ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—август 2013. Том 20, № 4. С. 15–26

УДК 519.714

НИЖНЯЯ ОЦЕНКА ФОРМУЛЬНОЙ СЛОЖНОСТИ ТЕРНАРНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ

Ю. Л. Васильев, К. Л. Рычков

Аннотация. Установлено, что формульная сложность тернарной линейной функции, зависящей от n переменных, не меньше $n^2 + \frac{3}{2}n - o(n)$.

Ключевые слова: сложность формулы, π-схема, нижняя оценка сложности.

Введение

Рассматриваются троичные параллельно-последовательные контактные схемы (π-схемы). В отличие от обычных (двоичных) π-схем метками контактов этих схем являются не булевы переменные и их отрицания, а функции, обозначаемые по аналогии с двоичным случаем через x_i^δ, $i = 1, 2, 3, \ldots,\ \delta = 0, 1, 2$. Переменная x_i функции x_i^δ принимает значения не из множества $B_2 = \{0, 1\}$, как в двоичном случае, а из множества $B_3 = \{0, 1, 2\}$, значение функции x_i^δ определяется по правилу

$$x_i^\delta = \begin{cases} 1, & \text{если } x_i = \delta, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Функция $f : B_3^n \to \{0, 1\}$ проводимости троичной π-схемы определяется по аналогии с двоичным случаем: троичная π-схема реализует функцию $f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee\limits_C K_C$, где дизъюнкция берётся по всем простым (без самопересечений) цепям, соединяющим полюсы схемы, K_C — конъюнкция всех функций $x_{i_1}^{\delta_1}, \ldots, x_{i_k}^{\delta_k}$, приписанных контактам цепи C. Как и в двоичном случае, говорим, что контакт, помеченный x_i^δ, *замкнут* на наборе $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in B_3^n$, если $\alpha_i^\delta = 1$, и *разомкнут*, если $\alpha_i^\delta = 0$.

Сложностью $L(S)$ троичной π-схемы S называется число контактов в S. *Сложностью* $L_\pi(f)$ *функции* $f : B_3^n \to \{0, 1\}$ в классе троичных π-схем называется $\min\limits_S L(S)$, где минимум берётся по всем троичным π-схемам, реализующим f.

Под *троичной формулой* понимаем формулу в базисе $\{\vee, \wedge\}$, в качестве переменных которой используются определённые выше функции x_i^δ, $i = 1, 2, 3, \ldots,\ \delta = 0, 1, 2$. *Сложностью такой формулы*, как обычно, называется число вхождений переменных в формулу. Ясно, что троичную формулу можно «изобразить» в виде троичной π-схемы той же сложности, реализующей ту же функцию. И наоборот, троичную π-схему можно записать в виде троичной формулы. Таким образом, по отношению к сложности функции в троичном случае (как и в двоичном) язык π-схем эквивалентен языку формул. Для нашего изложения выбираем, как более наглядный, язык π-схем. В дальнейшем троичные π-схемы называются просто π-схемами.

На множестве B_3^n рассмотрим следующую функцию (тернарная линейная функция):

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_1 + \ldots + x_n = 0 \pmod 3, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В [1] установлено, что при $n = 3$ справедливо равенство

$$L_\pi(\varphi(x_1, x_2, x_3)) = 18.$$

Результатом настоящей работы является нижняя оценка сложности тернарной линейной функции, зависящей от произвольного числа переменных.

1. Нижняя оценка сложности

Теорема 1. *Для любого натурального n справедливо неравенство*

$$L_\pi(\varphi(x_1, \ldots, x_n)) \geqslant n^2 + \frac{3}{2}n - o(n).$$

Доказательство. Воспользуемся подходом В. М. Храпченко к получению нижних оценок сложности π-схем [3–8]. Суть этого подхода заключается в анализе некоторого специального отображения H, действующего из множества (0-1)-пар функции в множество контактов реализующей эту функцию π-схемы. Приведём точные определения.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная функция, заданная на B_3^n, значения которой принадлежат $\{0, 1\}$. Множество $f^{-1}(0) \times f^{-1}(1)$ называем *множеством (0-1)-пар функции* $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Будем называть множество $M \subseteq f^{-1}(0) \times f^{-1}(1)$ *декартовым подмножеством* множества $f^{-1}(0) \times f^{-1}(1)$, если существуют $D_0 \subseteq f^{-1}(0)$ и $D_1 \subseteq f^{-1}(1)$ такие, что $M = D_0 \times D_1$.

Введём обозначения

$$X_i^\delta = \big\{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in B_3^n \mid \alpha_i^\delta = 0\big\} \times \big\{(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in B_3^n \mid \beta_i^\delta = 1\big\},$$
$$i = 1, \ldots, n,\ \delta = 0, 1, 2.$$

Пусть S — произвольная π-схема, реализующая функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$. Через $K(S)$ обозначим множество контактов π-схемы S, а через $K_i^\delta(S)$, $i = 1, \ldots, n,\ \delta = 0, 1, 2,$ — множество контактов из $K(S)$, помеченных x_i^δ.

Рассмотрим отображение $H : f^{-1}(0) \times f^{-1}(1) \to K(S)$, обладающее свойствами:

(i) для каждого $k \in K(S)$ множество $H^{-1}(k)$ является декартовым подмножеством множества $f^{-1}(0) \times f^{-1}(1)$,

(ii) для любых $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\delta \in \{0, 1, 2\}$ и $k \in K_i^\delta(S)$ справедливо включение $H^{-1}(k) \subseteq X_i^\delta$.

Заметим, что если отображение $H : f^{-1}(0) \times f^{-1}(1) \to K(S)$ обладает свойствами (i), (ii), то и сужение H на любое декартово подмножество W множества $f^{-1}(0) \times f^{-1}(1)$ также обладает этими свойствами. Такое отображение H, а также его сужение на любое декартово подмножество W множества $f^{-1}(0) \times f^{-1}(1)$ называем *отображением Храпченко* (для функции f и π-схемы S).

Лемма 1. *Для любой непостоянной функции $f : B_3^n \to \{0, 1\}$ и произвольной реализующей её π-схемы S существует отображение Храпченко $H : f^{-1}(0) \times f^{-1}(1) \to K(S)$.*

Доказательство. Пусть S — произвольная π-схема, реализующая функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$. *Цепью* π-схемы S называется простая цепь в S, соединяющая полюсы схемы. *Тупиковым сечением* π-схемы S называется минимальное по включению множество контактов этой схемы, имеющее общий контакт с каждой цепью π-схемы. Индукцией по сложности π-схемы нетрудно доказать, что каждая цепь и каждое тупиковое сечение π-схемы имеют ровно один общий контакт [7].

Отображение $H : f^{-1}(0) \times f^{-1}(1) \to K(S)$ построим следующим образом. Заметим, что для каждого набора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in f^{-1}(0)$ найдётся тупиковое сечение π-схемы S, все контакты которого разомкнуты на этом наборе. Каждому набору $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in f^{-1}(0)$ поставим в соответствие какое-нибудь одно такое тупиковое сечение. Точно так же для каждого набора $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in f^{-1}(1)$ найдётся цепь π-схемы S, все контакты которой замкнуты на этом наборе. Каждому набору $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in f^{-1}(1)$ поставим в соответствие какую-нибудь одну такую цепь.

По определению отображение $H : f^{-1}(0) \times f^{-1}(1) \to K(S)$ каждой паре наборов $((\alpha_1, \ldots, \alpha_n), (\beta_1, \ldots, \beta_n)) \in f^{-1}(0) \times f^{-1}(1)$ ставит в соответствие тот единственный контакт π-схемы S, который является общим для тупикового сечения, соответствующего набору $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, и цепи, соответствующей набору $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$.

Покажем, что отображение H обладает свойствами (i) и (ii).

Пусть $k \in K(S)$ — произвольный контакт π-схемы S. Через D_0 обозначим множество таких наборов $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in f^{-1}(0)$, что соответствующие этим наборам тупиковые сечения π-схемы S содержат контакт k. Через D_1 обозначим множество наборов $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in f^{-1}(1)$ таких, что соответствующие этим наборам цепи π-схемы S содержат контакт k. Ясно, что $H^{-1}(k) = D_0 \times D_1$, поэтому свойство (i) выполнено.

Пусть $k \in K_i^\delta(S),\ i \in \{1, \ldots, n\},\ \delta \in \{0, 1, 2\}$. Включение $H^{-1}(k) = D_0 \times D_1 \subseteq X_i^\delta$ следует из того, что в силу определения отображения H контакт k разомкнут на каждом наборе $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in D_0$ и замкнут на каждом наборе $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in D_1$. Свойство (ii) выполнено. Лемма 1 доказана.

Пусть S — произвольная минимальная π-схема, реализующая функцию $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$. Покажем, что $L(S) \geqslant n^2 + \frac{3}{2}n - o(n)$.

Множество B_3^n будем рассматривать как векторное пространство над полем $GF(3)$. Введём следующие обозначения:

$$A_1 = \bigl\{\overline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in B_3^n \mid \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1 \ (\mathrm{mod}\ 3)\bigr\},$$

$$A_0 = \bigl\{\overline{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in B_3^n \mid \ \beta_1 + \ldots + \beta_n = 0 \ (\mathrm{mod}\ 3)\bigr\},$$

$$W = A_1 \times A_0.$$

Отметим, что $A_1 \subseteq \varphi^{-1}(0)$ и $A_0 = \varphi^{-1}(1)$.

Пусть $\overline{e}^1 = (1, 0, \ldots, 0),\ \overline{e}^2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \overline{e}^n = (0, \ldots, 0, 1)$,

$$R_i = \{(\overline{\alpha}, \overline{\beta}) \in W \mid \overline{\alpha} - \overline{\beta} = \overline{e}^i\}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$R_i^\delta = \bigl\{(\overline{\alpha}, \overline{\beta}) \in R_i \mid \beta_i^\delta = 1\bigr\}, \quad i = 1, \ldots, n,\ \delta = 0, 1, 2,$$

$$R = \bigcup_{i=1}^{n} R_i.$$

Рассмотрим отображение Храпченко $H : W \to K(S)$ для функции $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ и π-схемы S, существование которого следует из леммы 1, а также отображение $h : R \to K(S)$, являющееся сужением H на множество R.

Для произвольного множества $M \subseteq A_1 \times A_0$ пусть

$$A_1(M) = \{\overline{\alpha} \in A_1 \mid \exists\overline{\beta}((\overline{\alpha}, \overline{\beta}) \in M)\},$$

$$A_0(M) = \{\overline{\beta} \in A_0 \mid \exists\overline{\alpha}((\overline{\alpha}, \overline{\beta}) \in M)\},$$

$$\widehat{M} = A_1(M) \times A_0(M).$$

Лемма 2. *Для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ и произвольного $M \subseteq R_i$ справедливо равенство $|\widehat{M}| = |M|^2$.*

Доказательство. Из определения множества R_i следует, что

$$|A_1(M)| = |A_0(M)| = |M|$$

для $M \subseteq R_i$. Поэтому $|\widehat{M}| = |M|^2$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Для любых $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\delta \in \{0, 1, 2\}$ и произвольного $k \in K_i^\delta(S)$ справедливо включение $h^{-1}(k) \subseteq R_i^\delta$.*

Доказательство. В силу определения отображения h справедливо включение $h^{-1}(k) \subseteq R$, а $h^{-1}(k) \subseteq H^{-1}(k) \subseteq X_i^\delta$ по свойству (ii) отображения H. Поэтому $h^{-1}(k) \subseteq R \cap X_i^\delta = R_i^\delta$. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Для любого $k \in K(S)$ справедливо равенство $|\widehat{h^{-1}(k)}| = |h^{-1}(k)|^2$.*

Доказательство. Пусть $k \in K_i^\delta(S)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\delta \in \{0, 1, 2\}$. Тогда в силу леммы 3 справедливо включение $h^{-1}(k) \subseteq R_i^\delta \subseteq R_i$. Поэтому $|\widehat{h^{-1}(k)}| = |h^{-1}(k)|^2$ ввиду леммы 2. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Множества $\widehat{h^{-1}(k)}$, $k \in K(S)$, попарно не пересекаются.*

Доказательство. В силу свойства (i) отображения H справедливы включения $\widehat{h^{-1}(k)} \subseteq H^{-1}(k)$, $k \in K(S)$. Утверждение леммы 5 следует из того факта, что множества $H^{-1}(k)$, $k \in K(S)$, попарно не пересекаются. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Для сложности π-схемы S верно неравенство*

$$L(S) \geqslant \frac{|R|^2}{\left|\bigcup\limits_{k \in K(S)} \widehat{h^{-1}(k)}\right|}.$$

Доказательство. Из лемм 4 и 5 вытекает, что

$$\sum_{k\in K(S)} \left|h^{-1}(k)\right|^2 = \sum_{k\in K(S)} \left|\widehat{h^{-1}(k)}\right| = \Big|\bigcup_{k\in K(S)} \widehat{h^{-1}(k)}\Big|.$$

Поэтому, учитывая очевидное равенство $\sum\limits_{k\in K(S)} \left|h^{-1}(k)\right| = |R|$ и частный случай неравенства Коши — Буняковского

$$\Big(\sum_{k\in K(S)} \left|h^{-1}(k)\right|\Big)^2 \leqslant |K(S)| \sum_{k\in K(S)} \left|h^{-1}(k)\right|^2,$$

как следствие имеем

$$L(S) = |K(S)| \geqslant \frac{\big(\sum\limits_{k\in K(S)} |h^{-1}(k)|\big)^2}{\sum\limits_{k\in K(S)} \left|h^{-1}(k)\right|^2} = \frac{|R|^2}{\Big|\bigcup\limits_{k\in K(S)} \widehat{h^{-1}(k)}\Big|}.$$

Лемма 6 доказана.

Заметим, что все изложенные выше доказательства по сути повторяют рассуждения В. М. Храпченко [7, 8], приведённые для линейной булевой функции и обычных (двоичных) π-схем. Если воспользоваться соотношениями

$$|R| = 3^{n-1}n, \qquad \Big|\bigcup_{k\in K(S)} \widehat{h^{-1}(k)}\Big| \leqslant |A_1 \times A_0| = (3^{n-1})^2,$$

то, опираясь на лемму 6, попросту повторим в троичном случае результат из [7]:

$$L_\pi(\varphi(x_1, \dots, x_n)) \geqslant L(S) \geqslant \frac{|R|^2}{|A_1 \times A_0|} = \frac{(3^{n-1}n)^2}{(3^{n-1})^2} = n^2.$$

Основным результатом настоящей статьи фактически является следующее усиление верхней оценки величины $\Big|\bigcup\limits_{k\in K(S)} \widehat{h^{-1}(k)}\Big|$.

Лемма 7. *Для величины* $\Big|\bigcup\limits_{k\in K(S)} \widehat{h^{-1}(k)}\Big|$ *справедливо неравенство*

$$\Big|\bigcup_{k\in K(S)} \widehat{h^{-1}(k)}\Big| \leqslant (3^{n-1})^2 \left(1 - \frac{3}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Утверждение теоремы 1 является непосредственным следствием лемм 6 и 7:

$$L_\pi(\varphi(x_1,\ldots,x_n)) = L(S) \geqslant \frac{|R|^2}{\Bigl|\bigcup\limits_{k\in K(S)} \widehat{h^{-1}(k)}\Bigr|} \geqslant \frac{(3^{n-1}n)^2}{(3^{n-1})^2\left(1-\frac{3}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = n^2+\frac{3}{2}n-o(n).$$

Доказательство леммы 7. Заметим, что для $(\overline{\alpha},\overline{\beta}) \in W$ и произвольных $i \in \{1,\ldots,n\}$, $\delta \in \{0,1,2\}$ включение $(\overline{\alpha},\overline{\beta}) \in \widehat{R_i^\delta}$ равносильно включению $(\overline{\beta}+\overline{e}^i,\overline{\alpha}-\overline{e}^i) \in \widehat{R_i^\delta}$.

Действительно, пусть $(\overline{\alpha},\overline{\beta}) \in \widehat{R_i^\delta}$. Тогда из определения множества $\widehat{R_i^\delta}$ следует, что $(\overline{\alpha},\overline{\alpha}-\overline{e}^i) \in R_i^\delta$ и $(\overline{\beta}+\overline{e}^i,\overline{\beta}) \in R_i^\delta$. Поэтому $(\overline{\beta}+\overline{e}^i,\overline{\alpha}-\overline{e}^i) \in \widehat{R_i^\delta}$.

Очевидно, что $(\overline{\beta}+\overline{e}^i)-\overline{e}^i = \overline{\beta}$ и $(\overline{\alpha}-\overline{e}^i)+\overline{e}^i = \overline{\alpha}$. Тем самым из включения $(\overline{\beta}+\overline{e}^i,\overline{\alpha}-\overline{e}^i) \in \widehat{R_i^\delta}$ также следует, что $(\overline{\alpha},\overline{\beta}) \in \widehat{R_i^\delta}$.

Нетрудно понять, что приведённое замечание останется верным, если в нём множество R_i^δ заменить любым его подмножеством M.

Учитывая это замечание для всех $i \in \{1,\ldots,n\}$ и $\delta \in \{0,1,2\}$, определим граф G_i^δ с множествами вершин $V\bigl(G_i^\delta\bigr) = \widehat{R_i^\delta}$ и рёбер

$$E\bigl(G_i^\delta\bigr) = \bigl\{\{(\overline{\alpha},\overline{\beta}),(\overline{\beta}+\overline{e}^i,\overline{\alpha}-\overline{e}^i)\} \mid (\overline{\alpha},\overline{\beta}) \in \widehat{R_i^\delta}\bigr\}.$$

Отметим, что граф G_i^δ содержит петли. А именно, если $(\overline{\alpha},\overline{\beta}) \in R_i^\delta$, то ребро $\{(\overline{\alpha},\overline{\beta}),\ (\overline{\beta}+\overline{e}^i,\overline{\alpha}-\overline{e}^i)\}$ является петлёй.

Рассмотрим граф $G = \bigcup\limits_{i\in\{1,\ldots,n\}} \bigcup\limits_{\delta\in\{0,1,2\}} G_i^\delta$. Заметим, что

$$V(G) = \bigcup_{i\in\{1,\ldots,n\}} \bigcup_{\delta\in\{0,1,2\}} \widehat{R_i^\delta},$$

поэтому $\bigcup\limits_{k\in K(S)} \widehat{h^{-1}(k)} \subseteq V(G)$ в силу леммы 3.

Будем говорить, что множество $M \subseteq V(G)$ является *носителем паросочетания* P графа G, если M — множество концов всех рёбер из P.

Лемма 8. *Множество вершин* $\bigcup\limits_{k\in K(S)} \widehat{h^{-1}(k)}$ *графа* G *является носителем некоторого паросочетания этого графа.*

Лемма 9. *Для любого паросочетания P графа G найдётся не менее $(3^{n-1})^2\bigl(\frac{3}{2n}-o(\frac{1}{n})\bigr)$ вершин в G, не покрытых P.*

Лемма 7 является очевидным следствием лемм 8 и 9:

$$\Bigl|\bigcup_{k\in K(S)}\widehat{h^{-1}(k)}\Bigr| \leqslant |V(G)| - (3^{n-1})^2\left(\frac{3}{2n}-o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$
$$\leqslant |A_1\times A_0| - (3^{n-1})^2\left(\frac{3}{2n}-o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = (3^{n-1})^2\left(1-\frac{3}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Доказательство леммы 8. Из определения графа G_i^δ, $i\in\{1,\dots,n\}$, $\delta\in\{0,1,2\}$, следует, что степень каждой вершины G_i^δ (число рёбер, инцидентных вершине) равна 1. Это верно также для подграфа $G_i^\delta(\widehat{M})$ графа G_i^δ, порождённого множеством $\widehat{M}$, где M — произвольное подмножество множества R_i^δ. Поэтому в силу леммы 3 это верно для каждого графа $G_i^\delta(\widehat{h^{-1}(k)})$, $i\in\{1,\dots,n\}$, $\delta\in\{0,1,2\}$, $k\in K_i^\delta(S)$. Следовательно, в силу леммы 5 подграф

$$G' = \bigcup_{i\in\{1,\dots,n\}}\ \bigcup_{\delta\in\{0,1,2\}}\ \bigcup_{k\in K_i^\delta(S)} G_i^\delta(\widehat{h^{-1}(k)})$$

графа G является регулярным графом степени 1. Значит, множество рёбер $E(G')$ является паросочетанием, а множество вершин $\bigcup\limits_{k\in K(S)}\widehat{h^{-1}(k)}$ — носителем этого паросочетания. Лемма 8 доказана.

Лемма 10. *Для любой пары $(\overline{\alpha},\overline{\beta})\in W$ и каждого $i\in\{1,\dots,n\}$ включение $(\overline{\alpha},\overline{\beta})\in\widehat{R_i^0}\cup\widehat{R_i^1}\cup\widehat{R_i^2}$ равносильно равенству $\alpha_i-\beta_i=1\ (\mathrm{mod}\ 3)$.*

Доказательство. Из определения множеств R_i^δ вытекают равенства

$$\widehat{R_i^\delta} = \{\overline{\alpha}\in A_1 \mid \alpha_i=\delta+1(\mathrm{mod}\ 3)\}\times\{\overline{\beta}\in A_0 \mid \beta_i=\delta\},$$
$$i=1,\dots,n,\ \delta=0,1,2,$$

откуда следует утверждение леммы. Лемма 10 доказана.

Пусть $I_\delta(\overline{\alpha}) = |\{i\in\{1,\dots,n\} \mid \alpha_i=\delta\}|$, $\delta=0,1,2$, для произвольного $\overline{\alpha}\in B_3^n$. Для каждой пары чисел

$$(q_1,q_2)\in\{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,n\},\quad q_1+q_2\leqslant n,$$

определим множество

$$W(q_1,q_2) = \{(\overline{\alpha},\overline{\beta})\in W \mid I_1(\overline{\alpha}-\overline{\beta})=q_1,\ I_2(\overline{\alpha}-\overline{\beta})=q_2\}.$$

Отметим, что $|W(q_1, q_2)| = 0$ при $q_1 + 2q_2 \neq 1 \pmod 3$.

Пусть

$$Q = \{(q_1, q_2) \in \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\} \mid q_1 + q_2 \leqslant n,\\ q_1 + 2q_2 = 1 \pmod 3,\ q_1 \geqslant 1\}.$$

Равенство

$$V(G) = \bigcup_{i \in \{1,\ldots,n\}} \bigcup_{\delta \in \{0,1,2\}} \widehat{R_i^\delta} = \bigcup_{(q_1,q_2) \in Q} W(q_1, q_2)$$

является непосредственным следствием леммы 10.

Лемма 11. *Пусть* $\{(\overline{\alpha}, \overline{\beta}), (\overline{\alpha}', \overline{\beta}')\}$ *— произвольное ребро графа* G *и* $(q_1, q_2) \in Q$. *Тогда* $(\overline{\alpha}, \overline{\beta}) \in W(q_1, q_2)$ *равносильно включению* $(\overline{\alpha}', \overline{\beta}') \in W(q_2 + 1, q_1 - 1)$.

Доказательство. По определению G для ребра $\{(\overline{\alpha}, \overline{\beta}), (\overline{\alpha'}, \overline{\beta'})\}$ существует $i \in \{1, \ldots, n\}$ такое, что $\overline{\alpha}' = \overline{\beta} + \overline{e}^i$, $\overline{\beta}' = \overline{\alpha} - \overline{e}^i$, поэтому $\overline{\alpha}' - \overline{\beta}' = 2\overline{e}^i - (\overline{\alpha} - \overline{\beta})$. Утверждение леммы 11 является непосредственным следствием этого равенства и определения множества $W(q_1, q_2)$. Лемма 11 доказана.

Пусть

$$Q_1 = \{(q_1, q_2) \in Q \mid q_1 \leqslant q_2 + 1\}, \quad Q_2 = \{(q_1, q_2) \in Q \mid q_1 \geqslant q_2 + 1\},$$

$$Q_1' = \{(q_1, q_2) \in Q_1 \mid q_1 \neq q_2 + 1\}, \quad Q_2' = \{(q_1, q_2) \in Q_2 \mid q_1 \neq q_2 + 1\}.$$

Очевидно, что $Q_1 \cup Q_2 = Q$, $Q_1' = Q_1 \backslash (Q_1 \cap Q_2)$ и $Q_2' = Q_2 \backslash (Q_1 \cap Q_2)$.

Рассмотрим семейство подграфов

$$G\left(W(q_1, q_2) \cup W(q_2 + 1, q_1 - 1)\right), \quad (q_1, q_2) \in Q_1,$$

графа G, порождённых подмножествами

$$W(q_1, q_2) \cup W(q_2 + 1, q_1 - 1), \quad (q_1, q_2) \in Q_1,$$

множества вершин $V(G)$.

Лемма 12. *Справедливы следующие утверждения*:

(i) *граф* G *является дизъюнктным объединением графов*

$$G\left(W(q_1, q_2) \cup W(q_2 + 1, q_1 - 1)\right), \quad (q_1, q_2) \in Q_1;$$

(ii) *граф* $G\left(W(q_1, q_2) \cup W(q_2 + 1, q_1 - 1)\right)$ *при* $(q_1, q_2) \in Q_1'$ *двудольный с долями* $W(q_1, q_2)$ *и* $W(q_2 + 1, q_1 - 1)$.

Доказательство. Ясно, что отображение $\mu : Q_1 \to Q_2$, заданное равенством $\mu(q_1, q_2) = (q_2 + 1, q_1 - 1)$, является биекцией множеств Q_1 и Q_2, включение $(q_1, q_2) \in Q'_1$ равносильно включению $\mu(q_1, q_2) \in Q'_2$, $\mu(q_1, q_2) = (q_1, q_2)$ при $(q_1, q_2) \in Q_1 \cap Q_2$. Кроме того, множества $W(q_1, q_2)$, $(q_1, q_2) \in Q$, попарно не пересекаются. Поэтому множество $V(G)$ является дизъюнктным объединением множеств

$$W(q_1, q_2) \cup W(q_2 + 1, q_1 - 1), \quad (q_1, q_2) \in Q_1.$$

Отсюда в силу леммы 11 следует утверждение (i).

Утверждение (ii) также вытекает из леммы 11 и того факта, что при $(q_1, q_2) \in Q'_1$ справедливо равенство $W(q_1, q_2) \cap W(q_2 + 1, q_1 - 1) = \varnothing$. Лемма 12 доказана.

Доказательство леммы 9. Рассмотрим произвольное паросочетание P графа G. Из леммы 12 следует, что в G найдётся не меньше

$$\sum_{(q_1,q_2)\in Q'_1} \big||W(q_1, q_2)| - |W(q_2 + 1, q_1 - 1)|\big|$$

вершин, не покрытых P. Оценим снизу эту величину.

На множестве целых чисел определим функцию

$$r(s) = \begin{cases} 2, & \text{если } s = 0 \pmod 3, \\ 1, & \text{если } s = 1 \pmod 3, \\ 0, & \text{если } s = 2 \pmod 3. \end{cases}$$

Очевидно, что $r(s) = 2s + 2 \pmod 3$. Поэтому $q_1 + 2q_2 = 1 \pmod 3$ равносильно равенству $q_1 = r(q_1 + q_2) \pmod 3$. Учитывая, что

$$|W(q_1, q_2)| = 3^{n-1} \binom{n}{q_1 + q_2} \binom{q_1 + q_2}{q_1}$$

при $(q_1, q_2) \in Q$, имеем

$$\sum_{(q_1,q_2)\in Q'_1} \big||W(q_1, q_2)| - |W(q_2 + 1, q_1 - 1)|\big|$$
$$= 3^{n-1} \sum_{(q_1,q_2)\in Q'_1} \binom{n}{q_1 + q_2} \left(\binom{q_1 + q_2}{q_1} - \binom{q_1 + q_2}{q_1 - 1} \right)$$
$$= 3^{n-1} \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} \sum_{1 \leqslant 3k + r(s) \leqslant \frac{1}{2}s} \left(\binom{s}{3k + r(s)} - \binom{s}{3k + r(s) - 1} \right)$$

$$= 3^{n-1}\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}\sum_{1\leqslant 3k+r(s)\leqslant\frac12 s}\left(1-\frac{3k+r(s)}{s-(3k+r(s))+1}\right)\binom{s}{3k+r(s)}$$

$$\geqslant 3^{n-1}\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}\sum_{1\leqslant 3k+r(s)\leqslant\frac12 s}\left(1-\frac{\frac12 s}{s-\frac12 s+1}\right)\binom{s}{3k+r(s)}$$

$$= 3^{n-1}\sum_{s=0}^{n}\frac{2}{s+2}\binom{n}{s}\sum_{1\leqslant 3k+r(s)\leqslant\frac12 s}\binom{s}{3k+r(s)}.$$

Воспользовавшись очевидным неравенством

$$\sum_{1\leqslant 3k+r(s)\leqslant\frac12 s}\binom{s}{3k+r(s)}\geqslant\frac12\Bigg(\sum_{1\leqslant 3k+r(s)\leqslant s}\binom{s}{3k+r(s)}-\binom{s}{\lfloor\frac{s}{2}\rfloor}-1\Bigg),$$

а также неравенствами [2]

$$\sum_{1\leqslant 3k+r(s)\leqslant s}\binom{s}{3k+r(s)}\geqslant\frac{2^s}{3}-\frac{2}{3},\qquad\binom{s}{\lfloor\frac{s}{2}\rfloor}\leqslant\frac{2^s}{\sqrt{s+1}},$$

имеем

$$3^{n-1}\sum_{s=0}^{n}\frac{2}{s+2}\binom{n}{s}\sum_{1\leqslant 3k+r(s)\leqslant\frac12 s}\binom{s}{3k+r(s)}$$

$$\geqslant 3^{n-1}\left(\frac13\sum_{s=0}^{n}\frac{2^s}{s+2}\binom{n}{s}-\sum_{s=0}^{n}\frac{2^s}{(s+2)\sqrt{s+1}}\binom{n}{s}-\frac53\sum_{s=0}^{n}\frac{1}{s+2}\binom{n}{s}\right)$$

$$=(3^{n-1})^2\left(\frac{3}{2n}-o\left(\frac1n\right)\right).$$

Последнее равенство вытекает из следующих соотношений:

$$\sum_{s=0}^{n}\frac{2^s}{s+2}\binom{n}{s}=\sum_{s=0}^{n}\frac{2^s}{s+1}\binom{n}{s}-\sum_{s=0}^{n}\frac{2^s}{(s+2)(s+1)}\binom{n}{s}$$

$$=\frac{1}{2(n+1)}\sum_{s=0}^{n}2^{s+1}\binom{n+1}{s+1}-\frac{1}{4(n+2)(n+1)}\sum_{s=0}^{n}2^{s+2}\binom{n+2}{s+2}$$

$$=\frac{3^{n+1}-1}{2(n+1)}-\frac{3^{n+2}-2(n+2)-1}{4(n+2)(n+1)}=3^{n-1}\left(\frac{9}{2n}-o\left(\frac1n\right)\right),$$

$$\sum_{s=0}^{n} \frac{2^s}{(s+2)\sqrt{s+1}}\binom{n}{s} \leqslant \sqrt{n+1}\ \sum_{s=0}^{n} \frac{2^s}{(s+2)(s+1)}\binom{n}{s}$$
$$= \sqrt{n+1}\ \frac{3^{n+2}-2(n+2)-1}{4(n+2)(n+1)} \ = \ 3^{n-1}o\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\sum_{s=0}^{n} \frac{1}{s+2}\binom{n}{s} = \sum_{s=0}^{n} \frac{1}{s+1}\binom{n}{s} \ - \ \sum_{s=0}^{n} \frac{1}{(s+2)(s+1)}\binom{n}{s}$$
$$= \frac{2^{n+1}-1}{n+1} \ - \ \frac{2^{n+2}-(n+2)-1}{(n+2)(n+1)} \ = \ 3^{n-1}o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Леммы 9, 7 и теорема 1 доказаны.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Августинович С. В., Васильев Ю. Л., Рычков К. Л.** Формульная сложность тернарной линейной функции // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2012. — Т. 19, № 3. — С. 3–12.
2. **Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А.** Задачи и упражнения по дискретной математике — М.: Физматлит, 2005. — 416 с.
3. **Рычков К. Л.** Модификация метода В. М. Храпченко и применение её к оценкам сложности П-схем для кодовых функций // Дискрет. анализ. — 1985. — Вып. 42. — С. 91–98.
4. **Рычков К. Л.** О нижних оценках сложности параллельно-последовательных контактных схем, реализующих линейные булевы функции // Сиб. журн. исслед. операций. —1994. — Т. 1, № 4. — С. 33–52.
5. **Рычков К. Л.** О сложности обобщённых контактных схем // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2009. — Т. 16, № 5. — С. 78–87.
6. **Рычков К. Л.** Нижняя оценка сложности реализации в классе π-схем q-ичного счётчика кратности q // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2010. — Т. 17, № 6. — С. 68–76.
7. **Храпченко В. М.** О сложности реализации линейной функции в классе П-схем // Мат. заметки. — 1971. — Т. 9, № 1. — С. 35–40.
8. **Храпченко В. М.** Об одном методе получения нижних оценок сложности П-схем // Мат. заметки. — 1971. — Т. 10, № 1. — С. 83–92.

Васильев Юрий Леонидович,
e-mail: vasyula@math.nsc.ru
Рычков Константин Леонидович,
e-mail: rychkov@math.nsc.ru

Статья поступила
18 марта 2013 г.