ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—август 2013. Том 20, № 4. С. 88–97

УДК 519.174

ПРОСТЫЕ ЦИКЛЫ В n-КУБЕ С БОЛЬШОЙ ГРУППОЙ АВТОМОРФИЗМОВ *)

А. Л. Пережогин

Аннотация. Под автоморфизмом цикла в n-кубе понимается автоморфизм куба, оставляющий цикл на месте и не меняющий его ориентации. Найдена верхняя оценка на порядок группы автоморфизмов циклов в n-кубе. Приведена конструкция, позволяющая строить длинные простые циклы, порядок групп которых достигает этой верхней оценки.

Ключевые слова: n-куб, цикл, автоморфизм, орбита, решётка.

Введение

Булевым n-мерным кубом Q_n называется граф, вершинами которого являются все двоичные наборы длины n; они соединены ребром, если соответствующие наборы различаются в одной позиции.

Автоморфизмом простого цикла C в Q_n назовём автоморфизм куба, оставляющий цикл на месте и не меняющий его ориентации.

Простой цикл в Q_n, содержащий все вершины, называется *гамильтоновым.*

Лемма 1 [1]. *Для любого гамильтонова цикла H в Q_n порядок группы автоморфизмов удовлетворяет неравенству*

$$|\mathrm{Aut}_+(H)| \leqslant 2^{\lfloor \log_2(n-1) \rfloor + 1}. \tag{1}$$

В [2] построены гамильтоновы циклы в Q_n при $n \leqslant 32$, для которых достигается верхняя оценка (1).

В настоящей работе исследуются группы автоморфизмов простых циклов в Q_n.

Рассмотрим простой цикл $C = v_1, v_2, \ldots, v_l, v_1$ с нетривиальной группой автоморфизмов $\mathrm{Aut}_+(C)$ порядка m. В [1] показано, что эта группа циклическая. Пусть φ — порождающий элемент этой группы такой, что

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 11–01–00997).

$$C = v_1, v_2, \ldots, v_{l/m}, \varphi(v_1), \varphi(v_2), \ldots, \varphi(v_{l/m}), \varphi^2(v_1), \varphi^2(v_2), \\ \ldots, \varphi^2(v_{l/m}), \ldots, \varphi^{m-1}(v_1), \varphi^{m-1}(v_2), \ldots, \varphi^{m-1}(v_{l/m}), v_1.$$

Тогда под действием группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}_+(C)$ все вершины цикла разбиты на l/m орбит длины m, цепь $v_1, v_2, \ldots, v_{l/m}$ содержит по одному представителю от каждой орбиты, а вершина цикла $\varphi(v_1)$ является вторым элементом первой орбиты.

Лемма 2. *Рассмотрим циклическую подгруппу $\langle\varphi\rangle$ порядка m группы автоморфизмов куба Q_n, порождённую некоторым автоморфизмом φ. Под действием этой подгруппы все вершины куба разобьются на орбиты. Если простая цепь $v_1, v_2, \ldots, v_l, v_{l+1}$ в кубе такова, что вершины $v_1, v_2, \ldots, v_l$ принадлежат разным орбитам длины m, а v_1 и v_{l+1} из одной орбиты, причём $\varphi(v_1) = v_{l+1}$, то последовательность вершин*

$$v_1, v_2, \ldots, v_l, \varphi(v_1), \varphi(v_2), \ldots, \varphi(v_l), \varphi^2(v_1), \varphi^2(v_2), \ldots, \varphi^2(v_l), \\ \ldots, \varphi^{m-1}(v_1), \varphi^{m-1}(v_2), \ldots, \varphi^{m-1}(v_l), v_1,$$

является простым циклом в Q_n длины lm, для которого группа $\langle\varphi\rangle$ порядка m является подгруппой группы автоморфизмов.

Лемма 3 [2]. *Если в Q_n существует цикл длины l с группой автоморфизмов $\langle\varphi\rangle$, то в Q_{n+1} существует цикл длины $2l$ с той же группой автоморфизмов.*

1. Циклы с группой автоморфизмов порядка $2n$

Важную роль играют циклы в Q_n с группой автоморфизмов $\langle\varphi_{\pi_n,v}\rangle$, где $\varphi_{\pi_n,v}(Q_n) = \pi_n(Q_n) \oplus v$, $\pi_n = (12\ldots n)$, v — вершина нечётного веса. Эта группа имеет порядок $2n$. Рассмотрим такие циклы подробнее. В [2] показано, что в качестве v можно взять произвольную вершину нечётного веса.

Пусть $v = e_n = (1, 0, 0, \ldots, 0)$. Рассмотрим группу $\langle\varphi_{\pi_n,e_n}\rangle$. Под действием этой группы множество вершин n-куба разбивается на орбиты. Заметим, что если $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то $\varphi_{\pi_n,e_n}(x) = (\overline{x}_n, x_1, \ldots, x_{n-1})$.

Лемма 4. *Вершина $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ под действием $\langle\varphi_{\pi_n,e_n}\rangle$ не попадает в орбиту длины $2n$ тогда и только тогда, когда существует нечётный делитель t числа n, $t > 1$, такой, что $x_{i+n/t} = \overline{x}_i$ при любом i, $1 \leqslant i \leqslant n - n/t$.*

Доказательство. Нетрудно видеть, что если такое t существует, то $\varphi^{n/t}_{\pi_n,e_n}(x) = \overline{x}$, следовательно, $\varphi^{2n/t}_{\pi_n,e_n}(x) = x$. Достаточность доказана.

Докажем необходимость. Пусть вершина $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ под действием $\langle \varphi_{\pi_n, e_n} \rangle$ попадает в орбиту длины $s < 2n$. Тогда

$$\varphi^s_{\pi_n, e_n}(x) = x. \qquad (2)$$

Поскольку порядок группы $\langle \varphi_{\pi_n, e_n} \rangle$ равен $2n$, s делит $2n$. С другой стороны, s не делит n, так как иначе $\overline{x}_{n-s+1} = x_1 = x_{s+1} = \dots = x_{n-2s+1} = x_{n-s+1}$. Получаем, что $s = 2s_1$, причём s_1 делит n, а $s = 2s_1$ не делит n. Следовательно, $k = n/s_1$ — нечётное натуральное число, большее единицы (поскольку $s_1 \neq n$). Из (2) имеем $x_{i+s_1} = \overline{x}_i$ при любом i, $1 \leqslant i \leqslant n - s_1$. Лемма 4 доказана.

Следствие 1. *Пусть $p_1, p_2, \dots, p_m$ — все нечётные простые делители числа n. Тогда в Q_n под действием $\langle \varphi_{\pi_n, e_n} \rangle$ ровно*

$$2^n + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant m} 2^{\overline{\frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_k}}}}$$

вершин попало в орбиты длины $2n$.

Доказательство. Через A_j, $1 \leqslant j \leqslant m$, обозначим множество вершин n-куба таких, что $x_{i+n/p_j} = \overline{x}_i$ при любом i, $1 \leqslant i \leqslant n - n/t$. Тогда множество всех вершин, принадлежащих орбитам длины $2n$, совпадает с множеством $Q_n \backslash (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m)$. Применяя формулу включений и исключений, получаем требуемое. Следствие 1 доказано.

Следствие 2. *В Q_n под действием $\langle \varphi_{\pi_n, e_n} \rangle$ образуется ровно*
(i) $(2^n - 2)/(2n)$ *орбит длины $2n$, если n — нечётное простое число*;
(ii) $2^n/(2n)$ *орбит длины $2n$, если n является степенью двойки.*

Для любого $n \geqslant 2$ определим граф орбит G_n следующим образом: его вершины суть все орбиты в Q_n длины $2n$ под действием $\langle \varphi_{\pi_n, e_n} \rangle$, при этом две вершины смежны, если соответствующие орбиты имеют смежных в Q_n представителей. В этом графе возможны петли.

В [2] доказано, что если для некоторого $n = 2^t$ граф G_n гамильтонов (имеет гамильтонов цикл), то в Q_{n+1} существует гамильтонов цикл, у которого порядок группы автоморфизмов достигает верхней оценки (1).

Из леммы 2 непосредственно следует

Теорема 1. *Пусть в графе G_n существует простой цикл нечётной длины l, причём цепь $v_1, v_2, \dots, v_l, v_{l+1}$ в Q_n является цепью представителей соответствующих орбит, а $v_{l+1} = \varphi^k_{\pi_n, e_n}(v_1)$ для некоторого k, взаимно простого с $2n$. Тогда в Q_n существует простой цикл длины $2nl$,*

для которого группа $\langle \varphi^k_{\pi_n,e_n} \rangle$ порядка $2n$ является подгруппой группы автоморфизмов.

Обозначим через l_n максимальную нечётную длину l цикла из теоремы 1, а через φ_n — соответствующий автоморфизм $\varphi^k_{\pi_n,e_n}$. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Графы G_2 и G_3 состоят из единственной вершины с петлей, тем самым $l_2 = l_3 = 1$. Поэтому в Q_2 (Q_3) существует цикл длины 4 (6) с группой автоморфизмов порядка 4 (6).

Пример 2. Граф G_4 состоит из двух смежных вершин с петлями, следовательно, $l_4 = 1$. Поэтому в Q_4 существует цикл длины 8 с группой автоморфизмов порядка не менее 8.

Пример 3. В графе G_5 три вершины, и он имеет гамильтонов цикл. Искомой цепью представителей орбит будет $(0,0,0,0,0)$, $(0,0,0,1,0)$, $(1,0,0,1,0)$, $(1,0,0,0,0)$. Следовательно, $l_5 = 3$. Таким образом, в Q_5 существует цикл длины 30 с группой автоморфизмов порядка не менее 10.

Пример 4. Граф G_6 с пятью вершинами гамильтонов. Искомой цепью представителей орбит будет

$$(0,0,0,0,0,0),\ (0,1,0,0,0,0),\ (0,1,0,1,0,0),\ (0,0,0,1,0,0),\\ (1,0,0,1,0,0),\ (1,0,0,0,0,0).$$

Следовательно, $l_6 = 5$. В Q_6 существует цикл длины 60 с группой автоморфизмов порядка не менее 12.

Пример 5. В графе G_7 девять вершин, и он имеет гамильтонов цикл. Искомой цепью представителей орбит будет

$$(0,0,0,0,0,0,0),\ (0,0,0,0,0,1,0),\ (0,0,0,1,0,1,0),\ (0,0,0,1,0,0,0),\\ (0,0,0,1,0,0,1),\ (1,0,0,1,0,0,1),\ (1,0,0,1,1,0,1),\ (1,0,0,1,1,0,0),\\ (1,0,0,1,0,0,0), (1,0,0,0,0,0,0).$$

Следовательно, $l_7 = 9$. Таким образом, в Q_7 существует цикл длины 126 с группой автоморфизмов порядка не менее 14.

Пример 6. В графе G_8 шестнадцать вершин. Этот граф имеет как гамильтонов цикл, так и цикл длины 15, для которого цепью представителей орбит будет

$$(0,0,1,0,1,0,1,0), (0,0,1,0,1,1,1,0), (0,1,1,0,1,1,1,0),$$

$$(0,1,0,0,1,1,1,0),\ (0,1,0,0,0,1,1,0),\ (0,0,0,0,0,1,1,0),$$
$$(0,0,0,0,0,1,0,0),\ (0,0,1,0,0,1,0,0),\ (0,0,1,1,0,1,0,0),$$
$$(0,0,1,1,0,0,0,0),\ (0,0,1,1,0,0,0,1),\ (0,0,1,0,0,0,0,1),$$
$$(0,0,0,0,0,0,0,1).$$

Имеем $l_8 = 15$, причём $\varphi_8 = \varphi^{15}_{\pi_8,e_8}$. Таким образом, в Q_8 существует цикл длины 240 с группой автоморфизмов порядка не менее 16.

Заметим, что наибольший порядок группы автоморфизмов гамильтонова цикла в кубе Q_n при $5 \leqslant n \leqslant 8$ равен 8.

2. Верхняя оценка порядка группы автоморфизмов простых циклов в n-кубе

Для натурального $n \geqslant 2$ определим $P(n) = (p_1, p_2, \dots, p_t)$ — кортеж натуральных чисел, удовлетворяющий следующим условиям: (i) число p_i простое, $1 \leqslant i \leqslant t$; (ii) $p_1 < p_2 < \dots < p_t$; (iii) $p_1 + p_2 + \dots + p_t \leqslant n$; (iv) произведение $p_1 p_2 \cdots p_t$ максимально по всем кортежам, удовлетворяющим условиям (i)–(iii).

Теорема 2. *Для любого простого цикла C в Q_n справедливо неравенство $|\mathrm{Aut}_+(C)| \leqslant 2p_1 p_2 \dots p_t$, где $P(n) = (p_1, p_2, \dots, p_t)$.*

Доказательство. В группе автоморфизмов $\mathrm{Aut}_+(C)$ есть порождающий элемент $\varphi_{\pi,v}$, где $\varphi_{\pi,v}(Q_n) = \pi(Q_n) \oplus v$. Пусть в циклическом представлении перестановки π ровно s циклов и их длины $q_1, q_2, \dots, q_s$. Если $q = \text{НОК}(q_1, q_2, \dots, q_s)$, то перестановка π^q тождественная. Следовательно, $|\mathrm{Aut}_+(C)| \leqslant 2\text{НОК}(q_1, q_2, \dots, q_s)$. Поскольку $q_1 + q_2 + \dots + q_s \leqslant n$, очевидно, что

$$\text{НОК}(q_1, q_2, \dots, q_s) \leqslant p_1 p_2 \cdots p_t,$$

где $P(n) = (p_1, p_2, \dots, p_t)$. Теорема 2 доказана.

Заметим, что нахождение разложения $P(n)$ для произвольного числа n — интересная комбинаторная задача, однако найти его для сравнительно небольшого числа n несложно.

3. Гамильтоновы цепи в решётках

Перед формулировкой и доказательством основного результата работы необходимо рассмотреть задачу существования гамильтоновых цепей в многомерных решётках.

Лемма 5. *Пусть в графе G подмножество вершин $X \subseteq VG$ таково, что $|X| \geqslant 3$ и для любых двух различных вершин $x, y \in X$ существует*

гамильтонова (x, y)-цепь в G. Рассмотрим граф L, являющийся цепью $v_1, v_2, \ldots, v_m$, при нечётном m. Тогда в графе $G \times L$ для любых двух вершин (x_1, v_1) и (x_2, v_m), $x_1, x_2 \in X$, существует гамильтонова цепь с концами в этих вершинах.

Доказательство. Рассмотрим три различные вершины $x, y, z \in X$ такие, что $x = x_1$, а если $x_1 \neq x_2$, то $y = x_2$. Искомую гамильтонову цепь получим последовательным обходом каждой копии графа G, подвешенной на вершинах $v_1, v_2, \ldots, v_m$. При этом в копии на вершине v_i проходим по гамильтоновой (x, y)-цепи, если $i = 1$; (y, z)-цепи, если i чётно; (z, y)-цепи, если i нечётно и $1 < i < m$; (z, x_2)-цепи, если $i = m$. Лемма 5 доказана.

Рассмотрим решётку $\mathrm{LAT}_{m_1, m_2, \ldots, m_k}$, получаемую декартовым произведением k цепей чётной (возможно, нулевой) длины $L_i = v_1^i, v_2^i, \ldots, v_{m_i}^i$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Вершину $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ решётки назовём угловой, если $x_i \in \{v_1^i, v_{m_i}^i\}$ для любого i, $1 \leqslant i \leqslant k$.

Теорема 3. *Для любых двух различных угловых вершин решётки $\mathrm{LAT}_{m_1, m_2, \ldots, m_k}$ существует гамильтонова цепь в решётке с концами в этих двух вершинах.*

Доказательство. Заметим, что декартово произведение графа на цепь длины нуль (вершину) не меняет графа и множества его угловых вершин. Поэтому без ограничения общности положим $m_i \geqslant 3$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Докажем теорему индукцией по k. При $k = 1$ утверждение тривиально. Также легко видеть, что теорема верна при $k = 2$.

Рассмотрим некоторое $k \geqslant 3$ и произвольную решётку $\mathrm{LAT}_{m_1, m_2, \ldots, m_k}$. Пусть $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_k)$ — различные угловые вершины в ней. Тогда $x_j \neq y_j$ для некоторого j, $1 \leqslant j \leqslant k$. Имеем $\mathrm{LAT}_{m_1, m_2, \ldots, m_k} \cong G \times L_j$, где $G = L_1 \times \cdots \times L_{j-1} \times L_{j+1} \times \cdots \times L_k$. Тогда существование гамильтоновой цепи между x и y следует из индукционного предположения и леммы 5. Теорема 3 доказана.

4. Конструкция циклов с большой группой автоморфизмов

Набор чисел $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ назовём *допустимым*, если из того, что среди чисел $l_{n_1}, \ldots, l_{n_k}$ ровно одно отлично от единицы, следует, что k нечётно.

Пусть

$$\alpha(k) = \begin{cases} 2^{k-1}, & \text{если } k \text{ чётно}, \\ 2^{k-1} - 1, & \text{если } k \text{ нечётно}. \end{cases}$$

Конструкция длинных циклов с большими группами автоморфизмов основана на следующей теореме.

Теорема 4. *Пусть* $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$, $k \geqslant 2$, $n_i \geqslant 2$, $1 \leqslant i \leqslant k$, *и набор чисел* $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ *допустим. Тогда в* Q_n *существует простой цикл длины* $2\text{НОК}(n_1, n_2, \dots, n_k)\alpha(k)\prod\limits_{i=1}^{k} l_{n_i}$ *с группой автоморфизмов порядка, кратного* $2\text{НОК}(n_1, n_2, \dots, n_k)$.

Доказательство. Разложим Q_n на произведение подкубов:

$$Q_n = Q_{n_1} \times Q_{n_2} \times \dots \times Q_{n_k}. \qquad (3)$$

Для каждого s, $1 \leqslant s \leqslant k$, в подкубе Q_{n_s} рассмотрим простой цикл нечётной длины l_{n_s} в графе орбит G_{n_s} и цепь представителей соответствующих орбит $v_1^s, v_2^s, \dots, v_{l_{n_s}}^s, v_{l_{n_s}+1}^s$, причём $v_{l_{n_s}+1}^s = \varphi_{n_s}\bigl(v_1^s\bigr)$ и кортежи $v_{l_{n_s}+1}^s$ и v_1^s имеют разную чётность веса. По теореме 1 эта цепь порождает простой цикл в Q_{n_s} длины $2n_s l_{n_s}$ с подгруппой $\langle\varphi_{n_s}\rangle$ порядка $2n_s$ группы автоморфизмов. Обозначим две подцепи этого цикла:

$$L_s^0 = v_1^s, v_2^s, \dots, v_{l_{n_s}}^s, \quad L_s^1 = \varphi_{n_s}\bigl(v_1^s\bigr), \varphi_{n_s}\bigl(v_2^s\bigr), \dots, \varphi_{n_s}\bigl(v_{l_{n_s}}^s\bigr).$$

В Q_n рассмотрим автоморфизм φ_n^*, получающийся прямым произведением автоморфизмов $\varphi_{n_1}, \varphi_{n_2}, \dots, \varphi_{n_k}$ на соответствующих подкубах. Отметим два свойства автоморфизма φ_n^*.

(a) Группа $\langle\varphi_n^*\rangle$ имеет порядок $2\text{НОК}(n_1, n_2, \dots, n_k)$. Действительно, число $\text{НОК}(n_1, n_2, \dots, n_k)$ делит этот порядок, но не равно ему, поскольку для любого i, $1 \leqslant i \leqslant k$, кортеж $\varphi_{n_s}^{n_s}(v)$, $v \in Q_{n_i}$, является отрицанием кортежа v и существует индекс j, $1 \leqslant j \leqslant k$, такой, что число $\text{НОК}(n_1, n_2, \dots, n_k)/n_j$ нечётно.

(b) Если две вершины $(x^1, x^2, \dots, x^k)$ и $(y^1, y^2, \dots, y^k)$ декартова произведения (3) попали в одну орбиту под действием $\langle\varphi_n^*\rangle$, то во всех парах вершин (x^i, y^i), $1 \leqslant i \leqslant k$, чётность веса вершин одновременно одинакова или одновременно разная.

Рассмотрим простую цепь длины $\alpha(k) - 1$ в Q_{k-1} из нулевой вершины в единичную:

$$\bigl(\sigma_1^1, \sigma_2^1, \dots, \sigma_{k-1}^1\bigr), \bigl(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_{k-1}^2\bigr), \dots, \bigl(\sigma_1^{\alpha(k)}, \sigma_2^{\alpha(k)}, \dots, \sigma_{k-1}^{\alpha(k)}\bigr).$$

В качестве такой цепи можно, например, взять монотонный код Грея, построенный в [3].

Рассмотрим последовательность решёток

$$L_1^{\sigma_1^1} \times L_2^{\sigma_2^1} \times \dots \times L_{k-1}^{\sigma_{k-1}^1} \times L_k^0, \cdots, L_1^{\sigma_1^{\alpha(k)}} \times L_2^{\sigma_2^{\alpha(k)}} \times \dots \times L_{k-1}^{\sigma_{k-1}^{\alpha(k)}} \times L_k^0.$$

Для каждого $1 \leqslant j \leqslant \alpha(k)$ в решётке $L_1^{\sigma_1^j} \times L_2^{\sigma_2^j} \times \dots \times L_{k-1}^{\sigma_{k-1}^j} \times L_k^0$ рассмотрим гамильтонову цепь H_j такую, что последовательность гамильтоновых цепей

$$H_1, H_2, \dots, H_{\alpha(k)} \tag{4}$$

обладает следующими свойствами:

(i) первая вершина цепи H_1 равна $\bigl(v_1^1, v_1^2, \dots, v_1^k\bigr)$;

(ii) последняя вершина цепи $H_{\alpha(k)}$ равна

$$\bigl(\varphi_{n_1}(v_1^1), \varphi_{n_2}(v_1^2), \dots, \varphi_{n_{k-1}}(v_1^{k-1}), v_{l_{n_k}}^k\bigr);$$

(iii) если для некоторых j и t имеем $\sigma_t^j = 0$ и $\sigma_t^{j+1} = 1$, то последняя вершина цепи H_j и первая вершина цепи H_{j+1} различаются только в t-й координате, причём у последней вершины цепи H_j эта координата равна $v_{l_{n_t}}^t$, а у первой вершины цепи H_{j+1} — равна $\varphi_{n_t}\bigl(v_1^t\bigr)$;

(iv) если для некоторых j и t имеем $\sigma_t^j = 1$ и $\sigma_t^{j+1} = 0$, то последняя вершина цепи H_j и первая вершина цепи H_{j+1} различаются только в t-й координате, причём у последней вершины цепи H_j эта координата равна $\varphi_{n_t}\bigl(v_1^t\bigr)$, а у первой вершины цепи H_{j+1} — равна $v_{l_{n_t}}^t$.

Существование гамильтоновых цепей, удовлетворяющих (i)–(iv), таких, что среди $l_{n_1}, \dots, l_{n_k}$ не менее двух чисел отличны от 1, гарантирует теорема 3. Когда все числа $l_{n_1}, \dots, l_{n_k}$ равны 1, гамильтоновы цепи вырождаются в одну вершину, а когда ровно одно отлично от единицы, для обеспечения вышеуказанных свойств необходима нечётность числа $\alpha(k)$, следующая из допустимости набора $(n_1, n_2, \dots, n_k)$.

Нетрудно видеть, что последовательность (4) является цепью в Q_n представителей орбит под действием $\langle \varphi_n^* \rangle$. Действительно, если в (4) есть два представителя одной орбиты, то по построению автоморфизма φ_n^* они должны быть из разных решёток, что противоречит второму свойству автоморфизма φ_n^*.

По построению последовательность (4) содержит $\alpha(k) \prod\limits_{i=1}^{k} l_{n_i}$ вершин. Из свойств (i) и (ii) последовательность (4) начинается в вершине $\bigl(v_1^1, v_1^2, \dots, v_1^k\bigr)$ и заканчивается в $\bigl(\varphi_{n_1}\bigl(v_1^1\bigr), \dots, \varphi_{n_{k-1}}\bigl(v_1^{k-1}\bigr), v_{l_{n_k}}^k\bigr)$, смежной в Q_n с вершиной $\bigl(\varphi_{n_1}\bigl(v_1^1\bigr), \dots, \varphi_{n_k}\bigl(v_1^k\bigr)\bigr) = \varphi_n^*\bigl(v_1^1, v_1^2, \dots, v_1^k\bigr)$. По лемме 2 получаем в Q_n цикл длины $2\text{НОК}(n_1, n_2, \dots, n_k)\alpha(k) \prod\limits_{i=1}^{k} l_{n_i}$ с подгруппой $\langle \varphi_n^* \rangle$ порядка $2\text{НОК}(n_1, n_2, \dots, n_k)$ группы автоморфизмов. Теорема 4 доказана.

Нетрудно видеть, что для любого $n \geqslant 5$ набор $P(n) = (p_1, p_2, \ldots, p_k)$ допустим. Значит, используя лемму 3, получаем

Следствие 3. *Пусть $n \geqslant 5$, $P(n) = (p_1, p_2, \ldots, p_k)$, $q = n - p_1 - p_2 - \ldots - p_k$. Тогда в Q_n существует простой цикл длины $2^{q+1}\alpha(k) \prod\limits_{i=1}^{k} p_i l_{p_i}$ с группой автоморфизмов порядка $2p_1p_2 \ldots p_k$.*

5. Заключение

Для построения длинных циклов в Q_n с большими группами автоморфизмов важным является нахождение l_p для любого простого p. В частности, верно ли, что *для любого нечётного простого числа p имеем $l_p = \frac{2^p-2}{2p}$*? Если эта гипотеза верна, то в силу следствия 3 для любого $n \leqslant 10$ при $P(n) = (p_1, p_2, \ldots, p_k)$ в Q_n существует простой цикл с группой автоморфизмов порядка $2p_1p_2 \ldots p_k$ длины $c(n)2^n$, где

$$c(n) = \begin{cases} \frac{\alpha(k)}{2^{k-1}} \prod\limits_{i=1}^{k} \frac{2^{p_i}-2}{2^{p_i}}, & \text{если 2 не входит в разложение} \\ & P(n) = (p_1, p_2, \ldots, p_k), \\ \frac{\alpha(k)}{2^{k-1}} \prod\limits_{i=2}^{k} \frac{2^{p_i}-2}{2^{p_i}} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Рассмотрим в качестве примера куб Q_{17}. Так как $P(17) = (2, 3, 5, 7)$, причём $17 = 2+3+5+7$, согласно теореме 2 для любого простого цикла C в Q_{17} имеем $|\mathrm{Aut}_+(C)| \leqslant 420$. В разд. 1 показано, что $l_2 = l_3 = 1$, $l_5 = 3$, $l_7 = 9$. Тогда по следствию 3 в Q_{17} существует простой цикл длины 90720 с группой автоморфизмов порядка 420. Заметим, что в Q_{17} всего 131072 вершин и любой гамильтонов цикл имеет группу автоморфизмов порядка не больше 16.

В заключение приведём ещё одну нерешённую задачу из [2].

- Верно ли, что для любого $k \geqslant 2$ и $n = 2^k$ справедливо $l_n = \frac{2^n}{2n}$?

В [2] показано, что если эта гипотеза верна, то оценка леммы 1 становится точной.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Пережогин А. Л.** Об автоморфизмах циклов в n-мерном булевом кубе // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 2007. — Т. 14, № 3. — С. 67–79.

2. **Пережогин А. Л.** О прямых автоморфизмах гамильтоновых циклов в n-мерном булевом кубе // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2010. — Т. 17, № 4. — С. 32–42.
3. **Savage C. D., Winkler P.** Monotone Gray codes and the middle two levels problem // J. Comb. Theory. Ser. A. — 1995. — Vol. 70, N 2. — P. 230–248.

Пережогин Алексей Львович,
e-mail: pereal@math.nsc.ru

Статья поступила
27 марта 2013 г.

Переработанный вариант —
29 мая 2013 г.