $\{i,2\}$, $i = 3,\ldots,n$, изоморфны графу, полученному из $\overline{T}(n-2)$ добавлением рёбер, попарно соединяющих вершины $\{j,1\}$, $j = 2,\ldots,n-2$.*

(iii) *Окрестности остальных вершин изоморфны графу, полученному из $\overline{T}(n-2)$ добавлением рёбер, попарно соединяющих вершины $\{i,1\}$, $i = 3,\ldots,n$, и рёбер, попарно соединяющих вершины $\{i,2\}$, $i = 3,\ldots,n$.*

Обозначим эти графы через F_1, F_2 и F_3 соответственно, и пусть $F = \{F_1, F_2, F_3\}$.

Доказательство проводится рассмотрением смежностей вершин в графе.

Теорема 2. *Локально F-граф Деза с параметрами $\left(\binom{n}{2}, \binom{n-2}{2}, \binom{n-3}{2}, \binom{n-4}{2}\right)$, где F определена в лемме 1, изоморфен графу $\Psi\overline{T}(n)$ при $n \neq 7$, 8.*

Доказательство. При $n = 4$ граф $\overline{T}(n)$ — паросочетание из трёх рёбер, и параметры a и b равны 0. При $n = 5$ $\overline{T}(n)$ является графом Петерсена и имеет параметры $(10,3,0,1)$, и граф Деза с такими параметрами имеет диаметр > 2. В случае $n = 6$ граф $\overline{T}(n)$ имеет параметры $(15,6,3,1)$, в [3] найден единственный точный граф Деза с такими параметрами — граф $\Psi\overline{T}(6)$. Случаи $n = 7, 8$ будут рассмотрены ниже.

Пусть теперь $n \geqslant 9$. Рассмотрим вершину, окрестность которой изоморфна F_3, и обозначим её через $\{n-1,n\}$, а вершины её окрестности обозначим, как в $\overline{T}(n-2)$, через

$$\{1,2\},\{1,3\},\ldots,\{1,n-2\},\{2,3\},\ldots,\{2,n-2\},\ldots,\{n-3,n-2\}.$$

Рассмотрим теперь граф $H = [\{n-1,n\}] \cap [\{n-3,n-2\}]$. Дополнительный к нему граф $\overline{H}$ содержит в качестве подграфа $K_{n-6,n-6}$, порождённый вершинами $\{1,3\},\ldots,\{1,n-4\}$ и $\{2,3\},\ldots,\{2,n-4\}$, а графы $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$ его не содержат. Следовательно, граф $[\{n-3,n-2\}]$ изоморфен F_3. В окрестности $\{n-3,n-2\}$ каждая из двух клик $\{\{1,3\},\{1,4\},\ldots,\{1,n-4\}\}$ и $\{\{2,3\},\{2,4\},\ldots,\{2,n-4\}\}$ в графе $\Psi\overline{T}(n)$ дополняется ещё двумя вершинами. Обозначим эти вершины через $\{1,n-1\},\{1,n\}$ и $\{2,n-1\},\{2,n\}$ соответственно. Остальные вершины окрестности $\{n-3,n-2\}$ обозначим так же, как в графе $\Psi\overline{T}(n)$, что возможно, поскольку окрестность вершины $\{n-3,n-2\}$ в $\Psi\overline{T}(n)$ изоморфна графу F_3.

Теперь из рассмотрения окрестности вершины $\{1,2\}$, которая изоморфна F_1, можно восстановить смежности между вершинами

$$\{3,n-3\},\{4,n-3\},\{n-4,n-3\}; \quad \{3,n-2\},\{4,n-2\},\{n-3,n-2\};$$

$$\{3,n-1\},\{4,n-1\},\{n-2,n-1\}; \quad \{3,n\},\{4,n\},\{n-1,n\}.$$

И, наконец, из рассмотрения окрестности вершины $\{3,4\}$ можно восстановить оставшиеся смежности в графе. Таким образом, все смежности в этом графе восстановлены и совпадают со смежностями вершин в графе $\Psi\overline{T}(n)$. Теорема 2 доказана.

Пусть G — граф, H — подмножество его вершин, $H' = G \setminus H$. Введём операцию переключения графа G относительно H. Результат этой операции — новый граф, вершины u и v которого смежны тогда и только тогда, когда $u, v \in H$ или $u, v \in H'$ и u смежна с v в графе G, или $u \in H, v \in H'$ и u не смежна с v в графе G.

Обозначим графы Чанга в соответствии с множеством, относительно которого производится переключение графа $T(8)$, и будем считать их занумерованными так же, как $T(n)$:

$T'(8)$ — граф, полученный переключением относительно множества $\{\{i, 9-i\} \mid 1 \leqslant i \leqslant 4\}$;

$T''(8)$ — граф, полученный переключением относительно множества $\{\{i, i+1\} \mid 1 \leqslant i \leqslant 7\} \cup \{\{1,8\}\}$;

$T'''(8)$ — граф, полученный переключением относительно множества $\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{4,5\},\{5,6\},\{6,7\},\{7,8\},\{4,8\}\}$.

Предложение 2. *Существует единственный с точностью до нумерации вершин автоморфизм графа $\overline{T}'(8)$, удовлетворяющий условию теоремы* 1.

Доказательство. Рассмотрим биекцию $\overline{\Psi}'$ графа $\overline{T}'(8)$ на себя такую, что

$$\overline{\Psi}'(\{i,j\}) = \begin{cases} \{j, 9-i\}, & 2 \leqslant j \leqslant 7,\ i = 1; \\ \{i,j\} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Легко понять, что $\overline{\Psi}'$ — автоморфизм графа $\overline{T}'(8)$, удовлетворяющий условию теоремы 1.

Покажем, что других таких автоморфизмов не существует. Вершины $\{\{i, 9-i\} \mid 1 \leqslant i \leqslant 4\}$ имеют окрестности, отличные от остальных, и попарно не смежны. Следовательно, они неподвижны при любом автоморфизме. Выберем из этих вершин две, пересечение окрестностей которых

не является поточечно неподвижным. Пусть это вершины $\{4,5\}$ и $\{3,6\}$: $[\{4,5\}] \cap [\{3,6\}] = \{\{1,2\},\{1,7\},\{2,8\},\{7,8\}\}$. Так как автоморфизм переставляет только смежные вершины графа $T'(8)$, либо $\{1,2\}$ переходит в $\{2,8\}$ и $\{1,7\}$ — в $\{7,8\}$, либо $\{1,2\}$ — в $\{1,7\}$ и $\{2,8\}$ — в $\{7,8\}$. В первом случае подграфы $K(2)$ и $K(7)$ неподвижны как множества, а весь подграф $K(1)$ переходит в подграф $K(8)$. Во втором случае подграфы $K(1)$ и $K(8)$ неподвижны как множества, а весь подграф $K(2)$ переходит в подграф $K(7)$. Таким образом, второй случай получается из первого перенумерацией вершин, т. е. достаточно рассмотреть только первый случай. Если подграф $K(1)$ переходит в подграф $K(8)$, то все остальные подграфы неподвижны как множества, а значит, за исключением вершин пересечения с подграфами $K(1)$ и $K(8)$, поточечно неподвижны. Следовательно, существует единственный с точностью до нумерации вершин автоморфизм графа $\overline{T}'(8)$, удовлетворяющий условию теоремы 1. Предложение 2 доказано.

Предложение 3. *Не существует автоморфизмов графа* $\overline{T}''(8)$, *удовлетворяющих условию теоремы* 1.

Доказательство. Вершины $\{\{i,i+1\} \mid 1 \leqslant i \leqslant 7\} \cup \{\{1,8\}\}$ индуцируют цикл длины 8 в $T''(8)$ и имеют окрестности, отличные от остальных, т. е. могут переходить под действием автоморфизма только друг в друга. Но цикл из восьми вершин не имеет инволютивных автоморфизмов, переставляющих смежные вершины, а значит, все вершины неподвижны. Рассматривая пересечения окрестностей этих вершин, увидим что все вершины графа неподвижны. Предложение 3 доказано.

Предложение 4. *Существует единственный с точностью до нумерации вершин автоморфизм графа* $\overline{T}'''(8)$, *удовлетворяющий условию теоремы* 1.

Доказательство. Вершины $\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{4,5\},\{5,6\},\{6,7\},$ $\{7,8\},\{4,8\}\}$ имеют окрестности, отличные от остальных, следовательно, переходят друг в друга под действием автомофизма. Они образуют граф $K_3 \cup C_5$, который имеет единственный с точностью до нумерации вершин инволютивный автоморфизм, переставляющий смежные вершины. Обозначим этот автоморфизм через $\overline{\Psi}'''$:

$$\overline{\Psi}'''(\{i,j\}) = \begin{cases} \{1,3\} & \text{при } i=2,\ j=3; \\ \{2,3\} & \text{при } i=1,\ j=3; \\ \{i,j\} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Этот автоморфизм переставляет подграфы 1 и 2 графа $\overline{T}'''(8)$ и остав-

ляет на месте все остальные вершины графа.

Таким образом, осталось рассмотреть графы, дополнительные к графам Чанга и $T(n)$ при $n = 7, 8$. Характеризация соответствующих графов Деза получена с помощью компьютера. Далее рассматривается характеризация графа Деза, полученного из $\overline{T}(n)$ при $n = 7$. Для $n = 8$ и дополнительных графов к графам Чанга производились аналогичные рассуждения. Была написана программа перебора матриц смежности с фиксированной подматрицей, отвечающей окрестности вершины соответствующего графа. В частности, для графа $\Psi\overline{T}(7)$ перебирались все симметричные $(0, 1)$-матрицы размера 21×21 с нулевой главной диагональю, у которых верхний левый угол занимает матрица смежности подграфа, порождённого вершиной $\{6,7\}$ и её окрестностью. Эта вершина имеет окрестность (iii) (см. лемму 1). Программа перебирала оставшуюся часть матрицы и отбирала матрицы, соответствующие графу Деза, имеющему окрестность вершины $\{6,7\}$ в качестве подграфа. Таких графов оказалось 8640. С другой стороны, можно найти число помеченных графов, получающихся из графа $\Psi\overline{T}(7)$ перенумерацией вершин вне окрестности вершины $\{6,7\}$. Найдём количество таких перенумераций: сначала из 10 вершин фиксируем 6 смежных с вершиной $\{1,2\}$, далее из них выбираем 2 вершины, смежные с $\{3,4\}$, и 2 вершины, смежные с $\{3,5\}$, из оставшихся 4 вершин берём 2 смежные с $\{1,3\}$. После этого вершины вне окрестности $\{6,7\}$ распадаются на пять пар, в одной паре вершины нумеруются произвольно, а в остальных — 2^4 способами. Итого $\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{2}2^4 = 8640$. Отсюда следует, что все найденные графы Деза с фиксированным подграфом изоморфны $\Psi\overline{T}(7)$. Для остальных графов получены аналогичные результаты. Предложение 4 доказано.

2. Графы Деза, полученные из $\overline{L}(n)$

К сильно регулярным графам с параметрами $(n^2, 2(n-1), n-2, 2)$ помимо самих решётчатых графов относится также граф Шрикханде, имеющий параметры $(16, 6, 2, 2)$. Из графа Шрикханде нельзя получить точного графа Деза в силу того, что параметры a и b будут совпадать и граф будет сильно регулярным. Дополнительный граф к графу Шрикханде также является сильно регулярным и имеет параметры $(n^2, (n-1)^2, (n-1)(n-2), (n-2)^2)$, совпадающие с параметрами $\overline{L}(n)$. Покажем, что из графа, дополнительного к графу Шрикханде, также нельзя получить точный граф Деза.

Предложение 5. *Не существует автоморфизмов графа, дополнительного к графу Шрикханде, удовлетворяющих условию теоремы* 1.

Доказательство. Автоморфизм дополнения к графу Шрикханде, переставляющий несмежные вершины, в самом графе Шрикханде переставляет смежные вершины. Пусть смежные вершины a и b переходят друг в друга под действием искомого автоморфизма. Так как окрестностью вершины в графе Шрикханде является шестиугольник, общие соседи вершин a и b (пара несмежных вершин) остаются неподвижны. Рассмотрим окрестность одной из них. Вершины a и b переходят друг в друга, следовательно, смежные с ними вершины переходят друг в друга, но они несмежны в шестиугольнике; противоречие. Предложение 5 доказано.

Далее рассмотрим автоморфизмы графов, дополнительных к решётчатым, и покажем, что полученные из них графы Деза однозначно определяются своими параметрами и строением окрестностей в классе графов Деза.

Предложение 6. *Для графа $\overline{L}(n)$ с точностью до нумерации вершин существует $[n/2]$ автоморфизмов, удовлетворяющих условию теоремы* 1.

Доказательство. Очевидно, что автоморфизму графа $\overline{L}(n)$ соответствует автоморфизм графа $L(n)$. Будем рассматривать действие этого автоморфизма на графе $L(n)$, в этом графе он переставляет пары смежных вершин. Если автоморфизм не тривиальный, то найдётся сдвигаемая вершина. Каждая сдвигаемая вершина переходит либо в вершину своей строки, либо — своего столбца. Перенумеруем вершины так, что эти вершины будут иметь номера $(1,1)$ и $(1,2)$. Так как полный подграф переходит в полный подграф, первый столбец останется на месте, а первая строка меняется местами со второй. Но для каждой вершины первой строки есть только одна смежная с ней во второй строке, для вершины $(1,i)$ — вершина $(2,i)$ для всех i. Значит, все столбцы остаются на месте. Аналогично могут переставляться и другие пары строк. Таким образом, каждый автоморфизм графа $L(n)$ переставляет от 1 до $[n/2]$ пар строк, и всего таких автоморфизмов $[n/2]$. Обозначим через Φ_i автоморфизм, переставляющий точно i пар строк. Полученный граф Деза обозначим через $\Phi_i\overline{L}(n)$. Предложение 6 доказано.

В данной работе ограничимся рассмотрением автоморфизма Φ_1.

Лемма 2. *Граф $\Phi_1\overline{L}(n)$ является графом Деза с параметрами*

$$(n^2, (n-1)^2, (n-1)(n-2), (n-2)^2)$$

и имеет следующие окрестности вершин.

(i) *Окрестности неподвижных вершин изоморфны графу, полученному из* $\overline{L}(n-1)$ *заменой двух строк кликами. Они являются регулярным графом.*

(ii) *Окрестности сдвигаемых вершин изоморфны графу, полученному из* $\overline{L}(n-1)$ *заменой одной строки кликой.*

Обозначим эти графы через F_1 *и* F_2 *соответственно, и пусть* $F = \{F_1, F_2\}$.

Доказательство проводится рассмотрением смежностей вершин в графе.

Теорема 3. *Локально* F*-граф Деза с параметрами*

$$(n^2, (n-1)^2, (n-1)(n-2), (n-2)^2),$$

где F *определён в лемме 2, изоморфен графу* $\Phi_1\overline{L}(n)$.

Доказательство. При $n = 3$ все графы Деза с таким набором параметров найдены в [8]. Существуют два таких графа, один из них может быть получен указанным способом из $\overline{L}(n)$, у другого окрестности всех вершин изоморфны F_2. В случае $n = 4$ все графы Деза с такими параметрами найдены в [1]. Существуют два таких графа, они могут быть получены с помощью автоморфизмов Φ_1 и Φ_2 из $\overline{L}(n)$.

Пусть теперь $n \geqslant 5$ и G — локально F-граф с параметрами

$$(n^2, (n-1)^2, (n-1)(n-2), (n-2)^2),$$

где F из леммы 2. Рассмотрим вершину, окрестность которой изоморфна F_1. Занумеруем эту вершину (n, n), а вершины $[(n, n)]$ занумеруем, как в исходной решётке до применения автоморфизма: $(1,1), (1,2), \ldots, (1, n-1), (2,1), \ldots, (2, n-1), \ldots, (n-1, 1), \ldots, (n-1, n-1)$. Пересечение окрестностей вершин $(n-1, n-1)$ и (n, n) изоморфно $\Phi_1\overline{L}(n-2)$. Так как этот граф не является подграфом в F_2, окрестность вершины $(n-1, n-1)$ тоже изоморфна F_1. Клики $\{(i,1), \ldots, (i, n-2)\}$, $i = 1, 2$, в окрестности $(n-1, n-1)$ включают в себя ещё по одной вершине, смежной со всеми вершинами (i, j), $i, j = \overline{3, n-2}$. Обозначим эти вершины через $(1, n)$ и $(2, n)$ соответственно. Далее в окрестности $(n-1, n-1)$ найдётся $n-4$ вершины, не смежных с вершинами $(1, n)$ и $(2, n)$, каждая из которых помимо этого не смежна с вершинами ровно одной строки. Обозначим их соответственно номерам этих строк через $(3, n), \ldots, (n-2, n)$. Аналогично для каждого столбца найдётся вершина, не смежная только с вершинами этого столбца. Такие вершины соответственно номерам столбцов обозначим через $(n, 1), \ldots, (n, n-2)$. Из строения окрест-

ности вершины $(1,1)$ легко восстанавливаются смежности на множестве вершин $\{(1,n-1),(1,n),(2,n-1),(2,n),\ldots,(n-3,n-1),(n-3,n);$ $(n-1,1),(n,1),(n-1,2),(n,2),\ldots,(n-1,n-3),(n,n-3)\}$. Также в этой окрестности находятся две последние необозначенные вершины графа. Их можно обозначить через $(1,n-1)$ и $(n-1,n)$, их смежности легко восстанавливаются из окрестности вершины $(1,1)$. Таким образом, все смежности в этом графе восстановлены и совпадают со смежностями вершин в графе $\Phi_1\overline{L}(n)$. Теорема 3 доказана.

Таким образом, доказано, что графы Деза, полученные из графов, дополнительных к треугольным графам и графам Чанга, однозначно определяются своими параметрами и строением окрестностей в классе точных графов Деза. Для графов, полученных из графов, дополнительных к решётчатым, соответствующая характеризация получена для одного из автоморфизмов, а общее число автоморфизмов зависит от числа вершин в графе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Горяинов С. В., Шалагинов Л. В.** О графах Деза на 14, 15 и 16 вершинах // Сиб. электрон. мат. изв. — 2011. — Т. 8. — С. 105–115.
2. **Кабанов В. В., Шалагинов Л. В.** О графах Деза с параметрами решётчатых графов // Тр. ИММ УрО РАН. — 2010. — Т. 3. — С. 117–120.
3. **Шалагинов Л. В.** О графах Деза с параметрами треугольных графов // Тр. ИММ УрО РАН. — 2011. — Т. 1. — С. 294–298.
4. **Bose R. C.** Strongly regular graphs, partial geometries and partially balanced designs // Pacific J. Math. — 1963. — Vol. 13. — P. 389–419.
5. **Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A.** Distance regular graphs. — Berlin: Springer-Verl., 1989. — 495 p.
6. **Chang L. C.** The uniqueness and nonuniqueness of the triangular association scheme // Sci. Record. — 1959. — Vol. 3. — P. 604–613.
7. **Deza M., Deza A.** The ridge graph of the metric polytope and some relatives // Polytopes: abstract, convex, and computational. NATO ASI Ser. — New York: Kluwer Acad., 1994. — P. 359–372.
8. **Erickson M., Fernando S., Haemers W. H., Hardy D., Hemmeter J.** Deza graphs: a generalization of strongly regular graphs // J. Comb. Des. — 1999. — Vol. 7. — P. 359–405.
9. **Higman D. G.** Finite permutations group of rank 3 // Math. Z. — 1964. — Bd 86. — S. 145–156.
10. **Hoffman A. J.** On the uniqueness of the triangular association scheme // Ann. Math. Stat. — 1960. — Vol. 31. — P. 492–497.

11. **Shrikhande S. S.** The uniqueness of the L_2 association scheme // Ann. Math. Stat. — 1959. — Vol. 30. — P. 781–798.

Горяинов Сергей Викторович,
e-mail: 44g@mail.ru
Шалагинов Леонид Викторович,
e-mail: leonidshalaginov@rambler.ru

Статья поступила
10 мая 2012 г.

Переработанный вариант —
27 августа 2012 г.