ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—август 2013. Том 20, № 4. С. 65–87

УДК 519.95

О МИНИМАЛЬНЫХ СХЕМАХ В БАЗИСЕ ШЕФФЕРА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ *)

Ю. А. Комбаров

Аннотация. Рассматриваются реализации линейных булевых функций схемами из функциональных элементов в базисе Шеффера. Найдено точное значение сложности реализации неоднородной линейной функции, а также получено описание всех минимальных схем, реализующих однородную линейную функцию.

Ключевые слова: схема из функциональных элементов, линейная булева функция, штрих Шеффера.

1. Основные определения и формулировка результатов

Рассматриваются реализации линейных булевых функций схемами из функциональных элементов [1] в базисах Б $= \{\overline{x\&y}\}$ и Б$' = \{\overline{x\&y}, \overline{x}\}$. Вес штриха Шеффера принимается равным единице, а вес инвертора — 0.5. Как и в [2, 3], предполагается, что на входы схем разрешается подавать константы.

Для схемы S в базисе Б или Б$'$ сумму весов функциональных элементов в S обозначим через $L(S)$ и назовём *сложностью* схемы S. *Сложностью реализации* булевой функции f в базисе Б (Б$'$) называется число $\min L(S)$, где минимум берётся по всем схемам S в базисе Б (Б$'$), реализующим f. Сложность реализации функции f в базисе Б обозначим через $L(f)$, а в Б$'$ — через $L'(f)$.

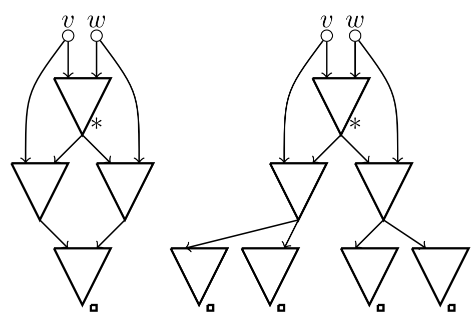
Двувходовой элемент e в схеме S назовём *верхним*, если оба его входа соединены с входами схемы. Легко заметить (например, с учётом возможности монотонной нумерации элементов схемы [7]), что во всякой схеме в базисе Б существует хотя бы один верхний элемент.

Пусть S — схема из функциональных элементов, содержащая вход, соответствующий переменной x. Для сокращения записи вместо «вход схемы S, соответствующий переменной x» пишем «вход x схемы S».

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 11–01–00508).

Пусть v — вход элемента e схемы S, а w — какая-то вершина этой схемы (т. е. либо некоторый вход схемы, либо выход какого-либо её элемента). Будем говорить, что вершина w и вход v *связаны*, если v соединён либо с вершиной w, либо с выходом некоторого инвертора e^-, вход которого соединён с w. Кроме того, будем говорить, что *между* w *и* v *есть инвертор*, если вход v соединён с выходом инвертора, вход которого соединён с w.

Пусть S — схема из функциональных элементов, содержащая входы $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$. Будем говорить, что переменная x_{i_1} *забивается* переменными $x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$, если существуют константы $c_2, \ldots, c_k$ такие, что функция, реализуемая схемой после подачи их на входы $x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$, не зависит от переменной x_{i_1}.



(a) (b)

Рис. 1

Схему на рис. 1(a) будем называть *стандартным* блоком, а на рис. 1(b) — *специальным*. Все элементы этих блоков двувходовые. На рисунках буквами w, v отмечены *главные* входы блоков, все остальные входы блоков будем называть *побочными* (побочные входы есть только у специального блока), звёздочкой помечен *главный элемент блока*. Знаком $\square$ на рисунках отмечены *выходные* элементы блоков. Стандартный или специальный блок входит в некоторую схему S *правильно*, если выходы всех элементов этого блока, кроме выходных, не соединяются с входами элементов, не принадлежащих блоку, и никакие побочные входы блока не связаны с выходами элементов, принадлежащих блоку.

Основными результатами нашей работы являются следующие теоремы.

Теорема 1. *Всякая минимальная схема в базисе Б, реализующая линейную функцию $l_n = x_1 \oplus \ldots \oplus x_n$, состоит из $n-1$ стандартных блоков, входящих в схему правильно.*

Теорема 2. *При любом n сложность реализации линейной функции $\bar{l}_n = x_1 \oplus \ldots \oplus x_n \oplus 1$, $n \geqslant 2$, в базисе Б составляет $4n-3$.*

2. Свойства схем и вспомогательные утверждения

Теорема 3 [6]. *Сложность реализации линейной функции* $l_n = x_1 \oplus \ldots \oplus x_n$, $n \geqslant 2$, *в базисах Б и Б′ равна* $4n - 4$. *Сложность реализации линейной функции* $\bar{l}_n = l_n \oplus 1$, $n \geqslant 2$, *в Б′ равна* $4n - 4$, *а для сложности реализации* $\bar{l}_n$ *в Б справедливы оценки* $4n - 4 \leqslant L(\bar{l}_n) \leqslant 4n - 3$.

Всякую минимальную схему, реализующую линейную функцию от n переменных ($n \geqslant 2$) в базисе Б или Б′ со сложностью $4n - 4$, будем называть *правильной*, если входы этой схемы не соединяются с входами инверторов. Поскольку всякая схема в базисе Б является схемой в Б′, в дальнейшем будем рассматривать все правильные схемы в базисе Б′.

Как и в [6], будем использовать следующие свойства схем в базисе Б′.

Свойство 1. *Если на вход некоторого двувходового элемента в схеме* S *подаётся тождественный нуль, то его можно удалить из* S *так, что реализуемая* S *функция не изменяется.*

Свойство 2. *Если на вход некоторого двувходового элемента в схеме* S *подаётся тождественная единица, то его можно заменить инвертором так, что реализуемая* S *функция не изменяется.*

Свойство 3. *Если на вход некоторого инвертора в схеме* S *подаётся тождественный нуль или тождественная единица, то его можно удалить из схемы* S *так, что реализуемая* S *функция не изменяется.*

Свойство 4. *Если на выходе какого-либо элемента* e *схемы* S *реализуется функция, тождественно равная нулю или единице, то его можно удалить из* S *так, что реализуемая* S *функция не изменяется.*

Свойство 5. *Пусть* S_n, $n \geqslant 2$, — *схема в базисе Б′, реализующая линейную функцию от* n *переменных и содержащая вход* x, *который соединён с входом ровно одного элемента* e. *Пусть элемент* e *реализует функцию* $x \oplus 1$. *Тогда элемент* e *можно удалить из схемы* S_n *так, что получившаяся схема будет реализовывать линейную функцию от* n *переменных.*

Доказательство. Удалим из схемы S_n элемент e, а все входы элементов, соединявшиеся с выходом e, соединим с входом x. Получившаяся схема S'_n будет реализовывать линейную функцию (являющуюся отрицанием той функции, которую реализовывала схема S_n).

Свойство 6. *Если из правильной схемы* S_n, *реализующей линейную функцию от* n *переменных, удалить несколько элементов и заменить несколько двувходовых элементов инверторами так, что уменьше-*

ние сложности схемы больше $4k$, $k \in \mathbb{N}$, то после любого изменения соединений оставшихся элементов нельзя получить схему, реализующую линейную функцию от $n-k$ переменных.

Свойство 7. *В правильной схеме ни одна из переменных не может быть забиваемой другими переменными.*

Свойство 6 следует из теоремы 3, а свойство 7, очевидно, выполнено для любой схемы, реализующей линейную функцию.

Лемма 1. *Пусть S — правильная схема. Тогда в этой схеме не существует двувходового элемента, оба входа которого соединены с одной и той же вершиной схемы.*

Доказательство. Если в схеме S найдётся такой элемент, то его можно заменить инвертором, не изменив функции, реализуемой схемой. Это противоречит минимальности схемы S. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть S — правильная схема, x — один из её входов, e_1 и e_2 — двувходовые элементы в S, вход x соединён с входами элементов e_1 и e_2. Тогда выход e_1 не может быть соединён лишь с входом e_2.*

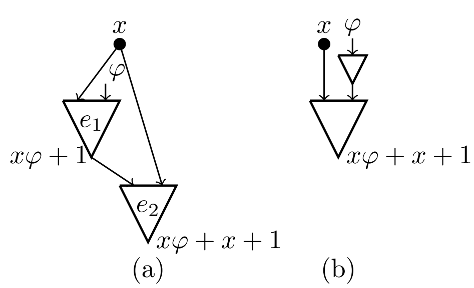


Рис. 2

Доказательство. Предположим, что выход элемента e_1 соединён лишь с входом элемента e_2. Пусть один из входов элемента e_1 соединён с входом x, а на второй вход подаётся функция φ. Тогда можем заменить рассматриваемую подсхему (рис. 2(a)) подсхемой меньшей сложности (рис. 2(b)) так, что реализуемая схемой функция не изменится; противоречие минимальности схемы S. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть S_n — правильная схема, реализующая линейную функцию от n переменных. Тогда каждый вход этой схемы соединён с входами ровно двух двувходовых элементов.*

Доказательство. Если утверждение леммы неверно, то в схеме найдётся вход x, который соединён с входом ровно одного двувходового элемента или с входами хотя бы трёх двувходовых элементов.

Случай 1. В схеме S_n некоторый вход x соединён с входом лишь одного двувходового элемента e. В [6] показано, что этот случай невозможен для схем, реализующих линейную функцию.

Случай 2. В схеме S_n есть вход x, соединённый с входами трёх двувходовых элементов e_1, e_2, e_3. Покажем, что выход каждого из элементов e_1, e_2, e_3 соединён с входом некоторого элемента, отличного от e_1, e_2, e_3. Предположим обратное. Не ограничивая общности будем считать, что выход элемента e_1 не соединён с входами элементов, отличных от e_2 и e_3. Поскольку схема S_n минимальна и элемент e_1, очевидно, не является выходным, выход e_1 должен соединяться с входом хотя бы одного элемента. Согласно лемме 2 выход e_1 не может соединяться только с входом e_2 или только с входом e_3. Отсюда следует, что выход e_1 соединяется с входами элементов e_2 и e_3. Но в таком случае элементы e_2 и e_3 реализуют одинаковые функции, что противоречит минимальности схемы S_n.

Случай 2.1. Выходы элементов e_1, e_2, e_3 соединены с входами элементов e_4, e_5, e_6 соответственно, элементы e_4, e_5, e_6 различны и отличны от элементов e_1, e_2, e_3 (рис. 3(a)).

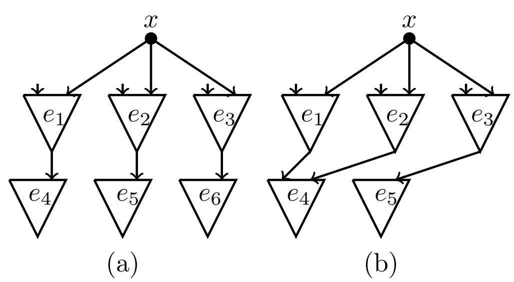


Рис. 3

Подадим на вход x константу 0. Тогда элементы e_1, e_2, e_3 реализуют константу, а на входы элементов e_4, e_5, e_6 поступает константа. Это означает, что можно удалить элементы e_1, e_2, e_3 согласно свойству 4 и удалить или заменить инверторами элементы e_4, e_5, e_6 согласно одному из свойств 1–3, получив схему S_{n-1} для линейной функции в базисе Б$'$. Но $L(S_n) - L(S_{n-1}) \geqslant 4.5$; противоречие свойству 6.

Случай 2.2. В схеме S_n найдутся два элемента e_4, e_5 такие, что элемент e_4 двувходовый, оба входа элемента e_4 соединены с выходами каких-то двух элементов из $\{e_1, e_2, e_3\}$ (скажем, элементов e_1 и e_2), а один из входов элемента e_5 связан с выходом оставшегося элемента из $\{e_1, e_2, e_3\}$ (рис. 3(b)).

Подадим на вход x константу 0. Тогда элементы e_1, e_2, e_3 реализуют константу, на входы элемента e_4 поступают константы, он тоже реализует константу и на вход e_5 поступает константа. Удалим элементы e_1, e_2,

e_3, e_4 согласно свойству 4 и элемент e_5 удалим или заменим инвертором согласно одному из свойств 1–3, получив схему S_{n-1} для линейной функции в базисе Б$'$. Но $L(S_n) - L(S_{n-1}) \geqslant 4.5$, что противоречит свойству 6. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть S_n, $n \geqslant 2$, — правильная схема, реализующая линейную функцию от n переменных, e_1 — верхний элемент в ней. Тогда в схеме S_n можно выделить правильно входящий в схему стандартный или специальный блок, главным элементом которого будет элемент e_1.*

Доказательство. Пусть входы элемента e_1 соединены с входами x_1 и x_2. По лемме 3 каждый из входов x_1, x_2 соединён с входами ровно двух двувходовых элементов. Рассмотрим следующие случаи.

Случай 1. Хотя бы один из входов x_1 и x_2 (скажем, x_1) соединён с входом верхнего двувходового элемента e_2, отличного от e_1. Пусть другой вход элемента e_2 соединён с входом x_i (быть может, $x_i = x_2$). В таком случае при подаче на входы x_2 и x_i констант 0 реализуемая схемой функция не будет зависеть от переменной x_1; противоречие свойству 7.

Случай 2. Ни один из входов x_1 и x_2 не соединён с входами верхних двувходовых элементов, отличных от e_1. Пусть вход x_1 соединён с входом двувходового элемента e_2, а вход x_2 соединён с входом двувходового элемента e_3 (e_2 и e_3 отличны от e_1).

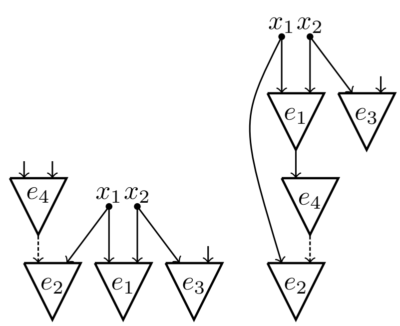
Случай 2.1. Покажем, что при $x_2 = 0$ элемент e_4 реализует константу (рис. 5(a)). Подадим константу 0 на вход x_2; пусть φ — функция, которую реализует после этого элемент e_4. Вход x_1 соединён лишь с входом элемента e_1, реализующего константу 1, и с входом элемента e_2. Поэтому функция φ не зависит от x_1 — в противном случае схема содержала бы циклы. Если φ не является тождественной константой, то можно подобрать такие значения переменных $x_3, \ldots, x_n$, при которых на вход e_2 подаётся константа 0. Но это означает забиваемость переменной x_1 остальными переменными, что противоречит свойству 7.

Случай 2.1.1. Подадим на вход x_2 константу 0. Тогда элементы e_1, e_3, e_4 реализуют константу, на вход элемента e_5 поступает константа, а элемент e_2 реализует функцию $x_1 \oplus 1$ (поскольку выход элемента e_4 связан с входом элемента e_2, на вход e_2 поступает константа, причём эта константа — единица, ведь в противном случае переменная x_2 забивала бы переменную x_1). Удалим элементы e_1, e_3, e_4 согласно свойству 4, элемент e_5 удалим или заменим инвертором согласно одному из свойств 1–3 и получим схему S_{n-1} для линейной функции от $n - 1$ переменных,

Рис. 4. Разбиение случая 2 на подслучаи

для которой $L(S_n) - L(S_{n-1}) \geqslant 3.5$. В схеме S_{n-1} вход x_1 соединён лишь с входом двувходового элемента e_2, реализующего функцию $\overline{x}_1$. Поэтому при удалении согласно свойству 5 из схемы S_{n-1} элемента e_2 получающаяся схема S'_{n-1} будет реализовывать линейную функцию от $n-1$ переменных. Но $L(S_n) - L(S'_{n-1}) \geqslant 4.5$, что противоречит свойству 6.

Случай 2.1.2. Этот случай (рис. 5(b)) является отрицанием случая 2.1.1, так как согласно лемме 2 выход элемента e_1 не может соединяться лишь с входом элемента e_3 (если между выходом e_1 и входом e_3 есть инвертор, то оказывается верным предположение случая 2.1.1).



(a) (b)

Рис. 5

Заметим, что между выходом элемента e_4 и входом элемента e_2 есть инвертор e^-, в противном случае при $x_2 = 0$ на вход e_2 поступает константа 0, а значит, переменная x_2 забивает переменную x_1. Если подать на вход x_2 константу 0, то элементы e_1, e_3, e_4 и e^- будут реализовывать константы, а на вход элемента e_2 будет подаваться 1. Таким образом, можно удалить из схемы S_n элементы e_1, e_3, e_4 и e^- согласно свойствам 4 и 3, получив схему S_{n-1} для линейной функции от $n-1$ переменных, для которой $L(S_n) - L(S_{n-1}) \geqslant 3.5$. Заметим, что вход x_1 в схеме S_{n-1} соединён с входом единственного двувходового элемента e_2, реализующего функцию $\overline{x}_1$. Как и в случае 2.1.1, пользуясь свойством 5, приходим к противоречию.

Случай 2.2.1. В этом случае (рис. 6(a)) элемент e_1 реализует функцию $\overline{x_1 x_2}$, элемент e_3 — функцию $\overline{x_1 x_2 \oplus \sigma_1 x_2}$, а элемент e_2 — функцию $\overline{(\sigma_1 \oplus 1)x_1 x_2 \oplus \sigma_2 x_1}$, где σ_1, σ_2 — булевы константы, $\sigma_1 = 1$, когда между выходом e_1 и входом e_3 нет инвертора, а $\sigma_2 = 1$, когда между выходом e_3 и входом e_2 нет инвертора. Отметим, что при $\sigma_1 = 0$ элементы e_1 и e_3 реализуют одинаковые функции, а при $\sigma_1 = 1$ элемент e_2 реализует константу или функцию $\overline{x}_1$, и его можно удалить из схемы согласно свойству 4 или заменить инвертором. Таким образом, при любом значении σ_1 схема S_n не минимальна; противоречие.

Случай 2.2.2. Подадим константу 0 на вход x_1 (рис. 6(b)). Тогда элементы e_1 и e_2 реализуют константу 1 и на вход e_4 подаётся константа. На правый (не соединённый с входом x_2) вход элемента e_3 подаётся 1 (при подаче на этот вход какой-либо другой функции переменная x_2 забивается остальными переменными). Отсюда следует, что вход e_3 должен быть связан с входом некоторого двувходового элемента, реализующего константу. Вход e_3 не может быть связан с выходом e_2, так как схема не содержит циклов, и не может быть связан с выходом e_1 согласно предположению случая 2.2.2. Таким образом, вход e_3 может быть связан с выходом e_4 или с выходом элемента e_5, отличного от e_1–e_4.

Случай 2.2.2.1. Напомним, что на вход x_1 подана константа 0, а на вход e_3 — константа 1. Удалим элементы e_1, e_2, e_5 согласно свойству 4, удалим элемент e_3 согласно свойству 5 и удалим или заменим инвертором элемент e_4 согласно одному из свойств 1 или 2. Получим схему S_{n-1} такую, что $L(S_n) - L(S_{n-1}) \geqslant 4.5$; противоречие свойству 6.

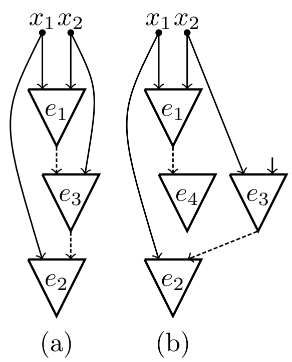


Рис. 6

Случай 2.2.2.2. Элемент e_4 должен реализовывать константу, так как на вход e_3 подаётся 1. Это возможно тогда и только тогда, когда между выходом e_1 и входом e_4 есть инвертор или когда между выходом e_1 и входом e_4 нет инвертора и вход e_4 соединён с выходом элемента, реализующего константу 0.

Случай 2.2.2.2.1. Удалив элементы e_1, e_2, e_4, e^- согласно свойству 4 и элемент e_3 согласно свойству 5, получим схему S_{n-1} такую, что $L(S_n) - L(S_{n-1}) \geqslant 4.5$. Это неравенство противоречит свойству 6.

Случай 2.2.2.2.2. Отметим, что таким элементом может быть только отличный от элементов e_1–e_4 элемент e_5, ведь элементы e_1–e_3 реализуют функции, отличные от нуля. Можно удалить элементы e_1, e_2, e_4 и e_5 согласно свойству 4 и e_3 согласно свойству 5, получив схему S_{n-1} такую, что $L(S_n) - L(S_{n-1}) \geqslant 4.5$; противоречие свойству 6.

Случай 2.3. У элементов e_2 и e_3 один из входов связан с выходом элемента e_1 (см. рис. 7).

Случай 2.3.1.1. Подадим константу 0 на вход x_2. Тогда элементы e_1, e_2, e_3, e^- реализуют константы, а на входы элементов e_4 и e_5 подаются константы. Удалив из S_n элементы e_1, e_2, e_3, e^- согласно свойству 4, удалив или заменив инверторами элементы e_4, e_5 по одному из свойств 1–3, получим схему S_{n-1}, реализующую линейную функцию от $n-1$ переменных, для которой $L(S_n) - L(S_{n-1}) > 4$, что противоречит свойству 6.

Случай 2.3.1.2. Подадим на вход x_2 константу 0. Тогда элементы e_1, e_2, e_3, e_4, e^- реализуют константы и их можно удалить по свойству 3, получив схему для линейной функции от $n-1$ переменных; противоречие свойству 6.

Случай 2.3.2.1. Этому случаю соответствует подсхема на рис. 8(a). Покажем, что между выходом e_2 (e_3) и входом e_4 нет инверторов. Не ограничивая общности, предположим, что между выходом e_2 и входом e_4 есть инвертор e^-. Подадим на вход x_1 константу 0. Тогда элементы e_1

и e_2 будут выдавать константу 1, элемент e_3 — функцию $\overline{x}_2$, элемент e^- — константу 0, а значит, элемент e_4 будет выдавать 1. Удалим из S_n элементы e_1, e_2, e_4, e^- и получим схему S_{n-1} для линейной функции от $n-1$ переменных. Заметим, что $L(S_n) - L(S_{n-1}) \geqslant 3.5$. В схеме S_{n-1} вход x_2 соединён лишь с входом элемента e_3, реализующего функцию $\overline{x}_2$, что с учётом свойства 5 приводит к противоречию.

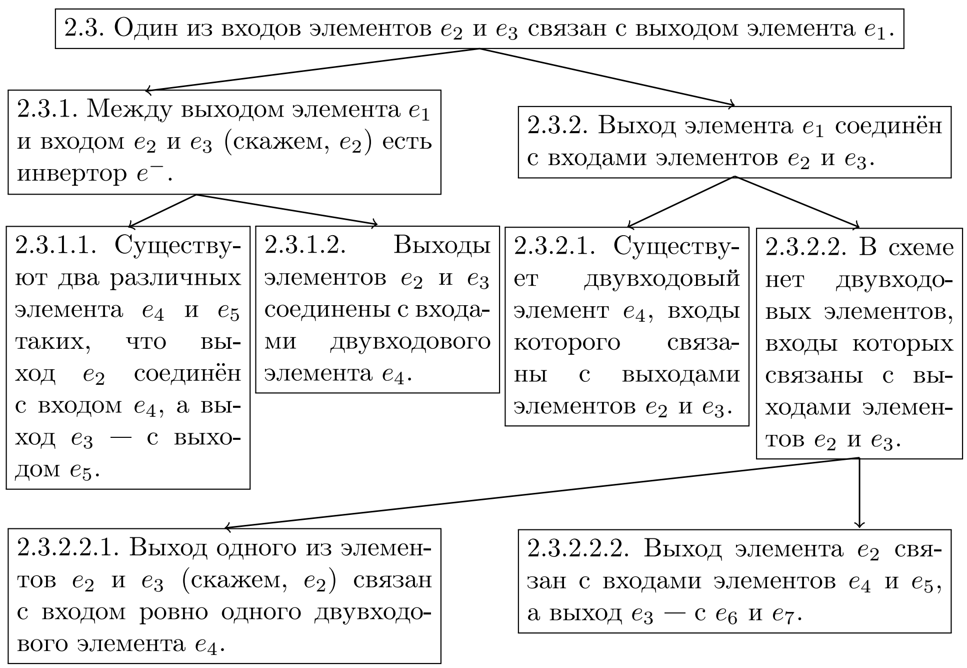
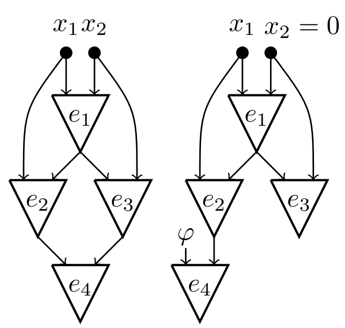


Рис. 7. Разбиение случая 2.3 на подслучаи

Таким образом, выходы элементов e_2 и e_3 соединены с входами элемента e_4, а это означает, что e_1, e_2, e_3, e_4 входят в стандартный блок (рис. 1(a)). Этот стандартный блок входит в схему правильно, ведь если выход одного из элементов e_1, e_2 и e_3 соединяется с входом элемента e_5, отличного от элементов e_2, e_3 и e_4, то при подаче константы 0 на один из входов x_1, x_2 можно будет удалить из схемы элементы e_1–e_4, удалить или заменить инвертором элемент e_5 и получить схему для линейной функции от $n-1$ переменных. Это противоречит свойству 6, поэтому в рассматриваемом случае утверждение леммы верно.

Случай 2.3.2.2.1. Подадим на вход x_2 константу 0. Пусть φ — функция, которая подаётся после этого на тот вход элемента e_4, который не связан с выходом e_2 (рис. 8(b)). Покажем, что $\varphi \equiv 1$. Действительно, в противном случае можно подобрать такие значения переменных $x_3, \ldots, x_n$, что φ обратится в нуль, ведь функция φ не зависит от переменной x_1. Тогда функция, реализуемая на выходе схемы, не будет зависеть от переменной x_1, что противоречит свойству 7.



(a) (b)

Рис. 8

Вход элемента e_4, не связанный с выходом e_2, должен быть соединён с выходом некоторого элемента, реализующего единицу при $x_2 = 0$. Это может быть выход элемента e_1 или выход некоторого элемента e_5, не совпадающего с элементами e_1, e_2, e_3 (выход элемента e_3 не может быть соединён с входом элемента e_4 согласно предположению случая 2.3.2.2).

Если вход e_4 соединён с выходом e_1, то элемент e_2 реализует функцию $x_1x_2 \oplus \overline{x}_1$, а элемент e_4 — одну из функций x_1, $x_1x_2 \oplus \overline{x}_1$ (в зависимости от того, есть ли инвертор между выходом e_2 и входом e_4). Очевидно, что схема S_n не может быть минимальной вне зависимости от того, какую из этих двух функций реализует элемент e_4.

Соединение входа элемента e_4 с выходом какого-нибудь отличного от e_1–e_4 элемента e_5 исключается, так как в этом случае при $x_2 \equiv 0$ оказалось бы возможным удалить из S_n элементы e_1–e_5 с общим весом не менее 4.5 и получить схему S_{n-1}, реализующую l_n или $\bar{l}_n$; противоречие свойству 6.

Случай 2.3.2.2.2. Покажем, что между выходом e_2 и входами элементов e_4, e_5 и между выходом e_3 и входами элементов e_6, e_7 нет инверторов. Предположим обратное. Не ограничивая общности, будем считать, что между выходом e_2 и входом e_4 есть инвертор e^-. Подадим константу 0 на вход x_1. Тогда элементы e_1, e_2, e_4, e^- будут реализовывать константы, а на входы элементов e_3 и e_5 будут подаваться константы. Удалим из схемы S_n элементы e_1, e_2, e_4 и e^- по свойству 4 и удалим или заменим инверторами элементы e_3, e_5 по одному из свойств 1 или 2 и получим схему S_{n-1} для линейной функции от $n-1$ переменных. Но $L(S_n) - L(S_{n-1}) \geqslant 4.5$, что противоречит свойству 6.

Таким образом, элементы e_1–e_7 составляют специальный блок B. Покажем, что он входит в схему правильно. Предположим обратное. Тогда возможны следующие случаи.

Случай 2.3.2.2.2.1. В схеме найдётся элемент e_8, отличный от элементов e_1–e_7 такой, что его вход соединён с выходом хотя бы одного из элементов e_1, e_2, e_3.

Случай 2.3.2.2.2.1.1. Вход e_8 соединён с выходом одного из элементов e_1, e_2. Подадим константу 0 на вход x_1. Удалим e_1 и e_2 по свойству 4, удалим или заменим инверторами элементы e_4, e_5 и e_8 по свойству 2 или 4, а затем удалим элемент e_3, пользуясь свойством 5. Получим схему S'_{n-1} для линейной функции от $n-1$ переменных. Но $L(S_n) - L(S'_{n-1}) \geqslant 4.5$; противоречие свойству 6.

Случай 2.3.2.2.2.1.2. Вход элемента e_8 соединён с выходом элемента e_3. Повторяем рассуждения предыдущего случая с тем отличием, что константа 0 подаётся не на вход x_1, а на вход x_2.

Случай 2.3.2.2.2.2. Какой-либо из побочных входов блока B связан с выходом одного из элементов e_1, e_2, e_3. Отметим, что в этом случае один из побочных входов блока B соединён с выходом одного из элементов e_1–e_3, в противном случае выход одного из элементов e_1–e_3 оказывается соединён с выходом некоторого инвертора, что, как и в случае 2.3.2.2.2.1, приводит к противоречию. Выход элемента e_2 (или e_3) не может быть соединён с каким-либо побочным входом блока B, так как это приводит к противоречию либо с леммой 1, либо с предположением случая 2.3.2.2. Выход e_1 не может быть соединён с каким-либо побочным входом блока B, поскольку тогда один из выходных элементов блока B реализует одну из функций $\overline{x}_1$ или $\overline{x}_2$, что противоречит минимальности схемы S_n. Отсюда следует, что рассматриваемый случай невозможен. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Пусть S_n, $n \geqslant 3$, — правильная схема, реализующая линейную функцию от n переменных и содержащая правильно входящий в схему специальный блок B, главные входы которого соединены с двумя входами схемы. Тогда в S_n не существует входа, соединённого с входами более чем одного выходного элемента блока B.*

Доказательство проводим от противного. Пусть входы схемы x_1 и x_2 соединены с главными входами блока B, а вход x_3 соединён с входами более чем одного выходного элемента блока B.

Пусть e_1 — главный элемент блока B, входы элементов e_2 и e_3 соединены с выходом e_1, элементы e_4, e_5, e_6 и e_7 — выходные элементы блока B, выход e_2 соединён с входами элементов e_4 и e_5. Отметим, что вход x_3 соединён с входом ровно одного элемента из пары $\{e_4, e_5\}$ и ровно одного элемента из пары $\{e_6, e_7\}$ (если вход x_3 соединён с входами обоих элементов из пары $\{e_4, e_5\}$ ($\{e_6, e_7\}$), то элементы этой пары реализуют одинаковые функции, что исключено в минимальной схеме). Не ограничивая общности, считаем, что вход x_3 соединён с входами элементов e_5 и e_6. Рассмотрим следующие случаи.

Случай 1. Выход хотя бы одного из элементов e_5, e_6 (скажем, e_5) связан с входом некоторого выходного элемента блока B. Таким выходным элементом может быть элемент e_4 или элемент e_7, так как вход элемента e_6 соединён с входом схемы x_3.

Случай 1.1. Выход e_5 связан с входом e_4 (рис. 9(a)). Подадим на вход x_1 константу 0. Тогда элементы e_1 и e_2 будут реализовывать константу 1, элементы e_3, e_5 — функции $\overline{x}_2$, $\overline{x}_3$, а элемент e_4 — одну из функций x_3, $\overline{x}_3$. Удалим элементы e_1 и e_2 по свойству 4, а e_3 — по свойству 5, заменим e_5 на инвертор по свойству 2 и удалим элемент e_4, реализующий либо x_3, либо $\overline{x}_3$. Получим схему S_{n-1}, реализующую линейную функцию от $n-1$ переменных, для которой $L(S_n) - L(S_{n-1}) \geqslant 4.5$; противоречие свойству 6.

Случай 1.2. Выход e_5 связан с входом e_7. Тогда найдётся отличный от e_1–e_7 двувходовый элемент e_8, вход которого связан с выходом e_5. Действительно, если выход e_5 связан только с входом e_7, то при подаче на входы x_1 и x_2 констант 0 и 1 соответственно реализуемая схемой функция не зависит от x_3, что противоречит свойству 7.

Заметим также, что между выходом e_5 и входом e_7 нет инвертора. Действительно, при наличии инвертора функция, реализуемая схемой после подачи на входы x_1 и x_3 константы 0, не зависит от x_2; противоречие свойству 7. Подсхема для случая 1.2 показана на рис. 9(b).

Случай 1.2.1. Выход элемента e_7 не соединён с входом элемента e_4.

Случай 1.2.1.1. Между выходом e_5 и входом e_8 есть инвертор e^-. Подадим на входы схемы x_1 и x_2 константы 1 и 0 соответственно. Тогда элементы e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e^-, e_8 и e_7 будут реализовывать константы, их можно удалить по свойству 4, а элемент e_6 будет реализовывать функцию $\overline{x}_3$ и его можно удалить по свойству 5. Схема S_{n-2}, полученная после удаления элементов, будет реализовывать линейную функцию от $n-2$ переменных и $L(S_n) - L(S_{n-2}) = 8.5$, что противоречит свойству 6.

Случай 1.2.1.2. Между выходом e_5 и входом e_8 нет инвертора. Подадим на входы схемы x_1 и x_2 константы 1 и 0 соответственно. Тогда элементы e_1–e_5 и e_7 реализуют константы, их можно удалить по свойству 4, элемент e_6 реализует функцию $\overline{x}_3$, его можно удалить по свойству 5, а на вход e_8 подаётся константа 1 и его можно заменить инвертором по свойству 2. Получим схему S_{n-2}, реализующую линейную функцию от $n-2$ переменных, для которой $L(S_n) - L(S_{n-2}) = 7.5$.

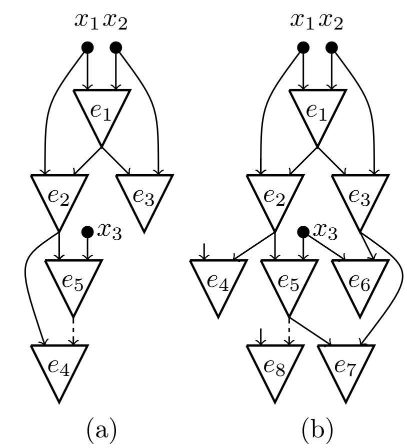


Рис. 9

Заметим, что в схеме S_n выходы элементов e_7, e_4 не соединены с входами элементов e_1–e_7. Из этого следует, что в схеме S_{n-2} на какие-то два входа элементов подаются константы (с выходов e_4 и e_7). Если эти два входа принадлежат одному двувходовому элементу, то можно удалить этот элемент из схемы S_{n-2} по свойству 4, а если это входы двух различных элементов, то можно удалить эти элементы или заменить их инверторами по одному из свойств 1–3. В обоих случаях сложность схемы S_{n-2} уменьшится ещё не менее чем на 1, что приводит к противоречию со свойством 6.

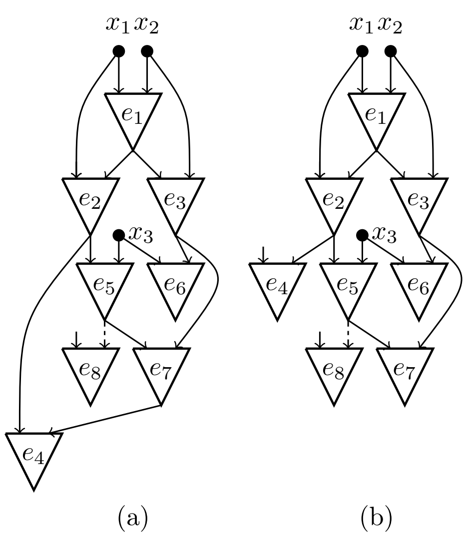


Рис. 10

Случай 1.2.2. Выход e_7 соединён с входом e_4 (рис. 10(a)). Тогда элемент e_7 реализует $x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_3 \oplus x_3 \oplus x_2$, а e_4 — функцию $\overline{x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_3 \oplus x_3 \oplus x_2}$. В таком случае e_4 можно заменить инвертором, вход которого соединяется с выходом e_7; противоречие минимальности схемы S_n.

Случай 2. Выходы элементов e_5 и e_6 не связаны ни с какими входами выходных элементов блока B (разбиение этого случая на подслучаи см. на рис. 11).

Случай 2.1. Выходы элементов e_5 и e_6 соединены со входами некоторого двувходового элемента e_8. В этом случае элемент e_8 и реализует функцию x_3, что противоречит минимальности схемы S_n.

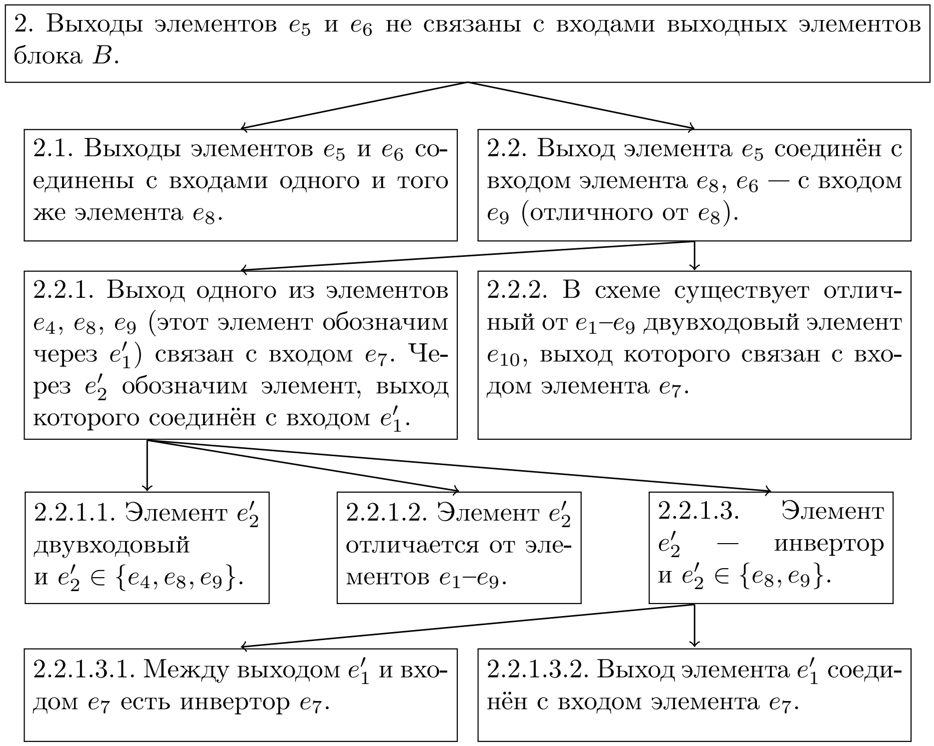


Рис. 11. Разбиение случая 2 на подслучаи

Случай 2.2. Выход e_5 соединён с входом e_8, выход e_6 — с входом e_9, элементы e_8 и e_9 различны и отличны от элементов e_1–e_7 (рис. 10(b)). Отметим, что в этом случае при подаче на входы схемы x_1 и x_3 нулей на вход элемента e_7 (не соединённый с выходом элемента e_3) поступает константа 1, ведь если на его вход поступает какая-либо другая функция, то переменная x_2 забивается остальными переменными, что противоречит свойству 7.

Среди рассматриваемых элементов с входом e_7 могут быть связаны только выходы элементов e_4, e_8, e_9. Действительно, выходы элементов e_5 и e_6 не могут быть связаны с правым входом e_7 по предположению случая 2, а выходы элементов e_1, e_2 и e_3 не могут быть связаны с правым входом e_7, потому что блок B входит в схему S_n правильно.

Случай 2.2.1. Выход одного из элементов e_4, e_8, e_9 (обозначим этот элемент через e'_1) связан с входом e_7. Подадим нули на входы схемы x_1 и x_3. Тогда элементы e_1, e_2, e_5, e_6 реализуют константу 1, элемент e_3 реализует функцию $\overline{x}_2$, элемент e_7 — функцию x_2, а на входы элементов e_4,

e_8, e_9 подаётся константа 1. Удалим элементы e_1, e_2, e_5 и e_6 по свойству 4, удалим e_7, соединив с входом x_2 входы всех элементов, с которыми соединялся выход e_7, удалим e_3, который после удаления элементов e_6 и e_7 станет «висячим», и удалим или заменим инверторами элементы e_4, e_8 и e_9 согласно одному из свойств 3 или 2. Полученная схема S_{n-2} реализует линейную функцию от $n-2$ переменных со сложностью, меньшей сложности S_n ровно на 7.5.

Отметим, что элемент e'_1 не мог быть инвертором, иначе он реализовывал бы константу 0, а не 1 (при разборе случая 2.2 показано, что на вход e_7 должна поступать константа 1). На вход этого элемента должна подаваться константа 0 с выхода некоторого элемента e'_2. Таким элементом может быть только другой элемент из тройки $\{e_4, e_8, e_9\}$ или элемент, отличный от e_1–e_9.

Случай 2.2.1.1. Элемент e'_2 — двувходовый элемент и $e'_2 \in \{e_4, e_8, e_9\}$. В схеме S_n элементы e'_1 и e'_2 заменяются инверторами, реализующими константы. Удалив эти элементы согласно свойству 3, уменьшим сложность S_{n-2} ещё на 1, что противоречит свойству 6.

Случай 2.2.1.2. Элемент e'_2 отличен от e_1–e_9. В этом случае e'_2 останется в S_{n-2} и можно удалить из S_{n-2} инвертор, на который заменён e'_1, и элемент e'_2 по свойству 4; противоречие свойству 6.

Случай 2.2.1.3. Элемент e'_2 — инвертор и $e'_2 \in \{e_8, e_9\}$ (элемент e_4 двувходовый, а значит, не может совпадать с e'_2). Отметим, что в этом случае e'_1 не может совпадать с e_4, иначе выход одного из элементов e_5, e_6 связан с входом e_4, что противоречит предположению случая 2. Таким образом, e'_2 — инвертор, вход которого соединён с выходом одного из элементов e_5, e_6, а e'_1 — двувходовый элемент, у которого входы соединены с выходом e'_2 и с выходом одного из элементов e_5, e_6, а выход связан с входом e_7; элементы e'_1 и e'_2 не совпадают с элементами e_1–e_7.

Случай 2.2.1.3.1. Между выходом e'_1 и входом e_7 есть инвертор e^-. Подадим на входы x_1 и x_2 схемы S_n константу 0. На выходах элементов e_1, e_2, e_3 получаем константу 1, на вход e_4 подаётся константа 1, на выходах элементов e_5 и e_6 получаем $\overline{x}_3$, а на выходах элементов e'_2, e'_1, e^-, e_7 — x_3, 1, 0, 1 соответственно. Удалим из схемы элементы e_1, e_2, e_3, e'_1, e^-, e_7 по свойству 4, удалим e_5, поскольку он реализует ту же функцию, что и e_6, заменим инверторами e_4 и e_6 по свойству 2 и удалим e'_2, поскольку он реализует x_3. Полученная схема S'_{n-2} реализует линейную функцию от $n-2$ переменных и $L(S'_{n-2}) = L(S_n)-8$. Заметим, что выход элемента e_7 в схеме S_n не соединён с входом одного из рассматриваемых элементов, кроме, быть может, заменённого инвертором e_4. Это означает, что в S'_{n-2} на вход некоторого элемента подаётся константа и его можно удалить или заменить инвертором по одному из свойств 1–3, уменьшив сложность схемы S'_{n-2} ещё на 0.5; противоречие свойству 6.

Случай 2.2.1.3.2. Выход e'_1 соединён с входом e_7. Подадим на входы x_1 и x_2 схемы S_n константу 0. Тогда, как и в случае 2.2.1.3.1, можно удалить или заменить инверторами все рассматриваемые элементы и получить схему S'_{n-2} для линейной функции от $n-2$ переменных со сложностью, на 7.5 меньшей сложности схемы S_n. Но в этом случае элемент e_7 реализует константу 0, следовательно, на вход некоторого элемента e в схеме S'_{n-2} подаётся константа 0. Если e — двувходовый элемент, то его можно удалить по свойству 1. Если e — инвертор, то его можно удалить по свойству 3 и заменить инвертором двувходовый элемент, вход которого соединён с выходом e по свойству 2. В обоих случаях $L(S'_{n-2})$ уменьшится на единицу, что противоречит свойству 6.

Случай 2.2.2. В схеме S_n существует отличный от e_1–e_9 двувходовый элемент e_{10}, выход которого связан с входом e_7. Подадим нули на входы схемы x_1, x_3. Тогда элементы e_1, e_2, e_5, e_6 будут реализовывать константу 1 и на входы элементов e_4, e_8, e_9 будет подана константа 1. На вход e_7 должна подаваться константа 1, иначе переменная x_2 окажется забиваемой, а потому и на выходе e_{10} должна реализовываться константа. Это означает, что можно удалить элементы e_1, e_2, e_5, e_6, e_{10} по свойству 4, удалить e_7, подав x_3 на входы всех элементов, которые соединялись с его выходом, удалить e_3, который станет «висячим», и удалить или заменить инверторами e_4, e_8 и e_9 по одному из свойств 3 или 2. Полученная схема реализует линейную функцию от $n-2$ переменных со сложностью, на 8.5 меньшей сложности схемы S_n; противоречие свойству 6. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Всякая правильная схема в базисе Б, реализующая линейную функцию от n переменных, $n \geqslant 2$, состоит из $n-1$ стандартных блоков, входящих в схему правильно.*

Доказательство. Пусть S_n — правильная схема в базисе Б, реализующая линейную функцию от n переменных. Она содержит верхний элемент и согласно лемме 4 в ней можно выделить стандартный или специальный блок. Если в S_n можно выделить стандартный блок, то его можно удалить, подав константу 0 на один из входов схемы, которые соединены с входами главного элемента блока, и получить схему S_{n-1}, реализующую линейную функцию от $n-1$ переменных в базисе Б со сложностью $4n-8$. Значит, эта схема правильная, и к ней применима лемма 4. Если в схеме S_{n-1} можно выделить стандартный блок, то удалим и его аналогичным образом. Будем продолжать процесс удаления стандартных блоков до тех пор, пока не получим правильную схему S_l, в которой всякий верхний элемент является главным элементом некоторого специального блока, или до тех пор, пока не удалим из схемы все элементы (отметим, что на входы каждого из удаляемых стандартных блоков не подаются константы с входов схемы, так как схема, содержащая такой стандартный блок, не была бы минимальной). Во втором случае, очевидно, утверждение леммы выполнено. Покажем, что первый случай невозможен.

Пусть S_l — правильная схема в базисе Б, реализующая линейную функцию от l переменных, $\{e_1^*, \ldots, e_k^*\}$ — множество её верхних элементов, для любого $i \in \{1, \ldots, k\}$ элемент e_i^* является главным элементом специального блока B_i. Рассмотрим следующие случаи.

Случай 1. С входом хотя бы одного выходного элемента хотя бы одного из блоков $B_1, \ldots, B_k$ (скажем, блока B_1) соединён вход схемы. Пусть вместе с элементом e_1^* блок B_1 содержит e_2–e_7, элементы e_4–e_7 — выходные элементы блока B_1, выход e_2 соединён с входами элементов e_4, e_5, а выход e_3 — с входами элементов e_6, e_7. Пусть входы элемента e_1^* соединены с входами схемы x_1, x_2, а вход e_7 соединён с входом схемы x_3 (последнее условие — предположение данного случая). Согласно лемме 5 вход x_3 не соединён с входами e_4, e_5, e_6.

Случай 1.1. Входы элементов e_4, e_5, e_6 не соединяются с входами схемы. Подадим на вход x_1 константу 0. Тогда элементы e_1^*, e_2 реализуют константу 1, элемент e_3 — функцию $\overline{x}_2$, а на входы элементов e_4, e_5 подаётся 1 (рис. 12(a)). Удалим e_1, e_2 из схемы по свойству 4, заменим e_4, e_5 инверторами по свойству 2, удалим e_3 по свойству 5 и получим схему S_{l-1}, реализующую линейную функцию от $l-1$ переменных в базисе Б$'$. Схема S_{l-1} представлена на рис. 12(b). Через v и w на рисунке обозначены выходы элементов, соединённые с входами e_4 и e_5.

Заметим, что S_{l-1} — правильная схема, ведь её сложность меньше сложности схемы S_l ровно на 4 и она содержит только два инвертора, входы которых соединены с выходами элементов (а не с входами схемы). К верхнему элементу e_7 схемы S_{l-1} применима лемма 4, согласно которой элемент e_7 является главным элементом некоторого стандартного или специального блока B. Тогда элемент e_6 также принадлежит блоку B, так как вход схемы x_2 должен соединяться с входом элемента блока B, отличного от e_7, но не может соединяться с входами более чем двух двувходовых элементов (по лемме 3). Отсюда следует, что в схеме S_{l-1} выход e_7 соединяется с входом e_6. Это возможно только в случае, когда в схеме S_l выход e_7 также соединяется с входом e_6 (рис. 12(c)).

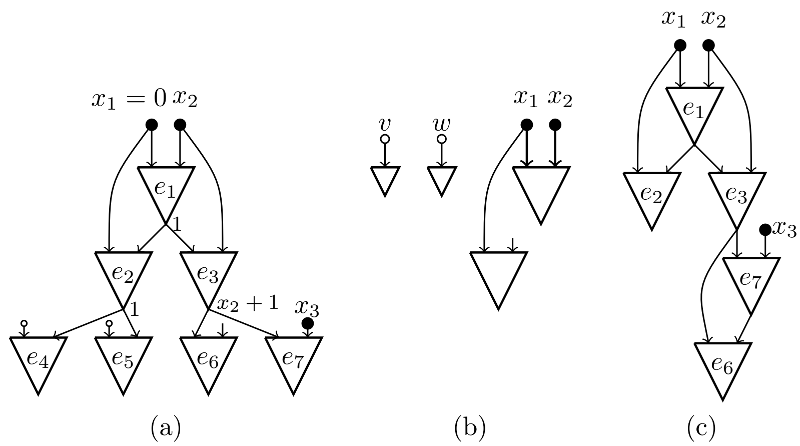


Рис. 12

Вернёмся к рассмотрению схемы S_l. Подадим на вход x_2 схемы S_l константу 0. Тогда элементы e_1, e_3 реализуют константу 1, элемент e_2 — функцию $\overline{x}_1$, на вход e_7 подаётся 1, а элемент e_6 реализует функцию x_3. Удалим элементы e_1, e_3 по свойству 4, удалим элемент e_2 по свойству 5, заменим инвертором элемент e_7 по свойству 2 и удалим элемент e_6, соединив с входом схемы x_3 все входы элементов, которые соединялись с выходом e_6. В итоге получим схему S'_{l-1} для линейной функции от $n-1$ переменных, для которой $L(S_l) - L(S'_{l-1}) \geqslant 4.5$, что противоречит свойству 6.

Случай 1.2. Входы каких-либо элементов из тройки $\{e_4, e_5, e_6\}$ соединены с входами схемы. Пусть x_i — один из таких входов. Добавим в схему S_l два новых входа x'_1, x'_2 и стандартный блок, входы которого соединены с входами x'_1, x'_2, удалим вход x_i, а входы всех тех элементов, которые были соединены с входом x_i, соединим с выходом выходного элемента добавленного блока. Полученная схема S_{l+1} реализует линейную функцию от $l+1$ переменных и является правильной, поскольку добавлен один вход и чётыре двувходовых элемента. Если после этого преобразования в схеме S_{l+1} остались входы, соединённые с входами элементов из тройки $\{e_4, e_5, e_6\}$, поступим с такими входами аналогично. В итоге получим правильную схему S_{l+j}, $j \in \{1, 2, 3\}$, содержащую специальный блок B, в котором вход ровно одного выходного элемента соединён с входом схемы. Далее рассуждаем, как в случае 1.1.

Случай 2. Входы выходных элементов блоков $B_1, \ldots, B_k$ не соединяются с входами схемы.

Случай 2.1. Пусть некоторые два блока из $\{B_1, \ldots, B_k\}$ (скажем, блоки B_1 и B_2) имеют общие выходные элементы. Пусть с главными входами блока B_1 соединены входы схемы x_1, x_2, главные входы блока B_2 соединены с входами схемы x_3, x_4. Главные элементы блоков B_1 и B_2 — e_1^* и e_2^* соответственно. Пусть выход e_1^* соединён с входами элементов e_3 и e_4 блока B_1, а выход e_2^* — с входами элементов e_5 и e_6 блока B_2. Пусть e_7 — общий выходной элемент блоков B_1 и B_2. Без ограничения общности будем считать, что входы элемента e_7 соединены с выходами элементов e_4 и e_5 (рис. 13). На рис. 13 не показаны выходные элементы блоков, отличные от e_7, так как эти элементы могут быть как общими, так и различными для этих двух блоков.

Подадим константу 0 на входы x_2, x_3. Тогда элементы e_1, e_4, e_2, e_5 реализуют константу 1, элемент e_7 — константу 0, а элементы e_3, e_6 — функции $\overline{x}_1$, $\overline{x}_4$ соответственно. Заметим, что выходы элементов e_4, e_5 соединены с входами хотя бы одного двувходового элемента, отличного от e_7 (ведь выход каждого из элементов e_4, e_5 соединяется с входами двух выходных элементов специального блока). Таким образом, в схеме найдутся хотя бы два двувходовых элемента e_8, e_9 такие, что вход e_8 связан с выходом e_7, а хотя бы с одним входом e_9 связан выход хотя бы одного из элементов e_4, e_5. На вход каждого из элементов e_8, e_9 подаётся константа.

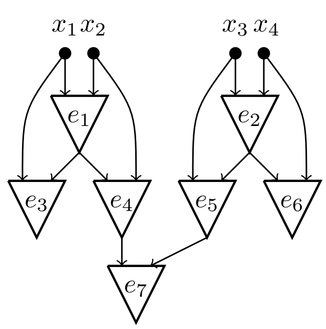


Рис. 13

Случай 2.1.1. На вход хотя бы одного из элементов e_8, e_9, скажем, элемента e_8, подаётся 0. Удалим из схемы элементы e_1, e_4, e_2, e_5, e_7 по свойству 4, удалим элементы e_3, e_6 по свойству 5, удалим элемент e_8 по свойству 1 и заменим на инвертор элемент e_9 по свойству 2. Полученная схема S_{l-2} реализует линейную функцию от $n-2$ переменных и $L(S_l) - L(S_{l-2}) \leqslant 8.5$; противоречие свойству 6.

Случай 2.1.2. В схеме нет двувходового элемента, у которого один вход связан с выходом одного из элементов e_4, e_5, e_7, а на другой вход подаётся 0. В этом случае на входы элементов e_8, e_9 подаются единицы и между выходом e_7 и входом e_8 есть инвертор e^-. Как и в случае 2.1.1, удалим элементы e_1–e_7, удалим элемент e^- по свойству 3 и заменим инверторами элементы e_8, e_9 по свойству 2. Полученная схема S_{l-2} реализует линейную функцию от $n-2$ переменных и $L(S_l) - L(S_{l-2}) \leqslant 8.5$, что противоречит свойству 6.

Случай 2.2. Никакие два блока из $\{B_1, \ldots, B_k\}$ не имеют общих выходных элементов. Занумеруем некоторые элементы схемы S_l согласно следующему алгоритму.

Шаг А. Выходному элементу схемы S_l присвоим номер 1.

Шаг Б. Если некоторому элементу e, не являющемуся выходным или верхним элементом некоторого блока из $\{B_1, \ldots, B_k\}$, присвоен наибольший (среди уже занумерованных элементов) номер i, то номер $i+1$ присвоим любому (ровно одному) двувходовому элементу, выход которого связан с входом e.

Шаг В. Если выходному элементу e блока B_j, $j \in \{1, \ldots, k\}$, присвоен наибольший (среди уже занумерованных элементов) номер i, то номер $i+1$ присвоим тому двувходовому элементу, выход которого связан с входом e и который не входит в блок B_j.

Шаг Г. Если некоторому верхнему элементу e присваивается какой-то номер, то на этом процесс нумерации останавливается.

Шаг Б всегда можно осуществить, так как схема S_l правильная, а значит, её входы не подаются на входы инверторов. Возможность осуществления шага В гарантируют предположения случаев 2 и 2.2. В результате проведения этого алгоритма никакой элемент не окажется занумерованым дважды, иначе схема содержит ориентированный цикл.

Покажем, что элементы блоков $B_1, \ldots, B_k$, отличные от выходных и главных элементов, не будут занумерованы. Пусть e — один из таких элементов, входящий в специальный блок B_j, и e получил номер i. В таком случае выход e связан с входом элемента, получившего номер $i-1$. Но выход e связан лишь с двумя выходными элементами блока B_j. Если один из выходных элементов блока B_j получил номер $i-1$, то после этого будет совершён шаг В, и номер i получит элемент, не входящий в блок B_j, т. е. не элемент e. Нетрудно заметить, что главные элементы блоков $B_1, \ldots, B_k$ также не будут занумерованы.

Поскольку количество элементов в схеме конечно, процесс нумерации должен остановиться. Он может остановиться только после шага Г (т. е. нумерации некоторого верхнего элемента схемы). Но в схеме S_l все верхние элементы являются главными элементами блоков $B_1, \ldots, B_k$, которые, как показано выше, занумерованы не будут. Полученное противоречие доказывает невозможность случая 2.2. Лемма 6 доказана.

3. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 1. Согласно теореме 3 всякая минимальная схема в базисе Б, реализующая функцию l_n, содержит $4n-4$ элементов. Это означает, что все минимальные схемы для функции l_n правильные и к ним применима лемма 6. Теорема 1 доказана.

Заметим, что поскольку схемы, описываемые в теореме 1, не содержат элементов, на входы которых подаются константы с входов схемы, теорема 1 остаётся верной и для схем, на входы которых не разрешается подавать константы.

В [1] утверждение, аналогичное теореме 1, доказано для базиса $\{x\&y, x \vee y, \overline{x}\}$. Оно ранее сформулировано, но не доказано в [2]. Результаты, в которых устанавливается сложность линейных функций в различных классах управляющих систем, можно найти в работах [4–6, 8].

Доказательство теоремы 2. Сложность реализации $\bar{l}_1(x) = \overline{x}$ схемой в базисе Б, очевидно, равна 1, т. е. утверждение теоремы верно для $n = 1$. Докажем его для $n \geqslant 2$.

По теореме 3 для фиксированного $n \geqslant 2$ сложность реализации функции $\bar{l}_n$ в базисе Б составляет $4n-4$ или $4n-3$. Предположим, что найдётся $k \geqslant 2$ такое, что $L(\bar{l}_k) = 4k-4$. Тогда все минимальные схемы, реализующие $\bar{l}_k$, правильные и согласно лемме 6 состоят из $k-1$ стандартных блоков, которые входят в схему правильно. Но все схемы, состоящие из $k-1$ стандартных блоков, каждый из которых входит в схему правильно, реализуют функцию l_k, а не функцию $\bar{l}_k$.

Таким образом, для любого натурального n сложность реализации функции $\bar{l}_n$ составляет $4n-3$. Теорема 2 доказана.

Функцию $\bar{l}_n$ нетрудно реализовать схемой из $4n-3$ элементов штрих Шеффера, на входы которых не подаются константы. Следовательно, утверждение теоремы 2 остаётся верным и для схем, на входы которых константы не подаются.

Автор благодарит научного руководителя профессора Н. П. Редькина за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Комбаров Ю. А.** О минимальных реализациях линейных булевых функций // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2012. — Т. 19, № 3. — С. 39–57.
2. **Ложкин С. А.** О структуре минимальных схем в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$, реализующих линейную функцию // Тр. V Междунар. конф. «Дискретные

модели в теории управляющих систем» (Ратмино, 26–29 мая 2003 г.). — М.: МГУ, 2003. — С. 50–51.

3. **Лупанов О. Б.** Асимптотические оценки сложности управляющих систем. — М.: МГУ, 1984. — 136 с.
4. **Мерекин Ю. В.** Нижняя оценка сложности для схем конкатенации слов // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 1996. — Т. 3, № 1. — С. 52–56.
5. **Редькин Н. П.** Доказательство минимальности некоторых схем из функциональных элементов // Пробл. кибернетики. — 1970. — № 23. — С. 83–101.
6. **Редькин Н. П.** О минимальной реализации линейной функции схемой из функциональных элементов // Кибернетика. — 1971. — № 6. — С. 31–38.
7. **Редькин Н. П.** Дискретная математика. — М.: Физматлит, 2009. — 263 с.
8. **Cardot C.** Quelques résultats sur l'application de l'algébre de Boole á la synthése des circuits á relais // Ann. Telecomm. — 1952. — Vol. 7, N 2. — P. 75–84.

Комбаров Юрий Анатольевич,
e-mail: yuri.kombarov@gmail.com

Статья поступила
24 декабря 2012 г.

Переработанный вариант —
23 апреля 2013 г.