ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Май—июнь 2013. Том 20, № 3. С. 45–64

УДК 519.1

О МАКСИМАЛЬНОЙ МОЩНОСТИ МНОЖЕСТВА, k-СВОБОДНОГО ОТ НУЛЯ, В АБЕЛЕВОЙ ГРУППЕ *)

В. Г. Саргсян

Аннотация. Подмножество A элементов группы G называется *k-свободным от нуля*, если уравнение $x_1+x_2+\dots+x_k=0$ не имеет решения в множестве A. Множество A, k-свободное от нуля, в группе G, называется *максимальным,* если для любого $x \in G \setminus A$ множество $A \cup \{x\}$ не является k-свободным от нуля. Получены оценки максимальной мощности множества, k-свободного от нуля. В частности, определена максимальная мощность арифметической прогрессии, k-свободной от нуля, в циклической группе Z_n и найдены верхние и нижние оценки максимальной мощности множества, k-свободного от нуля, в абелевой группе G. Описана структура максимального множества A, k-свободного от нуля, в циклической группе Z_n при условии НОД$(n,k)=1$ и $k|A| \geqslant n+1$.

Ключевые слова: k-свободное от нуля множество, группа вычетов, нетривиальная подгруппа, смежный класс, арифметическая прогрессия.

Введение

Пусть G — абелева группа, k и l — неотрицательные целые числа. Подмножество $A \subseteq G$ называется (k,l)-*свободным* от сумм, если уравнение $x_1+x_2+\dots+x_k = y_1+y_2+\dots+y_l$ не имеет решения в множестве A. Семейство всех (k,l)-свободных от сумм подмножеств в группе G обозначим через $SF_{k,l}(G)$. Положим $\lambda_{k,l}(G) = \max\limits_{A \in SF_{k,l}(G)} |A|$. Через $\exp(G)$ обозначим экспоненту группы G.

Теорема 1 [3]. *Пусть G — абелева группа. Тогда*

$$\max_{d|\exp(G)} \left\{ \left\lfloor \frac{d+1}{3} \right\rfloor \frac{|G|}{d} \right\} \leqslant \lambda_{2,1}(G) \leqslant \max_{d||G|} \left\{ \left\lfloor \frac{d+1}{3} \right\rfloor \frac{|G|}{d} \right\}.$$

В [4] доказано, что $\lambda_{2,1}(G)$ совпадает с нижней оценкой в теореме 1.

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №10–01–00768–а).

Теорема 2. *Пусть G — абелева группа. Тогда выполняется равенство*

$$\lambda_{2,1}(G) = \max_{d|\exp(G)} \left\{ \left\lfloor \frac{d+1}{3} \right\rfloor \frac{|G|}{d} \right\}.$$

Через Z_n обозначим группу вычетов по модулю n, а семейство арифметических прогрессий, (k,l)-свободных от сумм, в группе Z_n обозначим через $PF_{k,l}(Z_n)$. Положим $\alpha_{k,l}(Z_n) = \max\limits_{A \in PF_{k,l}(Z_n)} |A|$.

В [5] получены следующие результаты (теоремы 3–5).

Теорема 3. *Пусть G — абелева группа, k и l — различные положительные целые числа. Тогда*

$$\max_{d|\exp(G)} \left\{ \alpha_{k,l}(Z_d) \frac{|G|}{d} \right\} \leqslant \lambda_{k,l}(G) \leqslant \max\left(\frac{|G| - \varepsilon(G)}{k+l}, \max_{d|\exp(G)} \left\{ \alpha_{k,l}(Z_d) \frac{|G|}{d} \right\} \right),$$

где

$$\varepsilon(G) = \begin{cases} 0, & \text{если } |G| \text{ — чётное;} \\ 1, & \text{если } |G| \text{ — нечётное.} \end{cases}$$

Определим $\eta(x)$ равенством $\eta(x) =$НОД$(x, k-l)$.

Теорема 4. *Пусть G — абелева группа, k и l — различные положительные целые числа и $\eta(|G|) = 1$. Тогда если $\exp(G)$ имеет делитель d такой, что $d \not\equiv 1 \pmod{(k+l)}$, то*

$$\lambda_{k,l}(G) = \max_{d|\exp(G)} \left\{ \left(\left\lfloor \frac{d-2}{k+l} \right\rfloor + 1 \right) \frac{|G|}{d} \right\}.$$

Теорема 5. *Пусть k и l — различные положительные целые числа. Тогда если $\eta(n) = 1$, то*

$$\lambda_{k,l}(Z_n) = \max_{d|n} \left\{ \left(\left\lfloor \frac{d-2}{k+l} \right\rfloor + 1 \right) \frac{n}{d} \right\}.$$

В [2] получены следующие утверждения (теоремы 6–8).

Теорема 6. *Пусть G — абелева группа, k и l — различные положительные целые числа. Тогда*

$$\max_{d|\exp(G)} \left\{ \left(\left\lfloor \frac{d-1-\eta(d)}{k+l} \right\rfloor + 1 \right) \frac{|G|}{d} \right\} \leqslant \lambda_{k,l}(G) \leqslant \max_{d||G|} \left\{ \left(\left\lfloor \frac{d-2}{k+l} \right\rfloor + 1 \right) \frac{|G|}{d} \right\}.$$

Теорема 7. *Пусть G — абелева группа, k и l — различные положительные целые числа. Тогда если* $\exp(G)$ *имеет делитель d такой, что* $d \notin \{1, \dots, \eta(d)\} \pmod{(k+l)}$, *то*

$$\lambda_{k,l}(G) = \lambda_{k,l}(Z_{\exp(G)}) \frac{|G|}{\exp(G)}.$$

Теорема 8. *Пусть k и l — различные положительные целые числа. Тогда для любого n справедливо равенство*

$$\lambda_{k,l}(Z_n) = \max_{d|n} \left\{ \alpha_{k,l}(Z_d) \frac{n}{d} \right\}.$$

В нашей работе рассматривается множество, $(k, 0)$-свободное от сумм, при $k \geqslant 3$. Подмножество $A \in SF_{k,0}(G)$ назовём *k-свободным от нуля.* Семейство всех множеств, k-свободных от нуля, в группе G обозначим через $S_k(G)$. Множество $A \in S_k(G)$ называется *максимальным* (по включению), если $A \cup \{x\} \notin S_k(G)$ для любого $x \in G \setminus A$. Положим $\lambda_k(G) = \max\limits_{A \in S_k(G)} |A|$.

Введём некоторые обозначения: семейство всех максимальных множеств из $S_k(G)$ обозначим через $MS_k(G)$, семейство всех множеств $A \in S_k(G)$ таких, что $|A| = \lambda_k(G)$, — через $ES_k(G)$, а семейство арифметических прогрессий, k-свободных от нуля, в группе Z_n — через $P_k(Z_n)$. Положим $\alpha_k(Z_n) = \max\limits_{A \in P_k(Z_n)} |A|$.

В этой статье рассматриваются следующие задачи.

Задача 1. *Определение величины* $\alpha_k(Z_n)$.

Задача 2. *Нахождение верхних и нижних оценок величины* $\lambda_k(G)$.

Задача 3. *Описание структуры множеств $A \in MS_k(Z_n)$ в терминах арифметических прогрессий и смежных классов при условии $k|A| \geqslant n+1$ и НОД$(n, k) = 1$.*

1. Определения и вспомогательные утверждения

Пусть G — абелева группа, $A_1, \dots, A_k$ — непустые подмножества группы G. Положим $A_1 + \dots + A_k = \{x_1 + \dots + x_k \mid x_1 \in A_1, \dots, x_k \in A_k\}$. Далее, для любого целого числа i через iA обозначим множество $\underbrace{A + \dots + A}_{i}$ и положим $-A = \{-a \mid a \in A\}$. Заметим, что если $A \in S_k(G)$, то $0 \notin kA$.

Определение 1. Подмножество $A \subseteq G$ называется *подмножеством Воспера* в группе G, если для любого подмножества $B \subseteq G$ и $|B| \geqslant 2$ имеет место неравенство

$$|A+B| \geqslant \min\left(|G|-1, |A|+|B|\right).$$

Определение 2. Пусть A — непустое подмножество группы G. *Стабилизатором* множества A называется максимальная по мощности подгруппа $H(A)$ такая, что $A + H(A) = A$.

Лемма 1 [5, лемма 3.2]. *Пусть A — порождающее подмножество абелевой группы G такое, что $0 \in A$ и $|A| \leqslant (|G|+1)/2$. Тогда выполняется одно из следующих условий*:

(i) *A — арифметическая прогрессия*;

(ii) *существует подгруппа $H \neq \{0\}$ группы G такая, что*

$$|A+H| < \min\left(|G|-1, |H|+|A|\right);$$

(iii) *A — подмножество Воспера в группе G.*

Лемма 2 [5, лемма 3.5]. *Пусть G — абелева группа, H — подгруппа группы G и $A \subseteq G$ такое, что*

$$|A+H| < \min\left(|G|, |H|+|A|\right),$$

и пусть $\psi_{G,G/H}\colon G \to G/H$ — канонический гомоморфизм. Если K — подгруппа группы G/H такая, что

$$|\psi_{G,G/H}(A)+K| < \min(|G|/|H|, |K|+|\psi_{G,G/H}(A)|),$$

то

$$\left|A+\psi^{-1}_{G,G/H}(K)\right| < \min\left(|G|, |A|+\left|\psi^{-1}_{G,G/H}(K)\right|\right).$$

Лемма 3. *Пусть A — порождающее подмножество абелевой группы G такое, что $0 \in A$ и $|A| \leqslant |G|/2$. Если H — максимальная по мощности подгруппа группы G со свойством*

$$|A+H| < \min\left(|G|, |H|+|A|\right),$$

то $\psi_{G,G/H}(A)$ — либо арифметическая прогрессия, либо подмножество Воспера в фактор-группе G/H, где $\psi_{G,G/H}\colon G \to G/H$ — канонический гомоморфизм.

Доказательство. Пусть H — максимальная по мощности подгруппа группы G такая, что

$$|A+H| < \min\left(|G|, |H|+|A|\right). \tag{1}$$

Так как подгруппа $\{0\}$ удовлетворяет неравенству (1), H существует.

Покажем, что $|\psi_{G,G/H}(A)| \leqslant \frac{|G/H|+1}{2}$. Действительно, имеем

$$|\psi_{G,G/H}(A)||H| = |A+H| < |H|+|A|.$$

Отсюда

$$|\psi_{G,G/H}(A)| < \frac{|A|}{|H|} + 1 \leqslant \frac{|G|}{2|H|} + 1 = \frac{|G/H|}{2} + 1.$$

Очевидно, что $0 \in \psi_{G,G/H}(A)$ и множество $\psi_{G,G/H}(A)$ порождает фактор-группу G/H. Применяя лемму 1 к $\psi_{G,G/H}(A)$ и G/H, получаем, что $\psi_{G,G/H}(A)$ — либо арифметическая прогрессия, либо подмножество Воспера в фактор-группе G/H. Действительно, для всякой ненулевой подгруппы K фактор-группы G/H выполняется неравенство

$$|\psi_{G,G/H}(A)+K| \geqslant \min(|G/H|, |K|+|\psi_{G,G/H}(A)|),$$

что вытекает из того, что H — максимальная по мощности подгруппа, обладающая свойством (1) (множество $\psi^{-1}_{G,G/H}(K)$ содержит подгруппу H), и из леммы 2. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть $k \geqslant 3$ — натуральное число, H — подгруппа абелевой группы G и $\psi_{G,G/H}\colon G \to G/H$ — канонический гомоморфизм. Тогда $\psi^{-1}_{G,G/H}(A) \in S_k(G)$, если $A \in S_k(G/H)$. Более того, $A \in MS_k(G/H)$, если $\psi^{-1}_{G,G/H}(A) \in MS_k(G)$.*

Пусть H — подгруппа группы G и $\psi_{G,G/H}\colon G \to G/H$ — канонический гомоморфизм. Тогда для любого подмножества $A \subseteq G$ через A/H обозначим подмножество $\psi_{G,G/H}(A)$ фактор-группы G/H.

Лемма 5. *Пусть $k \geqslant 3$ — натуральное число, G — абелева группа и $A \in MS_k(G)$. Тогда*

(i) $k(A+H(kA)) = kA$;

(ii) $A+H(kA) \in MS_k(G)$;

(iii) $A+H(kA) = A$;

(iv) $H(A) = H(kA)$;

(v) *A представляет собой объединение нескольких смежных классов подгруппы $H(kA)$;*

(vi) $A/H(kA) \in MS_k(G/H(kA))$.

Доказательство. По определению

$$k(A+H(kA)) = \underbrace{(A+H(kA))+\cdots+(A+H(kA))}_{k}$$
$$= \underbrace{A+\cdots+A}_{k} + \underbrace{H(kA)+\cdots+H(kA)}_{k} = kA + H(kA) = kA.$$

Из того, что $0 \notin kA = k(A+H(kA))$, следует, что $A+H(kA) \in S_k(G)$. Так как $A \in MS_k(G)$ и $A \subseteq A + H(kA)$, получаем $A = A + H(kA)$. Отсюда и из того, что $H(A) \subseteq H(kA)$, вытекает, что $H(A) = H(kA)$.

Заметим также, что для любого $a \in A$ имеет место $a + H(kA) \subseteq A + H(kA) = A$, т. е. A представляет собой объединение нескольких смежных классов подгруппы $H(kA)$.

Теперь убедимся, что $A/H(kA) \in S_k(G/H(kA))$. Предположим противное, и пусть $a_1, a_2, \ldots, a_k \in A$ такие, что $(a_1+H(kA))+(a_2+H(kA))+\cdots+(a_k+H(kA)) = H(kA)$, другими словами, $a_1+a_2+\cdots+a_k \in H(kA)$. Отсюда и из того, что $kA + H(kA) = kA$, следует, что $0 \in kA$. Последнее противоречит тому, что $A \in S_k(G)$. В силу леммы 4 $A/H(kA) \in MS_k(G/H(kA))$. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Пусть $k \geqslant 3$ — натуральное число и G — абелева группа. Тогда если существует $A \in MS_k(G)$ и $|A| = 1$, то G циклическая.*

Доказательство. Пусть $A \in MS_k(G)$ и $A = \{\upsilon\}$. Известно, что любая абелева группа G изоморфна некоторой группе вида

$$Z/a_1Z \times Z/a_2Z \times \cdots \times Z/a_{s-1}Z \times Z/a_sZ, \qquad (2)$$

где $2 \leqslant a_s$, $a_s|a_{s-1}$, $a_{s-1}|a_{s-2}, \ldots,$ $a_2|a_1$ [1]. Таким образом, можно считать, что G имеет вид (2).

Предположим, что $s \geqslant 2$. Элемент $\upsilon \in A$ в группе (2), где $\upsilon_i \in Z/a_iZ$, $i = 1, \ldots, s$, представим в виде $\upsilon = (\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_s)$.

Так как $\{\upsilon\} \in MS_k(G)$, для любого $\omega \in G \setminus \{\upsilon\}$ имеем $0 \in k\{\upsilon, \omega\}$. В качестве элемента ω возьмём $\omega_1 = (\upsilon_1, \upsilon_2 + 1, \ldots, \upsilon_s)$ и $\omega_2 = (\upsilon_1 + 1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_s)$. Поскольку каждая i-я ($1 \leqslant i \leqslant s$, $i \neq 2$) координата любого элемента из $k\{\upsilon, \omega_1\}$ есть $k\upsilon_i$, получаем, что $k\upsilon_i = 0$, а из того, что вторая координата любого элемента из $k\{\upsilon, \omega_2\}$ есть $k\upsilon_2$, получаем, что $k\upsilon_2 = 0$. Отсюда $k\upsilon = 0$, другими словами, $\{\upsilon\} \notin S_k(G)$; противоречие. Тем самым $s = 1$ и G циклическая. Лемма 6 доказана.

Теорема 9 [8]. *Пусть G — абелева группа, B — подмножество группы G, порождающее G, и $0 \in B$. Тогда $|B+C| \geqslant \min(|G|, |B|/2+|C|)$ для*

любого непустого подмножества $C \subseteq G$. В частности, для любого целого числа j выполняется неравенство

$$|jB| \geqslant \min\left(|G|, \left\lceil \frac{(j-1)|B|}{2} \right\rceil + |B|\right).$$

Лемма 7 [6]. *Пусть H — конечная подгруппа произвольной абелевой группы G, A и B — подмножества группы G, каждое из которых содержится в некотором смежном классе подгруппы H. Если $|A| + |B| > |H|$, то $|A + B| = |H|$.*

Теорема 10. *Пусть $k \geqslant 3$ — натуральное число, G — абелева группа и $A \in MS_k(G)$. Тогда если*

$$k|A| \geqslant |G| + 1, \tag{3}$$

то существует подгруппа H группы G такая, что

(i) $A + H = A$;

(ii) $A/H \in MS_k(G/H)$;

(iii) A/H — *арифметическая прогрессия*;

(iv) G/H — *циклическая группа.*

Доказательство. Рассмотрим два случая.

В первом случае предполагаем, что существует элемент $a \in A$ такой, что множество $A - a$ порождает группу G. Для удобства положим $B = A - a$. Ясно, что $0 \in B$ и $|A| = |B| \leqslant |G|/2$. Применяя лемму 3 к B и G, получаем, что B/H — либо арифметическая прогрессия, либо подмножество Воспера в фактор-группе G/H, где H — максимальная по мощности подгруппа группы G со свойством

$$|B + H| < \min\left(|G|, |H| + |B|\right). \tag{4}$$

Заметим, что стабилизатор множества A является подгруппой подгруппы H. Множество B разобьём на подмножества следующим образом:

$$B = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_u,$$

где $|B_1| \leqslant |B_2| \leqslant \ldots \leqslant |B_u|$, $B_i \subseteq B \cap (g_i + H)$ для всех i и некоторого элемента g_i. Поскольку B порождает группу G, имеем $u \geqslant 2$. В силу неравенства (4) получаем

$$(u-1)|H| < |B_1| + |B_2| + \cdots + |B_u|. \tag{5}$$

Так как $|B_i| \leqslant |H|$ для каждого $i \in \{1, \dots, u\}$, из (5) следует, что для любой пары $(i, j) \neq (1, 1)$, $i, j \in \{1, \dots, u\}$, выполняется неравенство

$$|B_i| + |B_j| \geqslant |H| + 1.$$

В силу леммы 7 $B_i + B_j = B_i + B_j + H$. Отсюда

$$rB = (r(B + H) \setminus (rB_1 + H)) \cup rB_1 \tag{6}$$

для любого $r \geqslant 2$. Заметим также, что из того, что $A \in MS_k(G)$, следует, что $kA + H = kA$ и $H = H(kA)$. В силу леммы 5 имеем $A + H = A$ и $A/H \in MS_k(G/H)$.

Теперь убедимся, что B/H — арифметическая прогрессия. Предположим противное, и пусть B/H — подмножество Воспера в фактор-группе G/H и $u = |B/H| \geqslant 3$. Покажем, что $|(k-1)B| \geqslant (k-1)|B|$. Поскольку $A \in S_k(G)$, имеем $(k-1)A \cap (-A) = \varnothing$. Отсюда и из (6) получаем, что

$$\begin{aligned}
|G| \geqslant |(k-1)A| + |A| = |(k-1)B| + |B| \geqslant (|(k-1)(B+H)| \\
- |(k-1)B_1 + H| + |(k-1)B_1|) + (|B_1| + |B_2| + |B_3|) \\
\geqslant (|(k-1)(B+H)| - |H| + |B_1|) + (|B_1| + |B_2| + |B_3|) \\
= (|(k-1)(B+H)| - |H|) + (|B_1| + |B_2|) + (|B_1| + |B_3|) \\
> |(k-1)(B+H)| + |H|. \quad (7)
\end{aligned}$$

Так как $|(k-1)(B+H)|$ делится на $|H|$, из (7) следует, что

$$|(k-1)(B+H)| \leqslant |G| - 2|H|,$$

что эквивалентно неравенству $|(k-1)(B/H)| \leqslant |G/H| - 2$ (заметим, что $(C + H)/H = C/H$ для любого $C \subseteq G$). По свойству множества Воспера получаем, что $(k-1)|B/H| \leqslant |(k-1)B/H|$, или

$$(k-1)|B + H| \leqslant |(k-1)(B+H)|. \tag{8}$$

Из (6) и (8) вытекает, что

$$\begin{aligned}
|(k-1)B| \geqslant |(k-1)(B+H)| - |(k-1)B_1 + H| + |(k-1)B_1| \\
\geqslant (k-1)|B+H| - |H| + |B_1| \geqslant (k-1)|B|,
\end{aligned}$$

откуда

$$|G| \geqslant |(k-1)B| + |B| \geqslant k|B|.$$

Тем самым $|B| \leqslant |G|/k$, что противоречит неравенству (3). Так как B/H порождает группу G/H, B/H — арифметическая прогрессия и $0 \in B/H$, группа G/H циклическая.

В этом случае предположим, что не существует элемента $a \in A$ такого, что множество $A - a$ порождает группу G. Зафиксируем любой элемент $a \in A$ и через B обозначим множество $A - a$. Ясно, что $0 \in B$. Обозначим через H подгруппу, порождённую множеством B. Очевидно, что $A \subseteq a + H$ и $B \subseteq H$. Пусть $\psi_{G,G/H}\colon G \to G/H$ — канонический гомоморфизм.

Если $ka \notin H$, то $a+H \in S_k(G)$. Из того, что $A \in MS_k(G)$, следует, что $A = a+H$, т.е. $A = A+H$. Так как $A = A+H = \psi^{-1}_{G,G/H}(A/H) \in MS_k(G)$, в силу леммы 4 получаем, что $A/H \in MS_k(G/H)$. Из леммы 6 вытекает, что G/H — циклическая группа.

В случае, когда $ka \in H$, с учётом того, что $0 \notin kA$, имеем

$$|kB| = |kA| \leqslant |H| - 1 \leqslant \frac{|G| - 2}{2}. \tag{9}$$

С другой строны, поскольку B порождает H и $0 \in B$, из теоремы 9 с учётом того, что $|kB| < |H|$, вытекает, что

$$|kB| = |kA| \geqslant \left\lceil \frac{(k-1)|B|}{2} \right\rceil + |B| \geqslant \frac{k+1}{2}|B|. \tag{10}$$

Из (9) и (10) получаем, что $|A| = |B| \leqslant (|G|-2)/(k+1)$. Это противоречит тому, что $k|A| \geqslant |G| + 1$. Теорема 10 доказана.

2. Максимальная мощность арифметической прогресии, k-свободной от нуля, в циклической группе

Арифметическая прогрессия $A \in P_k(Z_n)$ называется *максимальной* (по включению), если $A \cup \{x\} \notin P_k(Z_n)$ для любого $x \in Z_n \setminus A$. Семейство всех максимальных арифметических прогрессий из $P_k(Z_n)$ обозначим через $MP_k(Z_n)$, а семейство всех множеств $A \in P_k(Z_n)$ таких, что $|A| = \alpha_k(Z_n)$, — через $EP_k(Z_n)$.

Семейство всех арифметических прогрессий из $P_k(Z_n)$, содержащихся в некотором смежном классе какой-либо нетривиальной подгруппы группы Z_n, обозначим через $NP_k(Z_n)$. Положим

$$PP_k(Z_n) = P_k(Z_n) \setminus NP_k(Z_n),$$

т. е. $PP_k(Z_n)$ — семейство всех арифметических прогрессий из $P_k(Z_n)$, которые не содержатся ни в одном из смежных классов нетривиальных подгрупп группы Z_n. Положим

$$\beta_k(Z_n) = \max_{A \in NP_k(Z_n)} |A| \quad \text{и} \quad \gamma_k(Z_n) = \max_{A \in PP_k(Z_n)} |A|.$$

Очевидно, что $\alpha_k(Z_n) = \max\left(\beta_k(Z_n), \gamma_k(Z_n)\right)$. Положим $EPP_k(Z_n) = \{A \in PP_k(Z_n) \mid |A| = \gamma_k(Z_n)\}$ и $MNP_k(Z_n) = MP_k(Z_n) \cap NP_k(Z_n)$.

Заметим также, что разность любой арифметической прогресии $A \in PP_k(Z_n)$ и число n взаимно просты, а разность любой арифметической прогресии $A \in NP_k(Z_n)$ и число n не взаимно просты. Определим $\delta(x)$ равенством $\delta(x) =$НОД(x, k).

Лемма 8. *Пусть $k \geqslant 3$ — натуральное число. Тогда для любого n выполняются следующие свойства*:

(i) *если $\delta(n) = n$, то $\beta_k(Z_n) = 0$;*

(ii) *если $1 < \delta(n) < n$, то*

$$\frac{n}{r} \leqslant \beta_k(Z_n) \leqslant \max\left(\frac{n}{r}, \frac{n-2}{k+1}\right),$$

где r — наименьший делитель n такой, что k не делится на r;

(iii) *если $\delta(n) = 1$, то*

$$\beta_k(Z_n) = \frac{n}{p}, \tag{11}$$

где p — наименьший простой делитель n.

Доказательство. (i) Пусть k делится на n, тогда для любого элемента $g \in Z_n$ выполняется равенство $kg = 0$. Отсюда $\beta_k(Z_n) = 0$.

(ii) Пусть $1 < \delta(n) < n$ и r — делитель n такой, что k не делится на r. Положим $A = \{1 + ir \mid i \in [0, n/r - 1]\}$. Из того, что k не делится на r, получим, что $0 \notin kA$, тем самым $A \in NP_k(Z_n)$. Отсюда $\beta_k(Z_n) \geqslant n/r$.

Пусть $A = \{a, a+d, \ldots, a + (|A|-1)d\}$ и $A \in MNP_k(Z_n)$. Заметим, что A содержится в некотором смежном классе нетривиальной подгруппы H, порождённой элементом d. Для удобства положим $B = A - a$. Очевидно, что $0 \in B$ и B порождает подгруппу H. Рассмотрим два случая.

Случай (A). Если $ka \in H$, то с учётом того, что $0 \notin kA$, получим

$$|kB| = |kA| \leqslant |H| - 1 \leqslant (n-2)/2. \tag{12}$$

Так как B порождает H и $0 \in B$, из теоремы 9 имеем (заметим, что $|kB| < |H|$)

$$|kB| \geqslant \left\lceil \frac{(k-1)|B|}{2} \right\rceil + |B| \geqslant \frac{k+1}{2}|B|.$$

Отсюда и из (12) получим, что $|A| = |B| \leqslant (n-2)/(k+1)$.

Случай (B). Если $ka \notin H$ (заметим, что в этом случае k не делится на d), то $H + a \in NP_k(Z_n)$. Поскольку $A \in MNP_k(Z_n)$, получим, что $A = H + a$ и $|A| = |H|$.

(iii) Заметим, что при условии $\delta(n) = 1$ случай (A) п.(ii) не выполняется. Отсюда вытекает справедливость равенства (11). Лемма 8 доказана.

Лемма 9. *Пусть $k \geqslant 3$ — натуральное число. Тогда для любого $n \geqslant 2$ выполняются следующие свойства:*

(i) *если $n \geqslant k+2$, то*

$$\gamma_k(Z_n) = \left\lfloor \frac{n-1-x}{k} \right\rfloor + 1,$$

где x — наименьшее целое число из интервала $[1, \delta(n)]$, для которого существует число $a(x) \in Z_n \setminus \{0\}$ такое, что справедливы неравенства

$$1 \leqslant ka(x) \leqslant n-1-k\left\lfloor \frac{n-1-x}{k} \right\rfloor; \tag{13}$$

(ii) *если $n \leqslant k+1$, то $\gamma_k(Z_n) = 0$.*

Замечание. При $x = \delta(n)$ существование числа $a(x)$ вытекает из неравенства

$$n-1-k\left\lfloor \frac{n-1-\delta(n)}{k} \right\rfloor \geqslant \delta(n)$$

и из того, что подгруппы группы Z_n, порождённые элементами k и $\delta(n)$, совпадают.

Доказательство. Пусть $A \in PP_k(Z_n)$. Без ограничения общности предположим, что $A = \{a, a+1, \ldots, a+|A|-1\}$, где $a \in Z_n \setminus \{0\}$. Из того, что $0 \notin kA = \{ka + i \mid i \in \big[0, k(|A|-1)\big]\}$, следует, что для любого $i \in \big[0, k(|A|-1)\big]$ выполняются неравенства

$$1 \leqslant ka \leqslant ka + i \leqslant ka + k(|A|-1) \leqslant n-1. \tag{14}$$

Из (14) вытекает, что существуют неотрицательные целые числа x_1 и x_2 такие, что $ka = 1 + x_1$ и $ka + k(|A| - 1) = n - 1 - x_2$. Отсюда получим, что $|A| = (n - 2 - x_1 - x_2)/k + 1$. Итак, имеем

$$\gamma_k(Z_n) \leqslant \left\lfloor \frac{n-1-x}{k} \right\rfloor + 1, \tag{15}$$

где x — наименьшее целое число из интервала $[1, x_1{+}x_2{+}1]$, для которого выполняются неравенства

$$1 \leqslant ka \leqslant n - 1 - k \left\lfloor \frac{n-1-x}{k} \right\rfloor .$$

Заметим, что при $x = x_1 + x_2 + 1$ эти неравенства следуют из (14).

Из (15) получаем, что если $n \leqslant k + 1$, то $\gamma_k(Z_n) \leqslant 1$. Так как множество из одного элемента содержится в некотором смежном классе, отсюда следует, что $\gamma_k(Z_n) = 0$.

Предположим, что $n \geqslant k + 2$. Покажем, что существует $A \in PP_k(Z_n)$ такое, что $|A| = \lfloor (n-1-x)/k \rfloor + 1$. Здесь x — наименьшее число из интервала $[1, \delta(n)]$, для которого существует число $a(x) \in Z_n \setminus \{0\}$ такое, что выполняется (13). Положим $c = \lfloor (n-1-x)/k \rfloor$. Заметим, что для любого $i \in \big[0, kc\big]$ верны неравенства

$$1 \leqslant 1 + i \leqslant ka(x) + i \leqslant n - 1 - kc + i \leqslant n - 1. \tag{16}$$

Рассмотрим арифметическую прогрессию $A = \{a(x), a(x) + 1, \ldots, a(x) + c\}$. Из (16) следует, что $0 \notin kA = \{ka(x) + i \mid i \in \big[0, kc\big]\}$, тем самым $A \in PP_k(Z_n)$. Лемма 9 доказана.

Теорема 11. *Пусть $k \geqslant 3$ — натуральное число. Тогда для любого n выполняется равенство*

$$\alpha_k(Z_n) = \max\left(\frac{n}{r}, \left\lfloor \frac{n-1-x}{k} \right\rfloor + 1\right),$$

где r — наименьший делитель n такой, что k не делится на r, а x — наименьшее целое число из интервала $[1, \delta(n)]$, для которого существует число $a(x) \in Z_n \setminus \{0\}$ такое, что выполняются неравенства

$$1 \leqslant ka(x) \leqslant n - 1 - k \left\lfloor \frac{n-1-x}{k} \right\rfloor .$$

Доказательство. Заметим, что если k делится на n, то таких r и $a(x)$ не существует, т. е. $\alpha_k(Z_n) = 0$. По определению

$$\alpha_k(Z_n) = \max\left(\beta_k(Z_n), \gamma_k(Z_n)\right).$$

Из неравенства

$$\left\lfloor \frac{n-2}{k+1} \right\rfloor \leqslant \left\lfloor \frac{n-1-\delta(n)}{k} \right\rfloor + 1$$

с учётом лемм 8 и 9 получаем утверждение теоремы. Теорема 11 доказана.

3. О максимальной мощности множества, k-свободного от нуля, в абелевой группе

В этом разделе найдём верхние и нижние оценки величины $\lambda_k(G)$. Для этого понадобятся следующие вспомогательные результаты.

Теорема 12 [7]. *Пусть $h \geqslant 2$, $A_1, \ldots, A_h$ — непустые подмножества группы G и H — стабилизатор множества $A_1 + \cdots + A_h$. Тогда*

$$|A_1 + \cdots + A_h| \geqslant |A_1| + \cdots + |A_h| - (h-1)|H|.$$

Лемма 10 [5, лемма 5.1]. *Пусть G — абелева группа. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(i) $\exp(G)$ *делится на* d;

(ii) *существует подгруппа H группы G такая, что фактор-группа G/H изоморфна циклической группе Z_d.*

Лемма 11. *Пусть $k \geqslant 3$ — натуральное число, G — абелева группа и d — делитель экспоненты* $\exp(G)$. *Тогда*

$$\lambda_k(G) \geqslant \alpha_k(Z_d)\frac{|G|}{d}.$$

Доказательство. Так как d — делитель $\exp(G)$, в силу леммы 11 существует подгруппа H группы G такая, что фактор-группа G/H изоморфна циклической группе Z_d. Пусть $\psi_{G,G/H}\colon G \to G/H$ — канонический гомоморфизм. Возьмём арифметическую прогрессию $A \in EP_k(Z_d)$ и в силу леммы 4 получим, что $\psi^{-1}_{G,G/H}(A) \in S_k(G)$ и $\left|\psi^{-1}_{G,G/H}(A)\right| = \alpha_k(Z_d)|H| = \alpha_k(Z_d)|G|/d$. Лемма 11 доказана.

Теорема 13. *Пусть $k \geqslant 3$ — натуральное число, G — абелева группа. Тогда справедливы неравенства*

$$\max_{d|\exp(G)} \left\{ \alpha_k(Z_d) \frac{|G|}{d} \right\} \leqslant \lambda_k(G) \leqslant \max\left(\frac{|G|}{k}, \max_{d|\exp(G)} \left\{ \alpha_k(Z_d) \frac{|G|}{d} \right\} \right). \quad (17)$$

Доказательство. Нижняя оценка (17) вытекает из лемм 10 и 11.

Докажем верхнюю оценку. Пусть $A \in ES_k(G)$. Предположим, что $k|A| \geqslant |G|+1$. В силу теоремы 10 существует подгруппа H группы G такая, что $A+H = A$, G/H — циклическая группа, A/H — арифметическая прогрессия и $A/H \in MS_k(G/H)$. Поскольку G/H циклическая, в силу леммы 11 $|G/H|$ — делитель экспоненты $\exp(G)$. Так как $A \in ES_k(G)$ и $A = A + H$, из леммы 4 получим, что $A/H \in ES_k(G/H)$, и $|A/H| = |A|/|H| = \alpha_k(G/H)$. Итак, $|A| = \alpha_k(G/H)|H| = \alpha_k(G/H)|G|/|G/H|$. Теорема 13 доказана.

Теорема 14. *Пусть $k \geqslant 3$ — натуральное число, G — абелева группа. Тогда если $\exp(G)$ имеет делитель d_0 такой, что $d_0 \notin \{1, \ldots, x(d_0)\}$ $(\mathrm{mod}\ k)$, то*

$$\lambda_k(G) = \max_{d|\exp(G)} \left\{ \alpha_k(Z_d) \frac{|G|}{d} \right\} = \max_{d|\exp(G)} \left\{ \left(\left\lfloor \frac{d-1-x(d)}{k} \right\rfloor + 1 \right) \frac{|G|}{d} \right\},$$

где $x(d)$ — наименьшее число из интервала $[1, \delta(d)]$, для которого существует число $a(x) \in Z_d \setminus \{0\}$ такое, что выполняются неравенства

$$1 \leqslant ka(x) \leqslant d - 1 - k \left\lfloor \frac{d-1-x(d)}{k} \right\rfloor.$$

Доказательство. Пусть r_1 — наименьший делитель $\exp(G)$ такой, что k не делится на r_1. Тогда $\delta(r_1) < r_1$ и

$$\max_{d|\exp(G)} \left\{ \left(\left\lfloor \frac{d-1-x(d)}{k} \right\rfloor + 1 \right) \frac{|G|}{d} \right\} \geqslant \left(\left\lfloor \frac{r_1-1-\delta(r_1)}{k} \right\rfloor + 1 \right) \frac{|G|}{r_1} \geqslant \frac{|G|}{r_1},$$

откуда в силу теоремы 11 следует, что

$$\max_{d|\exp(G)} \left\{ \alpha_k(Z_d) \frac{|G|}{d} \right\} = \max_{d|\exp(G)} \left\{ \max\left(\frac{d}{r(d)}, \left\lfloor \frac{d-1-x(d)}{k} \right\rfloor + 1 \right) \frac{|G|}{d} \right\}$$

$$= \max\left(\max_{d|\exp(G)}\left\{\frac{|G|}{r(d)}\right\}, \max_{d|\exp(G)}\left\{\left(\left\lfloor\frac{d-1-x(d)}{k}\right\rfloor+1\right)\frac{|G|}{d}\right\}\right)$$
$$= \max\left(\frac{|G|}{r_1}, \max_{d|\exp(G)}\left\{\left(\left\lfloor\frac{d-1-x(d)}{k}\right\rfloor+1\right)\frac{|G|}{d}\right\}\right)$$
$$= \max_{d|\exp(G)}\left\{\left(\left\lfloor\frac{d-1-x(d)}{k}\right\rfloor+1\right)\frac{|G|}{d}\right\}, \quad (18)$$

где $r(d)$ — наименьший делитель d такой, что k не делится на $r(d)$.

Ввиду (18) и теоремы 13 достаточно доказать, что

$$\frac{|G|}{k} \leqslant \max_{d||G|}\left\{\left(\left\lfloor\frac{d-1-x(d)}{k}\right\rfloor+1\right)\frac{|G|}{d}\right\}.$$

По условию теоремы имеем

$$\max_{d|\exp(G)}\left\{\left(\left\lfloor\frac{d-1-x(d)}{k}\right\rfloor+1\right)\frac{|G|}{d}\right\} \geqslant \left(\left\lfloor\frac{d_0-1-x(d_0)}{k}\right\rfloor+1\right)\frac{|G|}{d_0}$$
$$\geqslant \left(\frac{d_0-k}{k}+1\right)\frac{|G|}{d_0} = \frac{|G|}{k}.$$

Теорема 14 доказана.

Теорема 15. *Пусть $k \geqslant 3$ — натуральное число и G — абелева группа. Тогда*

$$\max_{d|\exp(G)}\left\{\left(\left\lfloor\frac{d-1-x(d)}{k}\right\rfloor+1\right)\frac{|G|}{d}\right\} \leqslant \lambda_k(G)$$
$$\leqslant \max_{d||G|}\left\{\left(\left\lfloor\frac{d-2}{k}\right\rfloor+1\right)\frac{|G|}{d}\right\},$$

где $x(d)$ — наименьшее число из интервала $[1, \delta(d)]$, для которого существует число $a(x) \in Z_d \setminus \{0\}$ такое, что выполняются неравенства

$$1 \leqslant ka(x) \leqslant d-1-k\left\lfloor\frac{d-1-x(d)}{k}\right\rfloor.$$

Доказательство. Пусть $A \in ES_k(G)$ и H — стабилизатор множества kA. Рассмотрим фактор-группу G/H. Заметим, что стабилизатором множества $k(A/H)$ фактор-группы G/H является тривиальная подгруппа $\{0\}$. В силу леммы 5 имеем $A/H \in MS_k(G/H)$. Из теоремы 12 и того,

что $0 \notin k(A/H)$, получим, что $k|A/H| - (k-1) \leqslant |k(A/H)| \leqslant |G/H| - 1$, т. е.

$$|A/H| \leqslant \left\lfloor \frac{|G/H| - 2}{k} \right\rfloor + 1. \tag{19}$$

Из (19) и того, что $|A| = |A + H| = |A/H||H|$, следует, что

$$|A| \leqslant \left(\left\lfloor \frac{|G/H| - 2}{k} \right\rfloor + 1 \right) |H|.$$

Отсюда

$$\lambda_k(G) \leqslant \max_{d||G|} \{ (\lfloor (d-2)/k \rfloor + 1)\, |G|/d \}.$$

Нижняя оценка вытекает из теоремы 11 и лемм 10 и 11. Теорема 15 доказана.

Следствие 1. *Пусть $k \geqslant 3$ — натуральное число и $\delta(n) = 1$. Тогда выполняется равенство*

$$\lambda_k(Z_n) = \max_{d|n} \left\{ \left(\left\lfloor \frac{d-2}{k} \right\rfloor + 1 \right) \frac{n}{d} \right\}.$$

4. О структуре максимального множества, k-свободного от нуля, в группе Z_n при условии $\delta(n) = 1$

В этом разделе предполагаем, что числа n и k взаимно просты, т. е. $\delta(n) = 1$. Цель раздела — описание структуры множества $A \in MS_k(Z_n)$ такого, что $k|A| \geqslant n+1$. Для её достижения понадобятся следующие два вспомогательных результата. Для $A \subseteq Z_n$ и положительного целого j положим $j \star A = \{ja \mid a \in A\}$.

Лемма 12. *Пусть $k \geqslant 3$ — натуральное число. Тогда если $n \geqslant k+2$ и $\delta(n) = 1$, то любое множество из $EPP_k(Z_n)$ есть в точности множество*

$$d \star \{x + j \mid j = 0, 1, \ldots, \lfloor (n-2)/k \rfloor\} (\mathrm{mod} n),$$

где $x, d \in Z_n$, $d \neq 0$, и

$$kx \in \{1, \ldots, n - 1 - k\lfloor (n-2)/k \rfloor\}.$$

Заметим, что из леммы 12 вытекает, что $EPP_k(Z_n) \neq \varnothing$.

Теорема 16. *Пусть $k \geqslant 3$ — натуральное число. Тогда если $n \geqslant k+2$ и $\delta(n) = 1$, то $EPP_k(Z_n) \subseteq MS_k(Z_n)$.*

Доказательство. Пусть C — непустое подмножество группы Z_n. Обозначим через μ_C наименьшее целое число q такое, что C можно представить в виде объединения q арифметических прогрессий с разностью 1. Очевидно, что для любого непустого подмножества C группы Z_n

$$|C + \{0,1\}| \geqslant \min(|C| + \mu_C, n) \geqslant \min(|C| + 1, n). \tag{20}$$

Пусть R — арифметическая прогрессия с разностью 1 и $|R| \geqslant 2$. Тогда R можно представить в виде множества $(|R|-1)\{0,1\}$. Отсюда с помощью повторения (20) получаем, что

$$|C + R| = |C + (|R|-1)\{0,1\}| \geqslant \min(|C| + |R| - 1, n). \tag{21}$$

Заметим, что если C непусто и не является арифметической прогрессией с разностью 1, то $\mu_C \geqslant 2$. Это позволяет усилить неравенство (21):

$$|C + R| \geqslant \min(|C| + |R|, n). \tag{22}$$

Из неравенств (20) и (21) следует, что

$$\begin{aligned} |C + R| = |C + \{0,1\} + (|R|-2)\{0,1\}| &\geqslant \min(|C| + \{0,1\} + |R| - 2, n) \\ &\geqslant \min(|C| + \mu_C + |R| - 2, n). \end{aligned}$$

Пусть $P \in EPP_k(Z_n)$. Без ограничения общности предположим, что P — арифметическая прогрессия с разностью 1. Пусть $Q \in S_k(Z_n)$, $P \subset Q$ и $|Q| = |P| + 1$. По определению Q не может быть арифметической прогрессией. Отсюда следует, что $\mu_Q \geqslant 2$. По индукции докажем, что для любого j выполняется неравенство

$$|Q_1 + \dots + Q_j| \geqslant \min(1 + j|P|, n), \tag{23}$$

где $Q_i \in \{Q, -Q\}$, $i \in [1, \dots, j]$.

При $j = 1$ имеем $|Q_1| = |P| + 1$, и (23) справедливо. Пусть неравенство (23) справедливо для j. Без ограничения общности считаем, что $Q_{j+1} = Q$. Рассмотрим два случая.

Если $Q_1 + \dots + Q_j$ не является арифметической прогрессией с разностью 1, то из (22) получаем, что

$$|Q_1 + \dots + Q_j + Q| \geqslant |Q_1 + \dots + Q_j + P| \geqslant \min(|Q_1 + \dots + Q_j| + |P|, n),$$

и справедливость результата следует по индукции.

Если $Q_1 + \cdots + Q_j$ является арифметической прогрессией с разностью 1, то из (21) получаем, что

$$|Q_1+\cdots+Q_j+Q| \geqslant \min(|Q_1+\cdots+Q_j|+|Q|-1, n) \geqslant \min(1+j|P|+|P|, n),$$

откуда следует (23).

Из (23) получаем, что

$$|kQ| \geqslant \min(1+k|P|, n) = \min(1+k\gamma_k(Z_n), n) \geqslant n,$$

что противоречит тому, что $Q \in S_k(Z_n)$. Теорема 16 доказана.

Теорема 17. *Пусть $k \geqslant 3$ — натуральное число, $\delta(n) = 1$ и $n \geqslant k-1$. Тогда любое множество $A \in MS_k(Z_n)$, $k|A| \geqslant n+1$, есть точно одно из следующих множеств:*

(i) *один из $d-1$ нетривиальных смежных классов подгруппы H, где H — произвольная подгруппа группы Z_n, $|H| = n/d$, $2 \leqslant d \leqslant k-1$;*

(ii) *множество ${\psi^{-1}}_{Z_n, Z_n/H}(C)$, где H — произвольная подгруппа группы Z_n такая, что $|Z_n/H| \equiv r \pmod k$, $r \in \{2, \ldots, k-1\}$, $|Z_n/H| \geqslant k+2$, и C — произвольный элемент множества $EPP_k(Z_n/H)$, где $\psi_{Z_n, Z_n/H}\colon Z_n \to Z_n/H$ — канонический гомоморфизм.*

Доказательство. Заметим, что если множество A вида (i) или (ii), то $A \in MS_k(Z_n)$. Это очевидно в случае (i), а в случае (ii) следует из теоремы 16 и леммы 4. Убедимся, что в случаях (i) и (ii) мощность множеств не меньше $(n+1)/k$. В случае (i) это очевидно, в случае (ii) имеем

$$\begin{aligned}\left|\psi^{-1}_{Z_n, Z_n/H}(C)\right| = |C||H| = \gamma_k(Z_n/H)|H| \\ = \left(\left\lfloor \frac{|Z_n/H|-2}{k} \right\rfloor + 1\right)|H| \geqslant \frac{n+1}{k}.\end{aligned}$$

Осталось показать, что других решений нет. Пусть $A \in MS_k(Z_n)$ и

$$k|A| \geqslant n+1. \tag{24}$$

Рассмотрим два случая.

Случай (A). Предположим, что не существует элемента $a \in A$такого, что множество $A - a$ порождает группу Z_n. Для удобства положим $B = A - a$ и через H обозначим нетривиальную подгруппу группы Z_n, порождённую множеством B. Ясно, что $A \subseteq H + a$.

Если $ka \notin H$, то $H + a \in S_k(Z_n)$. Отсюда и из того, что $A \in MS_k(Z_n)$, получим, что $A = H + a$, значит, $|A| = |H|$. Из (24) следует, что единственно возможный случай — $|H| = n/d$. Он совпадает со случаем (i) при условии, что $2 \leqslant d \leqslant k-1$.

Если $ka \in H$, то с учётом того, что $0 \notin kA$, имеем

$$|kB| = |kA| \leqslant |H| - 1 \leqslant \frac{n-2}{2}. \tag{25}$$

Так как B порождает H и $0 \in B$, в силу теоремы 9 и того, что $|kB| < |H|$, получим, что

$$|kB| \geqslant \left\lceil \frac{(k-1)|B|}{2} \right\rceil + |B| \geqslant \frac{k+1}{2}|B|.$$

Отсюда и из (25) имеем $|A| = |B| \leqslant (n-2)/(k+1)$, что противоречит неравенству (24).

Случай (B). Предположим, что существует элемент $a \in A$ такой, что множество $A - a$ порождает группу Z_n. Заметим, что множество A не может содержаться ни в одном из смежных классов ни одной нетривиальной подгруппы группы Z_n. В силу теоремы 10 существует подгруппа H группы Z_n такая, что $A + H = A$, A/H — арифметическая прогрессия и $A/H \in MS_k(Z_n/H)$. Ясно, что $|Z_n/H| > 1$. Из леммы 9 и того, что $A/H \neq \varnothing$ и $A/H \in PP_k(Z_n/H)$ (иначе само A содержалось бы в некотором смежном классе какой-либо нетривиальной подгруппы группы Z_n), получим, что $|Z_n/H| \geqslant k+2$. Следовательно,

$$|A| = |A/H||H| \leqslant \gamma_k(Z_n/H)|H| = \left(\left\lfloor \frac{|Z_n/H|-2}{k} \right\rfloor + 1\right)|H|. \tag{26}$$

Если $|Z_n/H| \equiv r \pmod k$, $r \in \{0,1\}$, то нетрудно видеть, что (26) противоречит неравенству (24). Если $|Z_n/H| \equiv r \pmod k$, $r \in \{2,\dots,k-1\}$, то из (24) и (26) получим, что

$$\frac{n+1}{k} \leqslant |A/H||H| \leqslant \gamma_k(Z_n/H)|H| = \frac{(|Z_n/H|+k-r)n}{k|Z_n/H|}. \tag{27}$$

Заметим, что из (27) вытекает, что $|A/H| = \gamma_k(Z_n/H)$. Пусть, напротив, $|A/H| = \gamma_k(Z_n/H) - 1$. Тогда

$$\begin{aligned} |A| = (\gamma_k(Z_n/H) - 1)|H| &= \left(\left\lfloor \frac{|Z_n/H|-2}{k} \right\rfloor\right)|H| \\ &\leqslant \left(\frac{|Z_n/H|-2}{k}\right)|H| = \left(\frac{n-2|H|}{k}\right) < \frac{n+1}{k}, \end{aligned}$$

что противоречит (24), т. е. $|A/H| = \gamma_k(Z_n/H)$. Итак, $A/H \in EPP_k(Z_n/H)$. Теорема 17 доказана.

Автор выражает признательность своему научному руководителю профессору А. А. Сапоженко за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Курош А. Г.** Теория групп. — М: Наука, 1967. — 648 с.
2. **Bajnok B.** On the maximum size of a (k, l)-sum-free subset of an Abelian group // J. Number Theory. — 2009. — Vol. 5, N 6. —P. 953–971.
3. **Diananda P. H., Yap H. P.** Maximal sum-free sets of elements of finite groups // Proc. Japan Acad. — 1969. — Vol. 45. — P. 1–5.
4. **Green B., Ruzsa I.** Sum-free sets in Abelian groups // Israel J. Math. — 2005. — Vol. 147. — P. 157–188.
5. **Hamidoune Y. O., Plagne A.** A new critical pair theorem applied to sum-free sets in Abelian groups // Comment. Math. Helv. — 2004. — Vol. 79. — P. 183–207.
6. **Mann H. B.** Addition theorems: the addition theorems of group theory and number theory. (Pure Appl. Math. Wiley Ser. Texts, Monogr. Tracts; Vol. 18) — New York: John Wiley, 1965. — 114 p.
7. **Nathanson M. B.** Additive number theory: inverse problems and the geometry of sumsets. — Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1996. (Grad. Texts Math.; Vol. 165). — 312 p.
8. **Olson J. E.** On the sum of two sets in a group // J. Number Theory. — 1984. — Vol. 18, N 18. — P. 110–120.

Саргсян Ваге Гнелович,
e-mail: vahe_sargsyan@ymail.com

Статья поступила
18 июля 2013 г.