ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—август 2013. Том 20, № 4. С. 27–35

УДК 519.8

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ЭФФЕКТИВНОГО РЕШЕНИЯ ВЕКТОРНОЙ ЗАДАЧИ О МАКСИМАЛЬНОМ РАЗРЕЗЕ ГРАФА *)

В. А. Емеличев, К. Г. Кузьмин

Аннотация. Получена формула радиуса устойчивости эффективного решения векторного варианта задачи о максимальном разрезе графа (MAX-CUT problem) в случае, когда в пространстве параметров задана метрика Гёльдера.

Ключевые слова: многокритериальность, эффективный разрез графа, радиус устойчивости, норма Гёльдера.

Введение

При формализации целенаправленного поведения человека в различных сферах его деятельности (например, проектирование технических систем, планирование и управление в экономике) нередко возникает необходимость отыскания решений, оптимальных не по одному, а по нескольким критериям одновременно. В задачах оптимизации многокритериальность появляется из-за того, что построение однокритериальной модели требует конструирования обобщённой функции полезности, что при наличии противоречивых критериев представляет собой весьма сложную, а в ряде случаев и неразрешимую проблему. Однако даже в хорошо формализованной задаче может возникнуть вопрос о правдоподобности результатов, полученных при её решении, поскольку, как правило, не исключена погрешность исходных данных задачи. Эта погрешность может быть связана с ошибками измерений или округлений, неточностью численных методов, неадекватностью используемых математических моделей и иными факторами. В этих условиях представляется актуальным нахождение предельного уровня величины погрешности, при котором оптимальное решение задачи ещё остаётся таковым. Продолжая исследования, посвящённые указанной проблеме и отражённые

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф11К–095).

в [1, 3–5, 7, 16], проведём анализ устойчивости в метрике Гёльдера эффективного решения многокритериального варианта известной комбинаторной экстремальной задачи о максимальном разрезе графа (MAX-CUT problem) [2, 14], являющейся классической проблемой дискретной оптимизации с многочисленными приложениями [13, 15, 18]. Эту задачу легко свести к задаче булева квадратичного программирования (см., например, [12, 14, 17]). Нами получена формула радиуса устойчивости эффективного решения рассматриваемой задачи. Частично результаты анонсированы в [6, 8].

1. Основные определения и обозначения

Рассмотрим связный ориентированный граф $G = (V, E)$ [9, 10] с множествами вершин $V = N_n$ и дуг $E \subseteq \{(i, j) \mid 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$, где $N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, $|E| = m$, причём множество E упорядочено лексикографически. Пусть все вершины графа G разбиты на два непересекающихся непустых подмножества S и $\overline{S}$. Множество всех дуг графа, концевые вершины которых находятся в разных подмножествах, называется *разрезом графа* и обозначается через $(S, \overline{S})$. Очевидно, что любой разрез $(S, \overline{S})$ графа G порождает булев вектор $x \in \mathbb{E}^n = \{0, 1\}^n$ с компонентами

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{при } i \in S, \\ 0 & \text{при } i \in \overline{S}. \end{cases}$$

Тем самым множеству всех разрезов графа порядка n ставится в соответствие множество булевых векторов $X \subseteq \mathbb{E}^n \setminus \{0_{(n)}, 1_{(n)}\}$, где $0_{(n)} = (0, 0, \ldots, 0)$ и $1_{(n)} = (1, 1, \ldots, 1)$. Поэтому вектор $x \in X$ естественно называть *разрезом графа* G. Очевидно, что если $x \in X$ — разрез, то и $\overline{x} = 1_{(n)} - x \in X$ — разрез, поскольку $(\overline{S}, S)$ — разрез графа. Тем самым $|X|$ — чётное число.

Каждой дуге $(i, j) \in E$ сопоставим вектор-столбец $\left(w_{ij}^1, w_{ij}^2, \ldots, w_{ij}^s\right)^T$, где $w_{ij}^k \in \mathbb{R}$ — вес дуги (i, j), соответствующий критерию $k \in N_s$. Из этих m столбцов, упорядоченных в соответствии с порядком дуг множества E, образуем матрицу $W = \left[w_{ij}^k\right] \in \mathbb{R}^{s \times m}$ со строками $W_k \in \mathbb{R}^m$, $k \in N_s$. Очевидно, что квадратичная функция

$$f_k(x, W_k) = \sum_{(i,j) \in E} w_{ij}^k (x_i - x_j)^2,$$

заданная на множестве векторов X, представляет собой суммарный вес разреза $(S, \overline{S})$ по критерию k, где $S = \{i \in V \mid x_i = 1\}$ и $\overline{S} = \{i \in V \mid x_i = 0\}$.

В результате возникает векторный (s-критериальный) вариант задачи о максимальном разрезе графа

$$Z^s(W): \ f(x,W) = (f_1(x,W_1), f_2(x,W_2), \ldots, f_s(x,W_s)) \to \max_{x \in X},$$

состоящей в поиске множества Парето, т. е. множества эффективных разрезов

$$P^s(W) = \{x \in X \mid X(x,W) = \varnothing\},$$

где $X(x,W) = \{x' \in X \mid f(x,W) \leqslant f(x',W) \ \& \ f(x,W) \neq f(x',W)\}$.

Для всякого натурального числа d в пространстве $\mathbb{R}^d$ зададим норму Гёльдера l_p, $p \in [1,\infty]$: будем считать число

$$\|y\|_p = \begin{cases} \sqrt[p]{\sum\limits_{i \in N_d} |y_i|^p}, & \text{если } 1 \leqslant p < \infty, \\ \max\limits_{i \in N_d} |y_i|, & \text{если } p = \infty, \end{cases}$$

нормой вектора $y = (y_1, y_2, \ldots, y_d) \in \mathbb{R}^d$. Под нормой матрицы будем понимать норму вектора, составленного из всех её элементов.

Через $\langle u,v \rangle$ обозначим скалярное произведение векторов $u, v \in \mathbb{R}^m$. Для любых векторов $u, v \in \mathbb{R}^m$ выполняется неравенство Гёльдера

$$|\langle u,v \rangle| \leqslant \|u\|_p \cdot \|v\|_q, \tag{1}$$

причём при $1 < p < \infty$ равенство в (1) достигается тогда и только тогда, когда

$$|u_r|^p \|v\|_q^q = |v_r|^q \|u\|_p^p, \quad r \in N_m, \tag{2}$$

$$u_r v_r \geqslant 0, \ r \in N_m, \quad \text{или} \quad u_r v_r \leqslant 0, \ r \in N_m, \tag{3}$$

где $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$, $v = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$ (см. [11]). Здесь и далее величины p и q связаны соотношением $1/p + 1/q = 1$, при этом $q = 1$, если $p = \infty$, и $q = \infty$, если $p = 1$.

По аналогии с [4, 5, 7, 16] *радиусом устойчивости* эффективного разреза $x^0 \in P^s(W)$, $s \in \mathbb{N}$, в метрике Гёльдера l_p, $p \in [1,\infty]$, назовём число

$$\rho^s(x^0,p) = \begin{cases} \sup \Xi_p, & \text{если } \Xi_p \neq \varnothing, \\ 0, & \text{если } \Xi_p = \varnothing, \end{cases}$$

где $\Xi_p = \{\varepsilon > 0 \mid \forall U \in \Omega_p(\varepsilon)\,(x^0 \in P^s(W+U))\}$, $\Omega_p(\varepsilon) = \{U \in \mathbb{R}^{s \times m} \mid \|U\|_p < \varepsilon\}$, $\|U\|_p$ — норма Гёльдера l_p матрицы U.

Множество $\Omega_p(\varepsilon)$ называют *множеством возмущающих матриц.*

Легко видеть, что при $X = \{x, \overline{x}\}$ для всякой матрицы $W \in \mathbb{R}^{s\times m}$ справедливо равенство $f(x, W) = f(\overline{x}, W)$, т. е. оба разреза являются эффективными при любых возмущениях матрицы W, т. е. $\rho^s(x, p) = \rho^s(\overline{x}, p) = \infty$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $|X| \geqslant 4$.

Каждому разрезу $x \in \mathbb{E}^n$ поставим в соответствие вектор-строку $\gamma(x) \in \mathbb{E}^m$ с компонентами $\gamma_r(x) = |x_i - x_j|$, $(i, j) \in E$, упорядоченными так, как упорядочены дуги множества E $(r \in N_m)$. Тогда

$$f_k(x, W_k) = \langle W_k, \gamma(x)\rangle, \quad k \in N_s. \tag{4}$$

Для любых разрезов $x^0 \in X$ и $x \in X \setminus \{x^0, \overline{x^0}\}$ положим

$$\sigma_r(x^0, x) = \gamma_r(x^0) - \gamma_r(x), \quad r \in N_m,$$

$$\sigma(x^0, x) = (\sigma_1(x^0, x), \sigma_2(x^0, x), \ldots, \sigma_m(x^0, x)).$$

Рассмотрим оператор проектирования вектора $f \in \mathbb{R}^s$ на неотрицательный ортант:

$$f^+ = [f]^+ = \left(f_1^+, f_2^+, \ldots, f_s^+\right),$$

где $f_k^+ = [f_k]^+ = \max\{0, f_k\}$, $k \in N_s$. Тем самым знак $+$ над вектором означает положительную срезку этого вектора.

2. Леммы

Лемма 1. *Пусть $p \in [1, \infty]$, и пусть разрезы $x^0 \in X$, $x^* \in X \setminus \{x^0, \overline{x^0}\}$ и вектор $a = (a_1, a_2, \ldots, a_s) \in \mathbb{R}^s$ с положительными компонентами связаны неравенствами*

$$\left[f_k(x^0, W_k) - f_k(x^*, W_k)\right]^+ < a_k \|\sigma(x^0, x^*)\|_q, \quad k \in N_s. \tag{5}$$

Тогда при любом числе $\varepsilon > \|a\|_p$ существует такая возмущающая матрица $U^0 \in \Omega_p(\varepsilon)$, что $x^* \in X(x^0, W + U^0)$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > \|a\|_p$. Благодаря (4) и неравенству Гёльдера (1) для любой матрицы $U \in \mathbb{R}^{s\times m}$ со строками U_k, $k \in N_s$, верны соотношения

$$\begin{aligned} f_k(x^0, U_k) - f_k(x^*, U_k) &= \langle U_k, \sigma(x^0, x^*)\rangle \\ &\leqslant \|U_k\|_p \cdot \|\sigma(x^0, x^*)\|_q, \quad k \in N_s. \end{aligned} \tag{6}$$

Далее подберём возмущающую матрицу $U^0 \in \mathbb{R}^{s\times m}$ со строками $U_k^0 = \left(u_{k1}^0, u_{k2}^0, \ldots, u_{km}^0\right)$, $k \in N_s$, такую, что для каждого индекса $k \in N_s$

$$\left\|U_k^0\right\|_p = a_k \tag{7}$$

и при замене U_k на U_k^0 неравенство в (6) превращается в равенство:

$$\left\langle U_k^0, \sigma(x^0, x^*)\right\rangle = -a_k \|\sigma(x^0, x^*)\|_q. \tag{8}$$

Зафиксировав произвольный индекс $k \in N_s$, рассмотрим три возможных случая.

Случай 1: $1 < p < \infty$. Зададим компоненты вектора $U_k^0 = \big(u_{k1}^0, u_{k2}^0, \ldots, u_{km}^0\big)$ по формуле

$$u_{kr}^0 = -a_k \frac{\sigma_r(x^0, x^*)}{\|\sigma(x^0, x^*)\|_p}, \qquad r \in N_m.$$

Тогда $\left\|U_k^0\right\|_p = a_k$, т. е. верно (7). Кроме того, учитывая очевидное равенство $\|\sigma(x^0, x^*)\|_p^p = \|\sigma(x^0, x^*)\|_q^q$, для любого индекса $r \in N_m$ имеем

$$\left|u_{kr}^0\right|^p \|\sigma(x^0, x^*)\|_q^q = a_k^p \,|\sigma_r(x^0, x^*)|^q, \quad u_{kr}^0 \sigma_r(x^0, x^*) \leqslant 0.$$

Поэтому согласно (2) и (3) выполняется равенство (8) при $1 < p < \infty$.

Случай 2: $p = 1$ $(q = \infty)$. Задав компоненты u_{kr}^0, $r \in N_m$, вектора U_k^0 по формуле

$$u_{kr}^0 = \begin{cases} -a_k \sigma_r(x^0, x^*), & \text{если } r = r_{\max}, \\ 0, & \text{если } r \in N_m \setminus \{r_{\max}\}, \end{cases}$$

где $r_{\max} \in \operatorname{Arg}\max\{|\sigma_r(x^0, x^*)| \mid r \in N_m\}$, легко убеждаемся в справедливости равенств (7) и (8) при $p = 1$.

Случай 3: $p = \infty$ $(q = 1)$. Полагая $u_{kr}^0 = -a_k \sigma_r(x^0, x^*)$, $r \in N_m$, убеждаемся в справедливости (7) и (8) для $p = \infty$.

Очевидно, что во всех случаях $\|U^0\|_p = \|a\|_p$. Поэтому $U^0 \in \Omega_p(\varepsilon)$ при любом $p \in [1, \infty]$.

Наконец, учитывая (5) и (8), для любой нормы l_p, $p \in [1, \infty]$, выводим

$$\begin{aligned} & f_k\big(x^0, W_k + U_k^0\big) - f_k\big(x^*, W_k + U_k^0\big) \\ & \qquad = f_k(x^0, W_k) - f_k(x^*, W_k) + f_k\big(x^0, U_k^0\big) - f_k\big(x^*, U_k^0\big) \\ & \qquad \leqslant \big[f_k(x^0, W_k) - f_k(x^*, W_k)\big]^+ - a_k \|\sigma(x^0, x^*)\|_q < 0, \qquad k \in N_s. \end{aligned}$$

Следовательно, $x^* \in X(x^0, W + U^0)$, $U^0 \in \Omega_p(\varepsilon)$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Если число ψ и разрезы x^0 и x таковы, что выполняются неравенства*

$$0 < \psi \|\sigma(x^0, x)\|_q \leqslant \|[f(x^0, W) - f(x, W)]^+\|_p,$$

то для любой возмущающей матрицы $U \in \Omega_p(\psi)$ справедливо соотношение $x \notin X(x^0, W + U)$.

Доказательство. Допустим, что, напротив, существует матрица $U^0 \in \Omega_p(\psi)$ со строками $U_k^0 \in \mathbb{R}^m$, $k \in N_s$, такая, что $x \in X(x^0, W + U^0)$. Тогда для всякого индекса $k \in N_s$ верно неравенство

$$f_k\bigl(x^0, W_k + U_k^0\bigr) \leqslant f_k\bigl(x, W_k + U_k^0\bigr),$$

равносильное ввиду (4) неравенству

$$f_k(x^0, W_k) - f_k(x, W_k) \leqslant f_k\bigl(x, U_k^0\bigr) - f_k\bigl(x^0, U_k^0\bigr).$$

Отсюда легко приходим к соотношению

$$[f_k(x^0, W_k) - f_k(x, W_k)]^+ \leqslant \bigl|f_k\bigl(x, U_k^0\bigr) - f_k\bigl(x^0, U_k^0\bigr)\bigr|,$$

из которого с учётом (1) находим

$$[f_k(x^0, W_k) - f_k(x, W_k)]^+ \leqslant \bigl\|U_k^0\bigr\|_p \cdot \|\sigma(x^0, x)\|_q.$$

Поэтому получаем

$$\|[f(x^0, W) - f(x, W)]^+\|_p \leqslant \|U^0\|_p \cdot \|\sigma(x^0, x)\|_q < \psi \|\sigma(x^0, x)\|_q,$$

что противоречит условию леммы. Лемма 2 доказана.

3. Формула радиуса устойчивости

Теорема 1. *При любых $s \in \mathbb{N}$ и $p \in [1, \infty]$ для радиуса устойчивости эффективного разреза $x^0 \in P^s(W)$ в метрике Гёльдера l_p справедлива формула*

$$\rho^s(x^0, p) = \min_{x \in X \setminus \{x^0, \overline{x^0}\}} \frac{\|[f(x^0, W) - f(x, W)]^+\|_p}{\|\sigma(x^0, x)\|_q}. \tag{9}$$

Доказательство. Для краткости обозначим правую часть формулы (9) через φ. Сначала докажем неравенство $\rho^s(x^0, p) \leqslant \varphi$. Для этого рассмотрим два возможных случая.

Случай 1: $\varphi = 0$. Тогда найдётся разрез $x^* \in X \setminus \{x^0, \overline{x^0}\}$ такой, что $[f(x^0, W) - f(x^*, W)]^+ = 0_{(s)}$. Пусть $\varepsilon > 0$, а вектор $a = (a_1, a_2, \ldots, a_s)$ с положительными компонентами удовлетворяет условию $\|a\|_p < \varepsilon$. Тем самым выполняются неравенства (5). Воспользовавшись леммой 1, убеждаемся в существовании возмущающей матрицы $U^0 \in \Omega_p(\varepsilon)$ с условием $x^* \in X(x^0, W + U^0)$. Следовательно, x^0 — не эффективный разрез задачи $Z^s(W + U^0)$. Таким образом, для любого числа $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство $\rho^s(x^0, p) < \varepsilon$. Значит, учитывая, что радиус устойчивости не может быть отрицательным, заключаем, что $\rho^s(x^0, p) = 0$.

Случай 2: $\varphi > 0$. Пусть $\varepsilon > \varphi$ и разрез $x^* \in X \setminus \{x^0, \overline{x^0}\}$ таков, что

$$\varphi \|\sigma(x^0, x^*)\|_q = \|[f(x^0, W) - f(x^*, W)]^+\|_p,$$

а число $\delta > 1$ удовлетворяет неравенству $\varepsilon > \delta\varphi$. Зададим вектор a по формуле

$$a = \delta \frac{[f(x^0, W) - f(x^*, W)]^+}{\|\sigma(x^0, x^*)\|_q}.$$

Тогда $\|a\|_p = \delta\varphi < \varepsilon$, а компоненты a_k, $k \in N_s$, вектора a удовлетворяют неравенствам (5). Поэтому по лемме 1 найдётся такая возмущающая матрица $U^0 \in \Omega_p(\varepsilon)$, что $x^* \in X(x^0, W + U^0)$. Отсюда $\rho^s(x^0, p) \leqslant \varphi$.

Остаётся показать, что $\rho^s(x^0, p) \geqslant \varphi$. Если $\varphi = 0$, то это неравенство очевидно. Пусть $\varphi > 0$. Тогда в соответствии с определением φ для любого разреза $x \in X \setminus \{x^0, \overline{x^0}\}$ имеют место неравенства

$$0 < \varphi \|\sigma(x^0, x)\|_q \leqslant \|[f(x^0, W) - f(x, W)]^+\|_p.$$

Поэтому согласно лемме 2 $x \notin X(x^0, W + U)$ при любой возмущающей матрице $U \in \Omega_p(\varphi)$. Поскольку $\overline{x^0} \notin X(x^0, W + U)$, множество $X(x^0, W + U)$ пусто. Это означает, что $x^0 \in P^s(W + U)$ при $U \in \Omega_p(\varphi)$. Следовательно, справедливо неравенство $\rho^s(x^0, p) \geqslant \varphi$. Теорема 1 доказана.

Замечание. Ясно, что $\rho^s(x^0, p) = \rho^s(\overline{x^0}, p)$ при любом $x^0 \in P^s(W)$.

4. Следствия

Следствие 1. *Пусть $x^0 \in P^s(W)$, $s \in \mathbb{N}$, — эффективный разрез. Тогда радиус устойчивости разреза x^0 в чебышёвской метрике l_∞ равен*

$$\rho^s(x^0, \infty) = \min_{x \in X \setminus \{x^0, \overline{x^0}\}} \max_{k \in N_s} \frac{f_k(x^0, W) - f_k(x, W)}{\sum\limits_{(i,j) \in E} \left| |x_i^0 - x_j^0| - |x_i - x_j| \right|}.$$

Следствие 2. *Пусть $x^0 \in P^s(W)$, $s \in \mathbb{N}$, — эффективный разрез. Тогда радиус устойчивости разреза x^0 в октаэдрической метрике l_1 равен*

$$\rho^s(x^0, 1) = \min_{x \in X \setminus \{x^0, \overline{x^0}\}} \sum_{k \in N_s} \left[f_k(x^0, W) - f_k(x, W) \right]^+.$$

Если при некотором $p \in [1, \infty]$ радиус устойчивости $\rho^s(x^0, p)$ эффективного разреза x^0 задачи $Z^s(W)$ положителен, то согласно теореме он положителен и для любого $p \in [1, \infty]$. Такой разрез естественно называть *устойчивым*.

Следствие 3. *Эффективный разрез $x^0 \in P^s(W)$, $s \in \mathbb{N}$, устойчив тогда и только тогда, когда среди элементов множества $X \setminus \{x^0, \overline{x^0}\}$ нет ни одного разреза x, удовлетворяющего равенству $f(x^0, W) = f(x, W)$.*

Следствие 4. *Для радиуса устойчивости максимального разреза $x^0 \in P^1(W)$, $W \in \mathbb{R}^{1 \times m}$, скалярной задачи $Z^1(W)$ в метрике Гёльдера l_p, $p \in [1, \infty]$, справедлива формула*

$$\rho^1(x^0, p) = \min_{x \in X \setminus \{x^0, \overline{x^0}\}} \frac{f_1(x^0, W) - f_1(x, W)}{\|\sigma(x^0, x)\|_q}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Воденников А. Г., Емеличев В. А., Кузьмин К. Г.** Об одном типе устойчивости векторной комбинаторной задачи размещения // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. — 2007. — Т. 14, № 2. — С. 32–40.
2. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. — М.: Мир, 1982. — 416 с.
3. **Емеличев В. А., Карпук А. В., Кузьмин К. Г.** О квазиустойчивости лексикографической минимаксной комбинаторной задачи с распадающимися переменными // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2010. — Т. 17, № 3. — С. 32–45.
4. **Емеличев В. А., Кузьмин К. Г.** Анализ чувствительности эффективного решения векторной булевой задачи минимизации проекций линейных функций на $\mathbb{R}_+$ и $\mathbb{R}_-$ // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. — 2005. — Т. 12, № 2. — С. 24–43.
5. **Емеличев В. А., Кузьмин К. Г.** О радиусе устойчивости эффективного решения векторной задачи целочисленного линейного программирования в метрике Гёльдера // Кибернетика и систем. анализ. — 2006. — № 4. — С. 175–181.
6. **Емеличев В. А., Кузьмин К. Г.** Об устойчивости эффективных решений многокритериальной задачи о максимальном разрезе графа // Мат. Всеукр. научн. семинара «Комбінаторна оптимізація та нечіткі множини» (КОНеМ–2011) (Полтава, Украина, 26–27 августа 2011 г.). — С. 39–41.

7. **Емеличев В. А., Кузьмин К. Г.** Общий подход к исследованию устойчивости парето-оптимального решения векторной задачи целочисленного линейного программирования // Дискрет. математика. — 2007. — Т. 19, вып. 3. — С. 79–83.
8. **Емеличев В. А., Кузьмин К. Г.** Постоптимальный анализ многокритериальной задачи о максимальном разрезе графа // Мат. 2-й междунар. науч.-практ. конф. «Веб-программирование и интернет технологии WebConf2012» (Минск, 5–7 июня 2012 г.). — С. 67.
9. **Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.** Лекции по теории графов. 3-е изд. — М.: Либроком, 2013. — 392 с.
10. **Зыков А. А.** Основы теории графов. — М.: Вуз. кн., 2004. — 663 с.
11. **Харди Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г.** Неравенства. — М.: ЛКИ, 2008. — 456 с.
12. **Шило В. П., Шило О. В.** Решение задачи о максимальном разрезе графа методом глобального равновесного поиска // Кибернетика и систем. анализ. — 2010. — № 5. — С. 68–79.
13. **Barahona F., Grötschel M., Jünger M., Reinelt G.** An application of combinatorial optimization to statistical physics and circuit layout design // Oper. Res. — 1988. — Vol. 36, N 3. — P. 493–513.
14. **Burer S., Monteiro R. D. C., Zhang Y.** Rank-two relaxation heuristics for MAX-CUT and other binary quadratic programs // SIAM J. Optim. — 2001. — Vol. 12. — P. 503–521.
15. **Chang K. C., Du D. H.-C.** Efficient algorithms for layer assignment problem // IEEE Trans. Computer-Aided Des. Integrated Circuits Syst. — 1987. — Vol. 6. — P. 67–78.
16. **Emelichev V., Podkopaev D.** Quantitative stability analysis for vector problems of 0-1 programming // Discrete Optim. — 2010. — Vol. 7, N 1–2. — P. 48–63.
17. **Pardalos P., Prokopyev O., Shylo O., Shylo V.** Global equilibrium search applied to the unconstrained binary quadratic optimization problem // Optim. Methods Softw. — 2008. — Vol. 23. — P. 129–140.
18. **Poljac S., Tuza Z.** Maximum cuts and large bipartite subgraphs // DIMACS Ser. Discrete Math. Theor. Comput. Sci. — 1995. — Vol. 20. — P. 181–244.

Емеличев Владимир Алексеевич,
e-mail: emelichev@bsu.by
Кузьмин Кирилл Геннадьевич,
e-mail: kuzminkg@mail.ru

Статья поступила
11 октября 2012 г.

Переработанный вариант —
1 января 2013 г.