ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Март—апрель 2013. Том 20, № 2. С. 88–101

УДК 519.71

О МАКСИМАЛЬНЫХ И МИНИМАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ БУЛЕВЫХ СТЕПЕНЕЙ *)

С. С. Марченков

Аннотация. Рассмотрен «самый слабый» вариант алгоритмической сводимости — булева сводимость. Исследованы частично упорядоченные множества $\mathcal{L}_Q$ булевых степеней, отвечающие различным замкнутым классам Q булевых функций. Доказано, что $\mathcal{L}_Q$ не имеют максимальных элементов для многих замкнутых классов Q. Приведены примеры достаточно крупных классов Q, для которых $\mathcal{L}_Q$ содержат континуальное число максимальных элементов. Установлено, что для замкнутых классов T_{01}, SM соответствующие множества степеней имеют континуальное число минимальных элементов.

Ключевые слова: булева сводимость, замкнутый класс булевых функций.

Одним из распространённых способов сравнения «информационной сложности» бесконечных двоичных последовательностей является алгоритмическая сводимость. Обычно выбирают достаточно большой класс $\mathcal{O}$ эффективных операторов и говорят, что *последовательность* α $\mathcal{O}$*-сводится к последовательности* β, если в классе $\mathcal{O}$ существует оператор Φ такой, что $\alpha = \Phi(\beta)$. В качестве класса $\mathcal{O}$ рассматриваются довольно разнообразные совокупности операторов: от операторов перечисления [8] до конечно-автоматных операторов [7].

Для класса операторов $\mathcal{O}$ определяются $\mathcal{O}$*-степени* — множества двоичных последовательностей, $\mathcal{O}$-сводимых друг к другу. $\mathcal{O}$-степени можно рассматривать как множества «информационно эквивалентных» последовательностей по отношению к способу «извлечения» информации, доставляемому операторами класса $\mathcal{O}$. На множестве всех $\mathcal{O}$-степеней вводится частичный порядок, который индуцируется отношением $\mathcal{O}$-сводимости между последовательностями. В результате образуется частично упорядоченное множество $\mathcal{L}_{\mathcal{O}}$ $\mathcal{O}$-степеней, строение которого

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 10–01–00768).

в известной мере характеризует «информационную сложность» двоичных последовательностей.

Обычно частично упорядоченное множество $\mathcal{L}_\mathcal{O}$ представляет собой верхнюю полурешётку, которая не является решёткой. Положение $\mathcal{O}$-степени последовательности α в полурешётке $\mathcal{L}_\mathcal{O}$ может служить мерой «количества информации», содержащегося в α. В большинстве полурешёток $\mathcal{L}_\mathcal{O}$ имеется наименьший элемент. Поскольку классы операторов $\mathcal{O}$ всегда счётны, полурешётки $\mathcal{L}_\mathcal{O}$ не содержат наибольших элементов.

До опубликования работы [2] самым простым классом эффективных операторов являлся класс конечно-автоматных операторов, введённый в [7]. Идея использования конечно-автоматных операторов в качестве сводящих операторов нашла в [2] логическое завершение: на основе булевых функций определён новый класс операторов сведения; в [2] сводимость с помощью булевых функций была названа *булевой*.

Исследования по булевой сводимости, проведённые в [2, 4–6], показали, что она нетривиальна и значительно отличается от известных типов алгоритмической сводимости. Так, например, частично упорядоченные множества $\mathcal{L}_Q$ булевых степеней, отвечающие различным классам Q булевых функций, могут иметь континуальную антицепь как из максимальных [2, 6], так и из минимальных элементов [2, 4]. Вопросы строения частично упорядоченных множеств $\mathcal{L}_Q$ для наиболее важных классов Q булевых функций пока далеки от полного разрешения. И здесь в первую очередь представляют интерес «грубые» классификации множеств $\mathcal{L}_Q$: наличие или отсутствие максимальных и минимальных элементов, существование атомов, возможность построения бесконечных цепей и антицепей и т. п.

В настоящей работе проводятся исследования только по двум направлениям: существование в множествах $\mathcal{L}_Q$ максимальных или минимальных элементов. В теоремах 1–3 показано, что для многих часто встречающихся классов Q булевых функций в множестве $\mathcal{L}_Q$ максимальные элементы отсутствуют. Однако в теореме 4 установлено, что для восьми достаточно широких классов типов I^∞ и O^∞ соответствующие частично упорядоченные множества булевых степеней имеют даже континуальное число максимальных элементов. В теореме 5 континуальность числа минимальных элементов доказана для множеств T_{01}- и SM-степеней.

Дадим необходимые определения. Пусть $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Рассматриваем бесконечные двоичные последовательности α, составленные из нулей и единиц, т. е. отображения $\alpha: \ N \to \{0, 1\}$. Если $i \in N$, то эле-

мент $\alpha(i)$ последовательности α обозначаем через α_i. Таким образом, $\alpha = \alpha_0\alpha_1\ldots$, где $\alpha_i \in \{0,1\}$ при $i \in N$. Если $i \in N$, то через $(\alpha)_i$ обозначаем последовательность $\alpha_i\alpha_{i+1}\ldots$.

Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)$ — булева функция, α и β — двоичные последовательности. Говорим, что функция f *сводит* α к β, если существуют числа $k, l \in N$ такие, что для любого $i \in N$ выполняется соотношение

$$\alpha_{k+i} = f(\beta_{l+i},\ldots,\beta_{l+i+n-1}).$$

В случае, когда $k = l = 0$, говорим, что функция f *стандартно сводит* α к β.

Пусть Q — множество булевых функций. Говорим, что последовательность α *Q-сводится* к последовательности β (обозначение $\alpha \leqslant_Q \beta$), если множество Q содержит функцию f, которая сводит α к β. Последовательности α, β называем *Q-эквивалентными*, если $\alpha \leqslant_Q \beta$ и $\beta \leqslant_Q \alpha$. Совокупность всех последовательностей, Q-эквивалентных последовательности α, образует *Q-степень*, порождённую последовательностью α.

Пусть $\mathcal{L}_Q$ — множество всех Q-степеней. Отношение $\leqslant_Q$ переносим с последовательностей на Q-степени: если a, b — Q-степени, то полагаем $a \leqslant_Q b$, когда $\alpha \leqslant_Q \beta$ для некоторых последовательностей $\alpha \in a$ и $\beta \in b$.

Для того чтобы Q-степень последовательности α содержала последовательность α, а отношение $\leqslant_Q$ определяло на множестве $\mathcal{L}_Q$ частичный порядок, необходимо, чтобы на множестве всех двоичных последовательностей отношение $\leqslant_Q$ было рефлексивным и транзитивным. Свойство рефлексивности отношения $\leqslant_Q$ обеспечивается тем [2], что в множество Q включается какая-либо селекторная функция

$$e_j^n(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_n) = x_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Свойство транзитивности отношения $\leqslant_Q$ обеспечивается замкнутостью множества Q относительно операции суперпозиции специального вида — r-суперпозиции [2]. Говорим, что функция $h(x_1,\ldots,x_{m+n-1})$ получается из функций $f(x_1,\ldots,x_n)$ и $g(x_1,\ldots,x_m)$ с помощью операции *r-суперпозиции*, если

$$h(x_1,\ldots,x_{m+n-1}) = f(g(x_1,\ldots,x_m), g(x_2,\ldots,x_{m+1}),\ldots, g(x_n,\ldots,x_{m+n-1})).$$

Множество функций, замкнутое относительно операции r-суперпозиции, называем *r-замкнутым*. Очевидно, что всякое множество, замкнутое относительно операции суперпозиции, замкнуто также относительно операции r-суперпозиции.

Назовём двоичную последовательность *полной*, если она содержит любое двоичное слово. Очевидно, что в полную последовательность любое двоичное слово входит бесконечное число раз. Двоичную последовательность, не являющуюся полной, будем называть *неполной*.

Далее всюду сложение для булевых функций рассматривается по модулю 2.

Теорема 1. *Пусть Q — r-замкнутое множество булевых функций, содержащее селекторную функцию и функцию $x_1 + x_2 + x_3$, α — полная двоичная последовательность. Тогда Q-степень последовательности α не максимальна в множестве $\mathcal{L}_Q$.*

Доказательство. Определим последовательность $\beta = \beta_0\beta_1\ldots$ следующими соотношениями:

$$\beta_0 = \alpha_0, \quad \beta_1 = \alpha_1, \quad \beta_{i+2} = \beta_i + \beta_{i+1} + \alpha_{i+2} \quad (i = 0, 1, \ldots).$$

Приведём несколько начальных элементов последовательности β:

$$\alpha_0, \quad \alpha_1, \quad \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2, \quad \alpha_0 + \alpha_2 + \alpha_3, \quad \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4,$$

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5, \quad \alpha_0 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_6, \quad \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_6 + \alpha_7.$$

Нетрудно убедиться в том, что последовательность α стандартно сводится к последовательности β функцией $x_1 + x_2 + x_3$.

Предположим, что Q-степень α максимальна в множестве $\mathcal{L}_Q$. Тогда последовательность β Q-сводится к α. Это означает, что найдутся числа $k, l \in N$ и булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ из Q такие, что для любого $i \in N$ выполняется равенство $\beta_{k+i} = f(\alpha_{l+i}, \ldots, \alpha_{l+i+n-1})$. Выписав аналогичные равенства для элементов $\beta_{k+i+1}, \beta_{k+i+2}$ и воспользовавшись определяющим равенством $\beta_{k+i+2} = \beta_{k+i} + \beta_{k+i+1} + \alpha_{k+i+2}$, придём к соотношению

$$f(\alpha_{l+i+2}, \ldots, \alpha_{l+i+n+1}) = f(\alpha_{l+i}, \ldots, \alpha_{l+i+n-1}) + f(\alpha_{l+i+1}, \ldots, \alpha_{l+i+n}) + \alpha_{k+i+2}, \quad (1)$$

которое выполняется при любом i. Поскольку α полная, двоичное слово $\alpha_{l+i}\ldots\alpha_{l+i+n+1}$ при подходящих значениях i может принимать в последовательности α любое из 2^{n+2} возможных значений. Аналогичное утверждение справедливо и для слова $\alpha_{k+i+2}\alpha_{l+i}\ldots\alpha_{l+i+n+1}$, если только число $k+i+2$ не входит в множество $\{l+i, \ldots, l+i+n+1\}$ (в противном случае для некоторого $j \in \{0, 1, \ldots, n+1\}$ элемент α_{k+i+2} всегда равен элементу α_{l+i+j}).

Таким образом, в (1) величины $\alpha_{k+i+2}, \alpha_{l+i}, \ldots, \alpha_{l+i+n+1}$ можно трактовать как «независимые переменные» (с учётом оговорки относительно выполнения неравенств $l \leqslant k+2 \leqslant l+n+1$). Покажем, что при этих допущениях выражение (1) не может быть тождественно истинным. Рассмотрим два случая.

Случай 1: функция f линейна. Пусть s, t — наименьший и наибольший номера существенных переменных функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ (случай $s = t$ не исключается). Тогда в линейной функции (напомним, что выражения $\alpha_{l+i}, \ldots, \alpha_{l+i+n+1}$ рассматриваются как независимые переменные)

$$f(\alpha_{l+i}, \ldots, \alpha_{l+i+n-1}) + f(\alpha_{l+i+1}, \ldots, \alpha_{l+i+n}) + f(\alpha_{l+i+2}, \ldots, \alpha_{l+i+n+1}) \quad (2)$$

существенными непременно будут переменные $\alpha_{l+i+s-1}$ и $\alpha_{l+i+t+1}$. Переменная α_{k+i+2} отлична хотя бы от одной из этих переменных. Поэтому в (1) хотя бы одна из переменных $\alpha_{l+i+s-1}$, $\alpha_{l+i+t+1}$ не сокращается (остаётся существенной переменной этого линейного соотношения). Последнее, очевидно, невозможно.

Случай 2: функция f нелинейна. Пусть s — наименьший номер переменной, входящей хотя бы в одно нелинейное слагаемое полинома Жегалкина функции f. Тогда соответствующее слагаемое с переменной $\alpha_{l+i+s-1}$ будет входить в полином Жегалкина функции $f(\alpha_{l+i}, \ldots, \alpha_{l+i+n-1})$ и, следовательно, в полином Жегалкина функции (2). Это обеспечивает нетождественность равенства (1).

Итак, последовательность β не может Q-сводиться к последовательности α. Значит, Q-степень последовательности α не максимальна в множестве $\mathcal{L}_Q$. Теорема 1 доказана.

Пусть S_{01} обозначает замкнутый класс самодвойственных булевых функций, сохраняющих 0 (здесь и в дальнейшем обозначения замкнутых классов булевых функций даются по работам [1, 3]).

Теорема 2. *Пусть Q — r-замкнутое множество булевых функций, $S_{01} \subseteq Q$ и α — неполная последовательность. Тогда в частично упорядоченном множестве $\mathcal{L}_Q$ выше Q-степени последовательности α расположено континуальное множество Q-степеней.*

Доказательство. Предположим, что в последовательность α не входит слово A длины n. Если $n = 1$ (т. е. A совпадает с одним из символов 0 или 1), то α либо полностью нулевая, либо полностью единичная. В обоих случаях последовательность α определяет минимальную (либо даже наименьшую) Q-степень множества $\mathcal{L}_Q$ [2]. В случае

нулевой последовательности α над Q-степенью α располагается континуальное множество Q-степеней, определяемых последовательностями вида $0^{n_1}10^{n_2}\ldots 0^{n_i}10^{n_{i+1}}\ldots$, где все числа $n_1, n_2, \ldots$ больше нуля. Сводимость α к этим последовательностям обеспечивается функцией $x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$ из класса S_{01}. В случае единичной последовательности α нули и единицы в выписанных последовательностях необходимо поменять местами.

Пусть $n \geqslant 2$. Рассмотрим сначала более простой случай, когда слово A состоит только из единиц, $A = 1^n$. Можно считать, что в α входит как бесконечное число нулей, так и бесконечное число единиц. Тогда существует слово B, начинающееся с единицы, длины n такое, что оно содержит 0 и бесконечное число раз входит в α сразу после символа 0. Среди всех подобных вхождений слова B в α выберем бесконечную подпоследовательность вхождений такую, что расстояния между крайними левыми символами соседних вхождений не менее $3n$, а расстояние от первого символа первого вхождения слова B до начала α — не менее n. Пусть $i_0, i_1, \ldots$ — позиции первой единицы слова B в выбранной подпоследовательности вхождений. Тогда $i_0 \geqslant n$ и при любом $s \geqslant 0$ выполняются соотношения

$$i_{s+1} - i_s \geqslant 3n, \quad \alpha_{i_s}\alpha_{i_s+1}\ldots\alpha_{i_s+n-1} = B.$$

Заменим всюду в α выделенные вхождения слова B словом A (состоящим из n единиц) и обозначим полученную последовательность через β. Покажем, что α сводится к β функцией из класса S_{01}. Определим нужную сводящую функцию $f(x_1, \ldots, x_{2n})$. Пусть $B = b_1b_2\ldots b_n$, где $b_1 = 1$. Для любого m $(0 \leqslant m \leqslant n-1)$ положим

$$f(x_1, \ldots, x_m, 0, 1, \ldots, 1, x_{m+n+2}, \ldots, x_{2n}) = b_{n-m},$$

в остальных случаях пусть $f(x_1, \ldots, x_{n+1}, \ldots, x_{2n}) = x_{n+1}$. Покажем, что $f \in S_{01}$. В самом деле, значения $b_1, b_2, \ldots, b_n$ функция f принимает на любых n наборах вида

$$(c_{11}, \ldots, c_{1,n-1}, 0, 1, \ldots, 1),$$

$$(c_{21}, \ldots, c_{2,n-2}, 0, 1, \ldots, 1, c_{2,n-1}),$$

$$\ldots$$

$$(c_{n-1,1}, 0, 1, \ldots, 1, c_{n-1,2}, \ldots, c_{n-1,n-1}),$$

$$(0, 1, \ldots, 1, c_{n1}, \ldots, c_{n,n-1}),$$

где каждый массив $1, \dots, 1$ состоит из n единиц. Заметим, что в этой таблице нет нулевого и единичного наборов и никакие два различных набора не являются противоположными (у них имеется общая единичная компонента, входящая в единичные массивы длины n). Данное обстоятельство доказывает корректность задания функции f в классе S_{01}.

Покажем, что функция f стандартно сводит последовательность $\alpha_n \alpha_{n+1} \dots$ к β. Ввиду второго пункта («в остальных случаях») определения функции f достаточно рассмотреть лишь значения функции f на наборах $(\beta_j, \beta_{j+1}, \dots, \beta_{j+2n-1})$, которые содержат поднабор $(0, 1, \dots, 1)$ длины $n+1$. Поскольку α не содержит слов A и $i_{s+1} - i_s \geqslant 3n$, каждый из таких наборов образуется в результате замены слова B в α словом A. Поэтому слово $\beta_j \beta_{j+1} \dots \beta_{j+2n-1}$ для некоторого $s \geqslant 0$ имеет вид

$$\alpha_{i_s-m-1} \dots \alpha_{i_s-2} 0 A \alpha_{i_s+n} \dots \alpha_{i_s+2n-m-2},$$

где $0 \leqslant m \leqslant n-1$. Следовательно, по первому пункту определения функции f имеем

$$f(\beta_j, \beta_{j+1}, \dots, \beta_{j+2n-1}) = b_{n-m},$$

т. е. при изменении значения m от $n-1$ до 0 соответствующие значения функции f образуют (слева направо) слово B. В результате функция f даёт все разряды последовательности α, начиная с разряда α_n.

Континуальность множества последовательностей β вытекает из возможности выбора континуальным числом способов последовательности вхождений слова B в α, удовлетворяющей сформулированным выше ограничениям. Поскольку каждая Q-степень состоит из счётного числа последовательностей, над Q-степенью α располагается континуальное множество Q-степеней.

Обратимся теперь к словам A, которые содержат как 0, так и 1. Пусть для определённости слово A начинается символом 1. Ввиду рассмотренного выше случая можно предполагать, что в α бесконечное число раз встречается слово 0^n (как и слово 1^n). Используя это обстоятельство, находим слово B длины n такое, что оно начинается символом 1 и входит в α бесконечное число раз в сочетании $0^n B$. Далее рассматриваем номера первых единиц слов B в выделенных вхождениях слов $0^n B$ в α. Отбираем из них номера $i_0, i_1, \dots$ такие, что

$$i_0 \geqslant 2n, \quad i_{s+1} - i_s \geqslant 4n \ (s \geqslant 0).$$

Определяем последовательность β, заменяя в α блоки

$$B = \alpha_{i_s} \alpha_{i_s+1} \dots \alpha_{i_s+n-1}$$

словом A. Вводим функцию $f(x_1, \ldots, x_{3n})$ из класса S_{01}, которая стандартно сводит последовательность $\alpha_{2n}\alpha_{2n+1}\ldots$ к β. Если

$$A = a_1 a_2 \ldots a_n, \quad B = b_1 b_2 \ldots b_n,$$

то считаем, что функция f на любом наборе вида $(c_1, \ldots, c_n, 0, \ldots, 0, a_1, \ldots, a_n)$ принимает значение b_1, вида $(c_2, \ldots, c_n, 0, \ldots, 0, a_1, a_2, \ldots, a_n, d_1)$ — значение b_2, …, вида $(c_n, 0, \ldots, 0, a_1, \ldots, a_n, d_1, \ldots, d_{n-1})$ — значение b_n. В остальных случаях значение функции $f(x_1, \ldots, x_{2n+1}, \ldots, x_{3n})$ пусть совпадает со значением переменной x_{2n+1}. Оставшиеся детали доказательства вполне аналогичны соответствующим деталям доказательства для случая $A = 1^n$. Теорема 2 доказана.

Пусть T_0, T_1, S, L суть обозначения для множеств всех булевых функций, сохраняющих 0, сохраняющих 1, самодвойственных и линейных соответственно. Положим далее

$$T_{01} = T_0 \cap T_1,\ L_0 = L \cap T_0,\ L_1 = L \cap T_1,\ SL = S \cap L,\ L_{01} = L \cap T_{01}.$$

Теорема 3. *Если Q — один из замкнутых классов*

$$P_2,\ T_0,\ T_1,\ S,\ T_{01},\ S_{01},\ L,\ L_0,\ L_1,\ SL,\ L_{01}, \tag{3}$$

то частично упорядоченное множество $\mathcal{L}_Q$ не имеет максимальных элементов.

Доказательство. Напомним [1, 3], что функция $x_1+x_2+x_3$ образует базис класса L_{01}, все классы ряда (3) целиком содержат L_{01}, а класс S_{01} включает в себя все классы из (3), расположенные в ряду (3) перед S_{01}. Поэтому утверждение теоремы для классов $P_2 - S_{01}$ следует из теорем 1 и 2. Для класса L утверждение теоремы доказано в [6]. Там же по существу имеются все необходимые предпосылки для рассмотрения оставшихся классов L_0, L_1, SL, L_{01}.

Более подробно, пусть α — периодическая последовательность с длиной периода d. Можно считать, что α — чисто периодическая последовательность и $\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{d-1}$ — её период. Рассмотрим чисто периодическую последовательность β с периодом

$$\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{d-1}\overline{\alpha}_0\overline{\alpha}_1\ldots\overline{\alpha}_{d-1}\overline{\alpha}_0\overline{\alpha}_1\ldots\overline{\alpha}_{d-1}$$

($\overline{\alpha}_i$ означает булево отрицание элемента α_i). Легко видеть, что α стандартно сводится к β функцией $x_1 + x_{d+1} + x_{2d+1}$. Вместе с тем β не может L-сводиться к α, поскольку в силу утверждения 1 из [6] длина периода β делила бы нацело длину периода α. Таким образом, если

$L' \in \{L_0, L_1, SL, L_{01}\}$, то никакая периодическая последовательность не может определять в множестве $\mathcal{L}_{L'}$ максимальный элемент.

Обратимся теперь к непериодическим последовательностям α. Образуем по α последовательность β так, как это сделано в доказательстве теоремы 1. Тогда α сводится к β функцией $x_1 + x_2 + x_3$. Вместе с тем в [6] отмечено (следствие 2 из теоремы 1), что в случае непериодичности последовательности α и нетривиальности (существенной зависимости по крайней мере от двух переменных) сводящей функции L-степени последовательностей α и β оказываются различными. Таким образом, и в этом случае α не может определять максимальный элемент множества $\mathcal{L}_{L'}$. Теорема 3 доказана.

Отметим, что отсутствие максимальных элементов в частично упорядоченном множестве $\mathcal{L}_{P_2}$ установлено в [4, 5], а в множестве $\mathcal{L}_L$ — в [6].

Обозначим через I^∞ множество всех булевых функций f, которые удовлетворяют условию: все наборы, на которых функция f равна 1, имеют общую единичную компоненту. Множество I^∞, как известно [1, 3], образует замкнутый класс, а любая функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ при некоторых i, $1 \leqslant i \leqslant n$, и функции g от $n-1$ переменных удовлетворяет тождеству

$$f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = x_i \cdot g(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n). \qquad (4)$$

Положим $I_1^\infty = I^\infty \cap T_1$, $MI^\infty = I^\infty \cap M$, $MI_1^\infty = I_1^\infty \cap M$, где M — замкнутый класс монотонных функций. Двойственным образом определяем замкнутые классы $O^\infty, O_0^\infty, MO^\infty, MO_0^\infty$.

Теорема 4. *Любое из частично упорядоченных множеств*

$$\mathcal{L}_{I^\infty},\ \mathcal{L}_{I_1^\infty},\ \mathcal{L}_{MI^\infty},\ \mathcal{L}_{MI_1^\infty},\ \mathcal{L}_{O^\infty},\ \mathcal{L}_{O_0^\infty},\ \mathcal{L}_{MO^\infty},\ \mathcal{L}_{MO_0^\infty}$$

имеет континуальное число максимальных элементов.

Доказательство. Ввиду двойственности классов типов I^∞ и O^∞ рассмотрим только классы типа I^∞. Зафиксируем возрастающую последовательность $n_1, n_2, \ldots$ натуральных чисел и положим

$$\alpha = 01^{n_1}01^{n_2}0 \ldots 01^{n_i}0 \ldots .$$

Докажем, что последовательность α определяет максимальный элемент в любом из множеств $\mathcal{L}_Q$, где $Q \in \{I^\infty, I_1^\infty, MI^\infty, MI_1^\infty\}$.

Пусть α сводится к β функцией $f(x_1, \ldots, x_n)$ из класса I^∞. Из соотношения $f \in I^\infty$ следует, что найдутся i, $1 \leqslant i \leqslant n$, и $(n-1)$-местная функция g такие, что справедливо тождество (4). Поскольку α содержит

бесконечное число единиц, g отлична от константы 0. Далее, для любого $m \geqslant 1$ в β имеется лишь конечное число вхождений слова 01^m0 (иначе за счёт конъюнктивной переменной x_i в представлении (4) функции f в α появится бесконечное число пар нулей, расстояние между которыми равно $m+1$). Отсюда следует, в частности, что β содержит сколь угодно большие массивы из единиц.

Функция f обязана сохранять 1. В самом деле, в противном случае при «прохождении» функции f через достаточно большой (длиной больше n) массив из единиц в α будет «внесён» неодноэлементный массив из нулей, что противоречит определению α. С использованием конъюнктивной переменной x_i в представлении функции f легко также сделать вывод, что β имеет лишь конечное число вхождений слова 00. Таким образом, почти все нули последовательности β «одиночные».

Рассмотрим «прохождение» функции f через одиночный нуль последовательности β, который окружен достаточно большими массивами из единиц: $1^{m_1}01^{m_2}$, где $m_1, m_2 > n$. При прохождении функции f через массив 1^{m_1} также получается массив из единиц, далее функция f по крайней мере один раз примет значение 0 (когда переменная x_i примет значение 0 в слове $1^{m_1}01^{m_2}$), затем массив 1^{m_2} будет преобразован функцией f вновь в массив из единиц. Заметим, что при прохождении через слово $1^{m_1}01^{m_2}$ функция f не может принять значение 0 более одного раза, иначе в α бесконечное число раз будут встречаться пары нулей с расстоянием между ними, не превосходящим n.

Подведём итоги. Начиная с некоторого момента (когда одиночные нули последовательности β окружены единичными массивами длины, большей n), значения функции f становятся равными значениям переменной x_i. Следовательно, с этого момента элементы β просто повторяют соответствующие элементы α. Это означает, что Q-степени последовательностей α и β совпадают. Теорема 4 доказана.

Отметим [6], что континуальным числом максимальных элементов обладают все множества

$$\mathcal{L}_D,\ \mathcal{L}_{D_0},\ \mathcal{L}_{D_1},\ \mathcal{L}_{D_{01}},\ \mathcal{L}_K,\ \mathcal{L}_{K_0},\ \mathcal{L}_{K_1},\ \mathcal{L}_{K_{01}},$$

где D, K — замкнутые классы всех дизъюнкций и всех конъюнкций соответственно и $D_0 = D \cap T_0$, $D_1 = D \cap T_1$, $D_{01} = D \cap T_{01}$, $K_0 = K \cap T_0$, $K_1 = K \cap T_1$, $K_{01} = K \cap T_{01}$.

Перейдём к исследованию минимальных элементов в множествах $\mathcal{L}_Q$. Сразу заметим, что если множество Q содержит хотя бы одну из констант 0 или 1, то множество $\mathcal{L}_Q$ имеет наименьший элемент [2]. В [6] до-

казано, что ровно два минимальных элемента имеются в каждом из множеств $\mathcal{L}_{D_{01}}$ и $\mathcal{L}_{K_{01}}$. Эти минимальные элементы порождаются последовательностями $00\ldots$ и $11\ldots$. В [4] установлено, что множество $\mathcal{L}_{M_{01}}$ имеет континуальное число минимальных элементов (здесь $M_{01} = M \cap T_{01}$).

Теорема 5. *Каждое из множеств $\mathcal{L}_{T_{01}}$ и $\mathcal{L}_{SM}$ имеет континуальное число минимальных элементов.*

Доказательство. Рассмотрим множество $\mathcal{L}_{T_{01}}$. Пусть $n_1, n_2, \ldots$ — возрастающая последовательность натуральных чисел. Положим

$$\alpha = 0^{n_1}1^{n_1}0^{n_2}1^{n_2}\ldots 0^{n_i}1^{n_i}\ldots.$$

Допустим, что последовательность β сводится к α функцией $f(x_1, \ldots, x_n)$ из класса T_{01}. Рассмотрим «прохождение» функции f через слово

$$0^{n_i}1^{n_i}0^{n_{i+1}}1^{n_{i+1}},$$

начиная с первого нуля слова 0^{n_i} (когда $x_1 = 0$) и заканчивая последним нулём слова $0^{n_{i+1}}$ (когда вновь $x_1 = 0$). Считая $n_i > n$ достаточно большим числом, получим в β соответствующее слово вида

$$0^{n_i-n+1}a_1\ldots a_{n-1}1^{n_i-n+1}b_1\ldots b_{n-1}0^{n_{i+1}-n+1}a_1\ldots a_{n-1},$$

где

$$a_1 = f(0,\ldots,0,1),\ a_2 = f(0,\ldots,0,1,1),\ldots,a_{n-1} = f(0,1,\ldots,1),$$

$$b_1 = f(1,\ldots,1,0),\ b_2 = f(1,\ldots,1,0,0),\ldots,b_{n-1} = f(1,0,\ldots,0),$$

$a_1,\ldots,a_{n-1},b_1,\ldots,b_{n-1}$ могут быть произвольными элементами из $\{0,1\}$. Определим функцию $f'(x_1,\ldots,x_{2n})$ в классе T_{01} следующими соотношениями (в приводимых ниже наборах опускаем запятые и используем «степенные» обозначения):

$$f'(0^{2n-1}a_1) = f'(0^{2n-2}a_1a_2) = \ldots = f'(0^{n+1}a_1\ldots a_{n-1}) = 0, \qquad (5)$$

$$f'(1^nb_1\ldots b_{n-1}0) = f'(1^{n-1}b_1\ldots b_{n-1}00) = \ldots = f'(1b_1\ldots b_{n-1}0^n) = 0, \qquad (6)$$

$$f'(b_1\ldots b_{n-1}0^{n+1}) = f'(b_2\ldots b_{n-1}0^{n+2}) = \ldots = f'(b_{n-1}0^{2n-1}) = 0, \qquad (7)$$

$$f'(1^{2n-1}b_1) = f'(1^{2n-2}b_1b_2) = \ldots = f'(1^{n+1}b_1\ldots b_{n-1}) = 1, \qquad (8)$$

$$f'(0^na_1\ldots a_{n-1}1) = f'(0^{n-1}a_1\ldots a_{n-1}11) = \ldots = f'(0a_1\ldots a_{n-1}1^n) = 1, \qquad (9)$$

$$f'(a_1 \ldots a_{n-1}1^{n+1}) = f'(a_2 \ldots a_{n-1}1^{n+2}) = \ldots = f'(a_{n-1}1^{2n-1}) = 1 \quad (10)$$

(некоторые из этих соотношений могут быть тривиальными равенствами $f'(0,\ldots,0) = 0$ и $f'(1,\ldots,1) = 1$). Чтобы определение функции f' было корректным, необходимо убедиться в том, что множества наборов из (5)–(7) и (8)–(10) не пересекаются.

Наборы из (5) отличаются от наборов из (8) по первой компоненте, а от наборов из (10) — по n-й компоненте. Далее будем сравнивать наборы из (5) с наборами из (9). При этом можно не рассматривать последний набор из (9), поскольку все наборы из (5) имеют 0 в $(n+1)$-й компоненте.

Возьмём i-й $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ набор $(0^{2n-i}a_1 \ldots a_i)$ из (5) и j-й $(1 \leqslant j \leqslant n-1)$ набор $(0^{n-j+1}a_1 \ldots a_{n-1}1^j)$ из (9). Предполагая, что эти наборы совпадают, получим, в частности, что

$$(0^{n+j-i-1}a_1 \ldots a_i) = (a_1 \ldots a_{n-1}1^j). \quad (11)$$

Из (11) легко следует, что случай $j > i$ невозможен. Случай $j = i$ также невозможен: достаточно рассмотреть значение элемента a_1. Поэтому далее предполагаем, что $j < i$. Тогда из (11) получаем

$$\begin{gathered} a_1 = \ldots = a_{n+j-i-1} = 0, \quad a_{i-j+1} = \ldots = a_i = 1, \\ a_1 = a_{n+j-i}, \ldots, a_{i-j} = a_{n-1}. \end{gathered} \quad (12)$$

Сравнивая в (12) блоки нулевых и единичных разрядов, приходим к неравенству $n + j - i - 1 < i - j + 1$, т. е. $i - j > n/2 - 1$. Значит, все нулевые разряды из (12) можно с помощью последних равенств из (12) использовать для нахождения дальнейших значений a_l:

$$a_1 = \ldots = a_{n+j-i-1} = a_{n+j-i} = \ldots = a_{2(n+j-i-1)} = 0. \quad (13)$$

Вновь сравниваем блок нулевых разрядов из (13) и блок единичных разрядов из (12) и получаем неравенство $2(n + j - i - 1) < i - j + 1$, т. е. $i - j > 2n/3 - 1$. Поскольку $2(n + j - i - 1) \leqslant i - j$, можно снова использовать (13) и последние равенства из (12), чтобы получить равенства

$$a_1 = \ldots = a_{2(n+j-i-1)} = a_{2(n+j-i)+1} = \ldots = a_{3(n+j-i-1)} = 0$$

и неравенство $i - j > 3n/4 - 1$. Этот индуктивный процесс продолжаем до неравенства $i - j > (n-1)n/n - 1$. Однако $1 \leqslant i, j \leqslant n - 1$, поэтому неравенство $i - j > n - 2$ невозможно.

Рассмотрим множество наборов из (6). Оно не пересекается с множеством наборов из (8): достаточно заметить, что наборы из (6) и (8)

получаются из наборов (9) и (5) заменой символов 0, 1, a_i символами 1, 0, b_i соответственно. Далее, наборы из (6) отличаются от наборов из (9) и (10) по последней компоненте. Наконец, наборы из(7) отличаются от наборов из (8) по n-й компоненте, а от наборов из (9) и (10) — по последней компоненте.

Итак, корректность определения функции f' установлена.

Если теперь при достаточно больших n_i ($n_i > 2n$) рассматривать «прохождение» функции f' через слово

$$b_1 \dots b_{n-1} 0^{n_i-n+1} a_1 \dots a_{n-1} 1^{n_i-n+1} b_1 \dots b_{n-1},$$

то будет получено слово $0^{n_i}1^{n_i}$. Таким образом, α сводится к β функцией f' из класса T_{01}. Тем самым установлена минимальность T_{01}-степени последовательности α. Континуальность числа минимальных элементов в множестве $\mathcal{L}_{T_{01}}$ следует из континуальности множества последовательностей $n_1, n_2, \dots$.

Рассмотрим множество $\mathcal{L}_{SM}$. Определим, как и выше, последовательность α. Предположим, что $f \in SM$. Тогда в силу монотонности функции f получим

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \dots \leqslant a_{n-1}, \quad b_1 \geqslant b_2 \geqslant \dots \geqslant b_{n-1},$$

а в силу её самодвойственности —

$$b_1 = \overline{a}_1,\ b_2 = \overline{a}_2, \dots, b_{n-1} = \overline{a}_{n-1}.$$

Таким образом, если при некотором k имеем $a_{k-1} = 0,\ a_k = 1$, то при достаточно больших значениях n_i при «прохождении» функции f через слово $0^{n_i}1^{n_i}0^{n_{i+1}}$ она «добавит» в последовательности β к слову 1^{n_i} слева слово 1^{n-k} и одновременно «удалит» из этого слова справа то же самое слово 1^{n-k} (т. е. добавит к слову $0^{n_{i+1}}$ слева слово 0^{n-k}). Следовательно, если пренебречь некоторым началом последовательности α, то можно считать, что последовательность β получается из α сдвигом влево на $n-k$ разрядов. Понятно, что в этом случае α SM-сводится к β. Теорема 5 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Марченков С. С.** Замкнутые классы булевых функций. — М.: Физматлит, 2000. — 126 с.
2. **Марченков С. С.** Булева сводимость // Дискрет. математика. — 2003. — Т. 15, № 3. — С. 40–53.

3. **Марченков С. С.** Конечная порождаемость замкнутых классов булевых функций // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 2005. — Т. 12, № 1. — С. 101–118.
4. **Марченков С. С.** О строении частично упорядоченных множеств булевых степеней // Дискрет. математика. — 2006. — Т. 18, № 1. — С. 63–75.
5. **Марченков С. С.** Полные и неполные булевы степени // Пробл. передачи информ. — 2010. — Т. 46, № 4. — С. 83–90.
6. **Марченков С. С., Матвеев С. А.** Булевы степени, определяемые классами линейных функций и конъюнкций // Мат. вопросы кибернетики. Вып. 14. — М.: Физматлит, 2005. — С. 35–48.
7. **Рейна Г.** Степени автоматных преобразований // Кибернет. сб. Вып. 14. — М.: Мир, 1977. — С. 95–106.
8. **Роджерс Х.** Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. — М.: Мир, 1972. — 624 с.

Марченков Сергей Серафимович,
e-mail: ssmarchen@yandex.ru

Статья поступила
29 мая 2012 г.