ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Сентябрь—октябрь 2013. Том 20, № 5. С. 66–83

УДК 519.8

О РАЗРЕШИМОСТИ 8-ИНДЕКСНОЙ АКСИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ НА ОДНОЦИКЛИЧЕСКИХ ПОДСТАНОВКАХ *)

О. Ю. Цидулко

Аннотация. Рассматривается 8-индексная аксиальная задача о назначениях на одноциклических подстановках. Для этой комбинаторной задачи долгое время оставался открытым вопрос о совместности её системы ограничений для одноциклических подстановок длины n. Доказано, что эта система совместна при нечётных $n \geqslant 87$.

Ключевые слова: многоиндексная задача о назначениях, аксиальность, разрешимость, одноциклическая подстановка.

Введение

Одной из наиболее известных задач линейного программирования и комбинаторной оптимизации является двухиндексная задача о назначениях. Её постановка может звучать следующим образом: из элементов заданной $(n \times n)$-матрицы требуется выбрать n элементов по одному в каждой строке и каждом столбце таких, что сумма выбранных элементов минимальна (или максимальна).

Задача хорошо изучена: построены эффективные алгоритмы для нахождения её точного решения, а также известны многие свойства, которые касаются существования целочисленного оптимального решения релаксации задачи, математического ожидания оптимального значения целевой функции на случайных входах и других аспектов [8].

Естественным обобщением этой задачи является многоиндексная задача о назначениях (МЗН), имеющая практические приложения к связи, логистике, производству, экономике. Рассматривают варианты МЗН при различных дополнительных ограничениях: аксиальность, планарность, вид перестановок и т. п. С обзором по МЗН можно познакомиться

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 12–01–00093а, 13–07–00070а, 12–01–33028а и 13–01–91370СТ-а), целевых программ СО РАН (интеграционный проект № 7Б) и Президиума РАН (проект № 227).

в [8, 11]. В последнее время получены интересные результаты для модификации трёхиндексной планарной задачи о назначениях на одноциклических подстановках [1, 3–5].

Рассмотрим случай аксиальной m-индексной задачи о назначениях (m-АЗН). Пусть даны n-элементные множества $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Для каждого кортежа, элемента декартова произведения $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m$, известен его вес — некоторое вещественное число $c_{i_1 i_2 \ldots i_m}$. Задача заключается в выборе n кортежей минимального суммарного веса таких, что любой элемент из $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m$ содержится ровно в одном кортеже. Другими словами, дана прямоугольная вещественная $(\overbrace{n \times \cdots \times n}^{m})$-матрица $C = (c_{i_1 i_2 \ldots i_m})$. Введём переменные $x_{i_1 i_2 \cdots\, i_m}$, принимающие значения 0 или 1, $i_k = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, m}$. Требуется минимизировать линейную форму (сумму элементов матрицы с единичными значениями переменных)

$$\sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_m=1}^{n} c_{i_1 i_2 \cdots\, i_m} x_{i_1 i_2 \cdots\, i_m} \tag{1}$$

при условиях

$$\sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_{k-1}=1}^{n} \sum_{i_{k+1}=1}^{n} \cdots \sum_{i_m=1}^{n} x_{i_1 i_2 \cdots\, i_m} = 1, \quad i_k = \overline{1, n},\ k = \overline{1, m}. \tag{2}$$

Это классическая формулировка задачи m-АЗН [8]. Решение задачи может быть представлено выбором в матрице C ровно n элементов (как и в двухиндексном случае), сумма весов которых и составляет целевую функцию. Этим и только этим выбранным элементам соответствуют единичные значения переменных задачи.

Поскольку в (2) для каждого индекса i_k выбирается только один элемент матрицы, этот элемент можно представить как результат действия некоторой подстановки φ_k. Таким образом, получим другую, более удобную форму записи m-АЗН с помощью подстановок из симметрической группы S_n порядка n [8]:

$$\sum_{i=1}^{n} c_{i, \varphi_1(i), \varphi_2(i), \ldots, \varphi_{m-1}(i)} \ \to \ \min_{\varphi_k \in S_n,\, 1 \leqslant k < m}.$$

Всюду под подстановкой $\sigma \in S_n$ понимается биекция $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$. Будем обозначать через $\sigma(i)$ результат действия функции σ на элемент i.

Эта задача NP-трудна при $m \geqslant 3$ [9, 10].

Задачу m-АЗН на одноциклических подстановках можно ставить поразному. Поясним эту специфику на примере трёхиндексной аксиальной задачи о назначениях:

$$\sum_{i=1}^{n} c_{i,\varphi_1(i),\varphi_2(i)} \to \min_{\varphi_1,\varphi_2\in S_n}.$$

Переобозначим $\pi_1 = \varphi_1$, а подстановку $\varphi_2 \in S_n$ представим в виде произведения $\varphi_2 = \pi_2\pi_1$, где $\pi_2 \in S_n$. Здесь и далее произведение подстановок понимается таким, что $(\pi_2\pi_1)(i) = \pi_1(\pi_2(i))$. В терминах подстановок π_2, $\pi_1 \in S_n$ задача имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} c_{i,\pi_1(i),\pi_2\pi_1(i)} \to \min_{\pi_2,\pi_1}. \tag{3}$$

Через P_n обозначим подмножество одноциклических подстановок в S_n. Задача (3) с дополнительным требованием одноцикличности подстановок $\varphi_1 = \pi_1$ и $\varphi_2 = \pi_2\pi_1$ называется 3-*индексной аксиальной задачей о назначениях с двумя одноциклическими подстановками* [7]. Требование одноцикличности трёх подстановок π_1, π_2, $\pi_2\pi_1$ даёт 3-индексную аксиальную задачу о назначениях на одноциклических подстановках. Впервые эта задача поставлена А. И. Сердюковым в [6].

В настоящей статье рассмотрена многоиндексная аксиальная задача о назначениях на одноциклических подстановках по Сердюкову (обозначение m-АЗНО). Сформулируем эту задачу для произвольного числа индексов m: минимизировать функцию

$$\sum_{i=1}^{n} c_{i,\sigma_{21}(i),\sigma_{31}(i),\,\dots,\,\sigma_{m1}(i)} \tag{4}$$

на множестве подстановок $\{\pi_k \mid 1 \leqslant k < m\}$ таких, что

$$\sigma_{jj'} = \pi_{j-1}\pi_{j-2}\dots\pi_{j'+1}\pi_{j'} \in P_n \quad \text{при } 1 \leqslant j' < j \leqslant m. \tag{5}$$

В частности, здесь $\sigma_{21} = \pi_1$, $\sigma_{31} = \pi_2\pi_1$, $\sigma_{41} = \pi_3\pi_2\pi_1$, и т. д. Подчеркнём, что в формулировке этой задачи требуется одноцикличность не только всех подстановок π_k и σ_{j1}, входящих в целевую функцию, но и промежуточных произведений $\sigma_{jj'}, 1 \leqslant j' < j \leqslant m$, т. е. одноциклическими, например, должны также быть подстановки $\sigma_{42} = \pi_3\pi_2$ или $\sigma_{73} = \pi_6\pi_5\pi_4\pi_3$, и т. д.

Задача (4) с ограничениями (5) MAX SNP-трудна (т. е. из существования для неё PTAS следует P=NP), поскольку её частный случай при $m = 1$ — известная задача коммивояжёра.

Сложная система ограничений (5) на одноцикличность искомых подстановок задачи не всегда может быть совместна. В частности, в [6] показано, что при любых $m > 1$ для чётных значений n эта система не имеет решений. В связи с этим ставится вопрос о существовании решения задачи m-АЗНО при нечётных значениях n.

Систему подстановок $\{\pi_k \,|\, 1 \leqslant k \leqslant m\}$ будем называть *допустимой* (*допустимым решением*), если для неё выполняется условие (5), а m-АЗНО — *разрешимой*, если для неё существует хотя бы одна допустимая система подстановок.

В 2000 г. в [2] исследован вопрос о разрешимости данной задачи при числе индексов, равном 7, и получена ключевая

Теорема. *Для любого $2 < m \leqslant 7$ найдётся номер n_m такой, что m-АЗНО разрешима при $n \geqslant n_m$ тогда и только тогда, когда n нечётно.*

В данной статье рассматривается 8-АЗНО и исследуется вопрос разрешимости её для нечётных значений размерности задачи n.

1. Предварительные замечания

Приведём ряд полезных утверждений о свойствах подстановок из S_n.

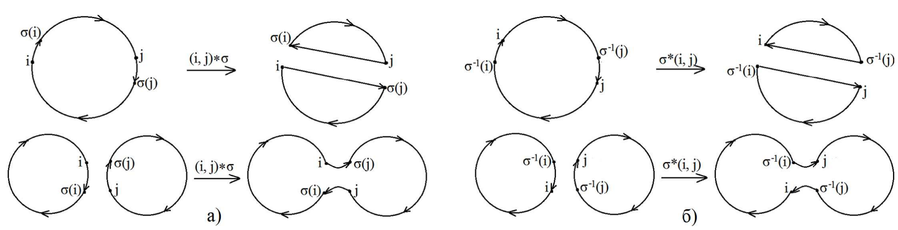

Рис. 1. Пример действия транспозиции (i, j) слева и справа на подстановку σ

Замечание 1. При умножении произвольной подстановки σ из S_n на транспозицию (i, j) (как справа, так и слева, рис. 1) чётность числа циклов в подстановке меняется. При этом число циклов уменьшается на 1, если индексы i и j принадлежат разным циклам, и увеличивается на 1, если индексы i и j находятся в одном цикле.

Замечание 2. Для любых двух подстановок α и σ из S_n имеет место свойство: подстановки σ и $\alpha\sigma\alpha^{-1}$ имеют одинаковое количество циклов.

Замечание 3. Пара транспозиций вида $(1,b)(c,b)$, действуя слева на цикл вида $(1,\ldots,c,\ldots,b,\ldots)$, даёт в результате

$$(1,b)(c,b)(1,\ldots,c,\boxed{e,\ldots,b},\ldots)=(1,\boxed{e,\ldots,b},\ldots,c,\ldots).$$

В этом случае будем говорить, что пара транспозиций $(1,b)(c,b)$ *перемещает список* $\{e,\ldots,b\}$ *на место после* 1.

Замечание 4. Пусть $\alpha=(1,b)(c,b)$, $\sigma=(1,\ldots,c,\ldots,b,\ldots)$ и $\gamma=(1,\ldots)(c,\ldots)(b,\ldots)$ — произведение трёх непересекающихся циклов. Тогда результатом умножения $\alpha\sigma\alpha^{-1}$ и $\alpha\gamma\alpha^{-1}$ будут

$$\begin{aligned}\alpha\sigma\alpha^{-1}&=(1,b)(c,b)(1,a\ldots,c_l,c,c_r,\ldots,b_l,b,b_r,\ldots)(c,b)(1,b)\\&=(b,a\ldots,c_l,1,c_r,\ldots,b_l,c,b_r,\ldots),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha\gamma\alpha^{-1}&=(1,b)(c,b)(1,a\ldots)(c_l,c,c_r,\ldots)(b_l,b,b_r,\ldots)(c,b)(1,b)\\&=(b,a\ldots)(c_l,1,c_r,\ldots)(b_l,c,b_r,\ldots).\end{aligned}$$

Далее всюду $\pi=(1,2,3,\ldots,n)$. Отметим некоторые очевидные свойства подстановки π^k — цикла π, возведённого в степень $k\in\mathbb{N}$.

Утверждение 1. *Для цикла* $\pi=(1,2,3,\ldots,n)$ *и* $k\in\mathbb{N}$ *справедливы свойства*:

(i) $\pi^k(i)=\begin{cases} i+k\,(\mathrm{mod}\,n), & \text{если } i+k\neq 0(\mathrm{mod}\,n),\\ n & \text{в противном случае.}\end{cases}$

(ii) *Пусть* $d=\text{НОД}(k,n)$. *Тогда* π^k *раскладывается в произведение* d *непересекающихся циклов, состоящих из чисел с одинаковым остатком от деления на* d. *В частности, если* $\text{НОД}(k,n)=1$, *то подстановка* π^k *одноциклическая.*

(iii) *Будем называть i-блоком список элементов вида* $\{i,i+k,i+2k,\ldots,i+s_ik\}$, *где* $i,k,s_i\in\mathbb{N}$. *Подстановка* π^k *состоит из i-блоков,* $i=1,\ldots,k$,

$$[1,1+k,\ldots,1+s_1k][2,2+k,\ldots,2+s_2k]\ldots[k,k+k,\ldots,k+s_kk],$$

где $s_i\in\mathbb{N}$ *— максимальное число такое, что* $i+s_ik\leqslant n$. *При различных* n *блоки могут менять порядок относительно друг друга внутри содержащего их цикла.*

Утверждение 2. *Пусть* $\alpha=(1,b)(c,b)$, $1<c,b\leqslant n$, *и пусть* k *такое, что подстановка* π^k *одноциклическая. Тогда* $\alpha\pi^k$ *одноциклическая, если выполнены условия* (i) $1<c<b$ *и* (ii) $c=b\,(\mathrm{mod}\,k)$, *либо* $c=1\,(\mathrm{mod}\,k)$.

Доказательство. Как сказано выше, одноциклическая подстановка π^k состоит из i-блоков, $i = 1, \dots, k$,

$$[1, 1+k, \dots, 1+s_1k][2, 2+k, \dots, 2+s_2k] \dots [k, k+k, \dots, k+s_kk].$$

$$\text{(a)}\quad \pi^k = \Big(\boxed{1, 1+k, \dots, 1+s_1k,}\ \dots,\ \boxed{r, r+k, \dots, c, \boxed{\dots, b,} \dots, r+s_rk,}\ \dots\Big)$$

$$\text{(b)}\quad \pi^k = \Big(\boxed{1, 1+k, \dots, c, \dots, 1+s_1k,}\ \dots,\ \boxed{r, r+k, \dots, \dots, b, \dots, r+s_rk,}\ \dots\Big)$$

Рис. 2. Пример взаимного расположения элементов $1, c, b$.

Пусть $c = b \,(\mathrm{mod}\ k)$ (рис. 2(a)). Тогда элементы $\{c\}$ и $\{b\}$ лежат в одном блоке. Так как $1 < c < b$ и числа в блоках упорядочены по возрастанию, одноциклическая подстановка π^k имеет вид $\pi^k = (1, \dots, c, \dots, b, \dots)$. Отсюда в силу замечания 3 следует, что $\alpha\pi^k$ одноциклическая.

Пусть $c = 1 \,(\mathrm{mod}\, k)$ (рис. 2(b)). Тогда $\{c\}$ лежит в 1-блоке. Так как $1 < c < b$, одноциклическая подстановка π^k имеет вид $\pi^k = (1, \dots, c, \dots, b, \dots)$. Отсюда в силу замечания 3 следует, что $\alpha\pi^k$ одноциклическая. Утверждение 2 доказано.

Утверждение 3. *Пусть подстановка π^k одноциклическая, $1 < b, c, x, y \leqslant n$, числа b, c, x, y попарно не равны, и пусть $\alpha = (1, b)(c, b)$ и $\beta = (1, y)(x, y)$ такие, что $c = b \,(\mathrm{mod}\, k)$, $c < b$, и $x = y \,(\mathrm{mod}\, k)$, $c < x < y$ соответственно. Тогда $\beta\alpha\pi^k$ одноциклическая.*

$$\text{(a)}\quad \pi^k = (\dots\ \boxed{c, \dots, b,}\ \dots\ \boxed{x, \dots, y}\ \dots)$$

$$\text{(b)}\quad \pi^k = (\dots\ \boxed{c, \dots, x, \dots, y, \dots, b}\ \dots)$$

Рис. 3. Пример взаимного расположения элементов c, b, x, y

Доказательство. Пусть $c \neq x(\mathrm{mod}\ k)$, т. е. в π^k элементы $\{c\}$ и $\{b\}$ лежат в разных блоках с элементами $\{x\}$ и $\{y\}$ (рис. 3(a)). Блок, содержавший в π^k элементы $\{x\}$ и $\{y\}$, не участвовал в предыдущих преобразованиях, поэтому одноциклическая подстановка $\alpha\pi^k$ имеет вид $(1, \dots, x, \dots, y, \dots)$, а значит, по замечанию 3 $\beta\alpha\pi^k$ одноциклическая.

Пусть $c = x(\mathrm{mod}\, k)$, т. е. в π^k элементы $\{c\}$ и $\{b\}$ лежат в том же блоке, что и элементы $\{x\}$ и $\{y\}$ (рис. 3(b)). По условию $c < x$. Возможны варианты: $c < b < x < y$ и $c < x < b$.

В случае, когда $c < b < x < y$, доказательство аналогично предыдущему пункту. Когда $c < x < b$, элемент $\{x\}$ принадлежит списку

$\{c+k,\ldots,b\}$, который пара транспозиций $(1,b)(c,b)$, действуя на π^k, переместила на место после 1. Поскольку $x<y$, подстановка $\alpha\pi^k$ имеет вид $\alpha\pi^k=(1,\ldots x\ldots,y,\ldots)$. Тогда по замечанию 3 $\beta\alpha\pi^k$ одноциклическая. Утверждение 3 доказано.

Другими словами, умножив π^k на α, согласно утверждению 2 получили одноциклическую подстановку $\alpha\pi^k$, но «испортили» её блочную структуру. В утверждении 3 показано, как выбрать подстановку β, чтобы подстановка $\beta\alpha\pi^k$ всё-таки оказалась одноциклической. Это утверждение легко обобщить и на большее количество пар транспозиций вида $(1,x_1)(x_2,x_1)$, где $x_2<x_1$, $x_1=x_2 (\operatorname{mod} k)$.

2. О разрешимости 8-АЗНО

Разобьём множество нечётных натуральных чисел на следующие подмножества:

$N_1=\{n\in\mathbb{N}\mid n$ не делится на $2,3,5,7\}$;
$N_2=\{n\in\mathbb{N}\mid n$ не делится на $2,3,5$ и делится на $7\}$;
$N_3=\{n\in\mathbb{N}\mid n$ не делится на $2,3,7$ и делится на $5\}$;
$N_4=\{n\in\mathbb{N}\mid n$ не делится на $2,5,7$ и делится на $3\}$;
$N_5=\{n\in\mathbb{N}\mid n$ не делится на $2,3$ и делится на $5,7\}$;
$N_6=\{n\in\mathbb{N}\mid n$ не делится на $2,5$ и делится на $3,7\}$;
$N_7=\{n\in\mathbb{N}\mid n$ не делится на $2,7$ и делится на $3,5\}$;
$N_8=\{n\in\mathbb{N}\mid n$ не делится на 2 и делится на $3,5,7\}$.

Легко понять, что 8-индексная задача не имеет смысла при $n<8$ [2].

Далее для каждого из этих подмножеств найдём свой конкретный набор подстановок, удовлетворяющих условию разрешимости (5).

Лемма 1. *Если $n\in N_1$ и $n>8$, то* 8-АЗНО *разрешима.*

Доказательство. Если $n\in N_1$ и $n>8$, то подстановки

$$\pi_1=\pi_2=\pi_3=\pi_4=\pi_5=\pi_6=\pi_7=\pi$$

являются допустимым решением задачи. Действительно, в этом случае подстановки $\sigma_{jj'}$, входящие в (5), имеют вид: π, π^2, π^3, π^4, π^5, π^6, π^7 и являются одноциклическими, поскольку n взаимно просто со всеми степенями подстановок π^k, $1\leqslant k\leqslant 7$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Если $n\in N_2$ и $n>49$, то* 8-АЗНО *разрешима.*

Доказательство. Если $n\in N_2$ и $n>49$, то допустимое решение задачи дают подстановки

$$\pi_1=\pi_2=\pi_3=\pi_4=\pi_5=\pi_6=\pi,\quad \pi_7=\alpha\pi,$$

где $\alpha = (1,67)(7,67)(1,66)(6,66)(1,65)(5,65)$. Тогда подстановки $\sigma_{jj'}$, входящие в условие (5), имеют вид:

(i) π, π^2, π^3, π^4, π^5, π^6;

(ii) $\alpha\pi$, $\alpha\pi^2$, $\alpha\pi^3$, $\alpha\pi^4$, $\alpha\pi^5$, $\alpha\pi^6$, $\alpha\pi^7$.

Подстановки типа (i) одноциклические, поскольку n взаимно просто со степенями $1 \leqslant k \leqslant 6$. Покажем одноцикличность подстановок типа (ii).

Поскольку $n \in N_2$, подстановка π^7 — произведение семи непересекающихся циклов (рис. 4). Каждый цикл — числа с одинаковым остатком от деления на 7.

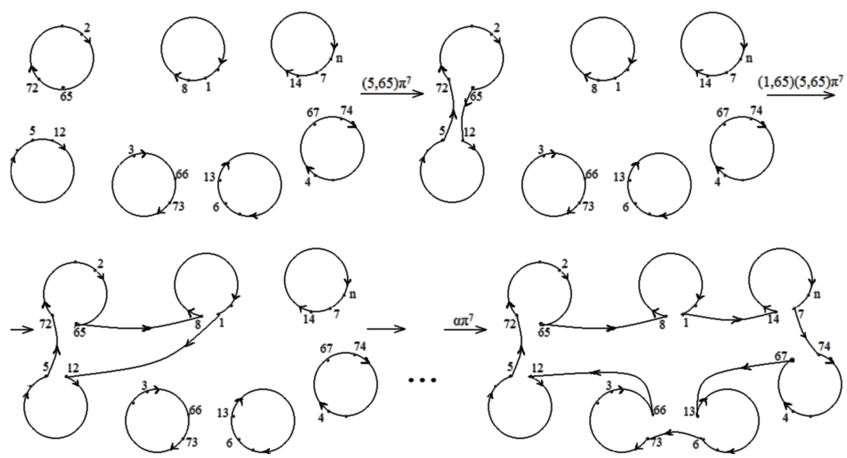

Рис. 4. Последовательное умножение π^7 на транспозиции из α

Нетрудно убедиться, что все числа, входящие в транспозиции из α, принадлежат различным циклам из π^7. Поэтому в силу замечания 1 $\alpha\pi^7$ будет одноциклической.

Подстановки π^k, $1 \leqslant k \leqslant 6$, одноциклические. Рассмотрим первую пару транспозиций из α — $(1,65)(5,65)$. Заметим, что $5 = 65 \,(\bmod\, k)$ для всех $k = \overline{1,6}$. Поэтому в силу утверждения 2 подстановки $(1,65)(5,65)\pi^k$ будут одноциклическими, $k = \overline{1,6}$.

Рассуждая аналогично для оставшихся пар транспозиций и применяя для них утверждение 3, получим, что $\alpha\pi^k$ одноциклические для $k = \overline{1,6}$.

Максимальное значение n, при котором данные построения невозможны, равно $\max\{n \in N_2 \mid n < 67\} = 49$. Таким образом, при $n \in N_2$ и $n > 49$ 8-АЗНО разрешима. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Если $n \in N_3$ и $n > 85$, то* 8-АЗНО *разрешима.*

Доказательство. Если $n \in N_3 = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ не делится на $2, 3, 7$ и делится на $5\}$ и $n > 85$, то допустимое решение задачи дают подстановки $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = \pi$, $\pi_5 = \alpha\pi$, $\pi_6 = \pi_7 = \alpha\pi\alpha^{-1}$, где $\alpha = (1, 89)(5, 89)(1, 87)(3, 87)$. Тогда подстановки $\sigma_{jj'}$, входящие в условие (5), имеют вид:

(i) π, π^2, π^3, π^4;

(ii) $\alpha\pi$, $\alpha\pi^2$, $\alpha\pi^3$, $\alpha\pi^4$, $\alpha\pi^5$, $\alpha\pi^6$, $\alpha\pi^7$;

(iii) $\alpha\pi\alpha^{-1}, \alpha\pi^2\alpha^{-1}$.

Подстановки типа (i) и (ii) одноциклические по утверждению 1 и замечанию 2 соответственно. Подстановка π^5 является произведением 5 непересекающихся циклов, и все числа, входящие в транспозиции из α, принадлежат разным циклам из π^5. Согласно замечанию 1 $\alpha\pi^5$ одноциклическая.

Для $k = 1, \ldots, 4, 6$ верно: $5 = 89 (\mathrm{mod}\, k)$ и $3 = 87 (\mathrm{mod}\, k)$. Тогда по утверждению 3 подстановки $\alpha\pi^k$ одноциклические.

Максимальное значение n, при котором данные построения невозможны, равно $\max\{n \in N_3 \mid n < 89\} = 85$. Таким образом, при $n \in N_3$ и $n > 85$ 8-АЗНО разрешима. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Если $n \in N_4$ и $n > 39$, то* 8-АЗНО *разрешима.*

Доказательство. Если $n \in N_4 = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ не делится на $2, 5, 7$ и делится на $3\}$ и $n > 39$, то допустимое решение задачи дают подстановки

$$\pi_1 = \pi_2 = \pi,\ \pi_3 = \alpha\pi,\ \pi_4 = \pi_5 = \alpha\pi\alpha^{-1},\ \pi_6 = \beta\alpha\pi\alpha^{-1},\ \pi_7 = \beta\alpha\pi\alpha^{-1}\beta^{-1},$$

где $\alpha = (1, 35)(15, 35)$ и $\beta = (1, 49)(29, 49)$. Тогда подстановки $\sigma_{jj'}$, входящие в условие (5), имеют вид:

(i) π, π^2;

(ii) $\alpha\pi$, $\alpha\pi^2$, $\alpha\pi^3$, $\alpha\pi^4$, $\alpha\pi^5$;

(iii) $\alpha\pi\alpha^{-1}$, $\alpha\pi^2\alpha^{-1}$;

(iv) $\beta\alpha\pi\alpha^{-1}, \beta\alpha\pi^2\alpha^{-1}$, $\beta\alpha\pi^3\alpha^{-1}$, $\beta\alpha\pi^4\alpha^{-1}$;

(v) $\beta\alpha\pi\alpha^{-1}\beta^{-1}$; (vi) $\beta\alpha\pi^5$, $\beta\alpha\pi^6$, $\beta\alpha\pi^7$.

Подстановки типа (i), (iii) и (v) одноциклические согласно утверждению 1 и замечанию 2.

Покажем одноцикличность подстановок типа (ii). Подстановка π^3 является произведением трёх непересекающихся циклов:

$$\pi^3 = (1, 4, \ldots, n-2)(2, 5, \ldots, n-1)(3, 6, \ldots, n).$$

Все числа, входящие в транспозиции из α, принадлежат различным циклам из π^3. Следовательно, по замечанию 1 подстановка $\alpha\pi^3$ одноцикличеcкая. Для степеней $k = 1, 2, 4, 5$ верно $15 = 35(\mathrm{mod}\, k)$. Значит, по утверждению 2 $(1, 35)(15, 35)\pi^k$ одноциклические для $k = 1, 2, 4, 5$.

Покажем одноцикличность подстановок типа (vi). Рассмотрим действие α на π^6:

$$\pi^6 = ([1, 7, \ldots,][4, 10, \ldots])([2, 8, \ldots][5, 11, \ldots])([3, 9, \ldots][6, 12, \ldots]),$$

$$\alpha\pi^6 = (1, [x(\mathrm{mod}\, 3) = 0], [x(\mathrm{mod}\, 3) = 2], [7, 13, \ldots][4, 10, \ldots]).$$

Заметим, что $49 = 1(\mathrm{mod}\ 3)$, а $29 = 2(\mathrm{mod}\ 3)$. Значит, элемент $\{29\}$ лежит в блоке с элементом $\{2\}$, а элемент $\{49\}$ — в блоке с элементом $\{7\}$.

Рассмотрим действие α на π^7:

$$\pi^7 = (1, 8, 15, \boxed{22,\ 29, \ldots 35} \ldots), \quad \alpha\pi^7 = (1, \boxed{22,\ 29,\ \ldots 35}, 8, 15, \ldots).$$

С учётом того, что $29 = 49\ \ (\mathrm{mod}\ 5)$, для $k = 5, 6, 7$ имеем $\alpha\pi^k = (1, \ldots, 29, \ldots, 49, \ldots)$. По замечанию 3 подстановки $(1, 49)(29, 49)\alpha\pi^k$ одноциклические.

Осталось показать одноцикличность подстановок типа (iv). Подстановка $\alpha\pi^3\alpha^{-1}$ состоит из трёх непересекающихся циклов:

$$\alpha\pi^3\alpha^{-1} = (1, 18, 21, \ldots)(2, 5, 8, \ldots, 29 \ldots)(35, 4, 7, \ldots, 49, \ldots).$$

Элементы $\{1\}$, $\{15\}$ и $\{35\}$ поменялись местами согласно замечанию 4. Элементы $\{1\}$, $\{29\}$ и $\{49\}$ принадлежат разным циклам в $\alpha\pi^3\alpha^{-1}$. Значит, по замечанию 3 подстановка $\beta\alpha\pi^3\alpha^{-1}$ одноциклическая.

Подстановки $\alpha\pi\alpha^{-1}, \alpha\pi^2\alpha^{-1}, \alpha\pi^4\alpha^{-1}$ по замечанию 2 одноциклические. Для $k = 1, 2, 4$ верно соотношение $29 = 49(\mathrm{mod}\ k)$. Элемент $\{1\}$ в подстановке $\alpha\pi^k\alpha^{-1}$ занимает место элемента $\{15\}$ в подстановке π^k. Так как $15 < 29 < 49$, элемент $\{15\}$ не может принадлежать списку $\{29, 29+k, \ldots, 49\}$ в подстановке π^k при $k = 1, 2, 4$. Значит, π^k имеют вид $(15, \ldots, 29 \ldots, 49, \ldots)$, а $\alpha\pi^k\alpha^{-1} = (1, \ldots, 29 \ldots, 49, \ldots)$, $k = 1, 2, 4$. Отсюда по замечанию 3 подстановки $\beta\alpha\pi^k\alpha^{-1}$ одноциклические, $k = 1, 2, 4$.

Максимальное значение n, при котором данные построения невозможны, равно $\max\{n \in N_4 \mid n < 49\} = 39$. Таким образом, при $n \in N_4$ и $n > 39$ 8-АЗНО разрешима. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Если $n \in N_5$, то* 8-АЗНО *разрешима.*

Доказательство. Если $n \in N_5 = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ не делится на $2, 3$ и делится на $5, 7\}$, то допустимое решение задачи дают подстановки

$$\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = \pi, \quad \pi_5 = \alpha\pi, \quad \pi_7 = \pi_6 = \alpha\pi\alpha^{-1},$$

где $\alpha = (1, 31)(19, 31)(1, 25)(13, 25)(1, 14)(2, 14)$. Тогда подстановки, входящие в условие (5), имеют вид: (i) π, π^2, π^3, π^4; (ii) $\alpha\pi$, $\alpha\pi^2$, $\alpha\pi^3$, $\alpha\pi^4$, $\alpha\pi^5$, $\alpha\pi^6$, $\alpha\pi^7$; (iii) $\alpha\pi\alpha^{-1}, \alpha\pi^2\alpha^{-1}$.

Подстановки типа (i) и (iii) одноциклические согласно утверждению 1 и замечанию 2 соответственно. Покажем одноцикличность подстановок типа (ii).

Подстановка π^7 является произведением семи непересекающихся циклов. Все числа, входящие в α, принадлежат разным циклам π^7. По замечанию 1 подстановка $\alpha\pi^7$ одноциклическая.

Положим $\tau = (1, 25)(13, 25)(1, 14)(2, 14)$. Подстановка π^5 — произведение пяти непересекающихся циклов. Все числа, входящие в τ, принадлежат разным циклам π^5. Согласно замечанию 3 $\tau\pi^5$ одноциклическая. Подстановки $\tau\pi^k$, $k = 1, 2, 3, 4, 6$, одноциклические по утверждению 3, так как $2 = 14 (\mathrm{mod}\ k)$ и $13 = 25 (\mathrm{mod}\, k)$.

Рассмотрим действие последней пары подстановок $(1, 31)(19, 31)$ из α на $\tau\pi^k$, $k = \overline{1, 6}$. Подстановка $\tau\pi^5$ имеет вид

$$(1, [x (\mathrm{mod}\, 5) = 3][x (\mathrm{mod}\, 5) = 0][x (\mathrm{mod}\, 5) = 2][x (\mathrm{mod}\, 5) = 4][7, 12, \ldots]).$$

Здесь элемент $\{19\}$ принадлежит 4-блоку, а элемент $\{31\}$ — блоку с $\{7\}$. Значит, подстановка $\tau\pi^5$ имеет вид $\tau\pi^5 = (1, \ldots, 29 \ldots, 31 \ldots)$.

Для $k = 1, 2, 3, 6$ верно $19 = 13 (\mathrm{mod}\, k)$. Значит, под действием второй пары транспозиций из τ — (1,25)(13,25) — список $\{13+k, \ldots 19 \ldots 25\}$, не содержащий элемента $\{31\}$, перенесён на место после 1. Поэтому $\tau\pi^k = (1, \ldots, 29 \ldots, 31 \ldots)$.

Для подстановки $\tau\pi^4$ элементы $\{19\}$ и $\{31\}$ лежат в 4-блоке, элементы которого не участвовали в предыдущих преобразованиях.

Таким образом, при $k = \overline{1, 6}$ подстановки $\tau\pi^k$ имеют вид $\tau\pi^k = (1, \ldots, 29 \ldots, 31 \ldots)$. По замечанию 3 подстановки $\alpha\pi^k = (1, 31)(19, 31)\tau\pi^k$ одноциклические.

Максимальное значение n, при котором данные построения невозможны, равно $\max\{n \in N_5 \mid n < 31\}$. Таким образом, при $n \in N_5$ 8-АЗНО разрешима. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Если $n \in N_6$ и $n > 63$, то* 8-АЗНО *разрешима.*

Доказательство. Если $n \in N_6 = \{ n \in \mathbb{N} \mid n$ не делится на $2, 5$ и делится на $3, 7\}$ и $n > 63$, то допустимое решение задачи дают подстановки

$$\pi_1 = \pi_2 = \pi,\ \pi_3 = \alpha\pi,\ \pi_4 = \pi_5 = \alpha\pi\alpha^{-1}, \pi_6 = \beta\alpha\pi\alpha^{-1},\ \pi_7 = \beta\alpha\pi\alpha^{-1}\beta^{-1},$$

где $\alpha = (1, 67)(7, 67)(1, 65)(5, 65)(1, 83)(3, 83)$ и $\beta = (1, 45)(17, 45)$. Тогда подстановки $\sigma_{jj'}$, входящие в условие (5), имеют вид: (i) π, π^2; (ii) $\alpha\pi$, $\alpha\pi^2$, $\alpha\pi^3$, $\alpha\pi^4$, $\alpha\pi^5$; (iii) $\alpha\pi\alpha^{-1}$, $\alpha\pi^2\alpha^{-1}$; (iv) $\beta\alpha\pi\alpha^{-1}$, $\beta\alpha\pi^2\alpha^{-1}$, $\beta\alpha\pi^3\alpha^{-1}$, $\beta\alpha\pi^4\alpha^{-1}$; (v) $\beta\alpha\pi\alpha^{-1}\beta^{-1}$; (vi) $\beta\alpha\pi^5$, $\beta\alpha\pi^6$, $\beta\alpha\pi^7$.

Подстановки типа (i), (iii) и (v) одноциклические согласно утверждению 1 и замечанию 2.

Покажем одноцикличность подстановок типа (ii). Поскольку $n \in N_6$, π^3 и π^6 являются произведениями трёх непересекающихся циклов. Элементы $\{1\}$, $\{3\}$, $\{83\}$ принадлежат разным циклам в подстановках π^3 и π^6, следовательно, подстановки $(1, 83)(3, 83)\pi^3$ и $(1, 83)(3, 83)\pi^6$ одноциклические по замечанию 1.

Подстановка π^7 представима в виде произведения семи непересекающихся циклов. Элементы $\{1\}$, $\{3\}$, $\{83\}$ принадлежат разным циклам π^7, поэтому для трёх циклов π^7, содержащих эти элементы, выполняется замечание 1. Значит, подстановка $(1, 83)(3, 83)\pi^7$ является произведением пяти непересекающихся циклов. Для $k = 1, 2, 4, 5$ верно $3 = 83 (\operatorname{mod} k)$, отсюда по утверждению 2 подстановки $(1, 83)(3, 83)\pi^k$ одноциклические.

Для оставшихся пар транспозиций (1,67)(7,67)(1,65)(5,65) из α, пользуясь утверждением 2, легко показать одноцикличность $\alpha\pi^k$, $k = \overline{1, 7}$.

Покажем одноцикличность подстановок типа (vi). Поскольку $17 = 7$ (mod 5), под действием последней пары транспозиций $(1, 67)(7, 67)$ на одноциклическую подстановку $(1, 65)(5, 65)(1, 83)(3, 83)\pi^5$ список $\{12, 17, \ldots, 67\}$, не участвовавший в предыдущих преобразованиях, перенесён на место после 1 согласно замечанию 3. Поэтому $\alpha\pi^5 = (1, \ldots, 17 \ldots, 45 \ldots)$.

Результат действия первой пары транспозиций из α на π^6 выглядит следующим образом:

$$(1, 83)(3, 83)\pi^6 = (1, [x(\operatorname{mod} 3) = 0][x(\operatorname{mod} 3) = 2][7, 11, \ldots][4, 10, \ldots]).$$

Поскольку $17 = 5$ (mod 6), подстановка $(1, 65)(5, 65)(1, 83)(3, 83)\pi^6$ согласно замечанию 3 имеет вид

$$(1, 11, 17, \ldots, 65, [\operatorname{mod} = 0][\operatorname{mod} = 2][7, 11, \ldots][4, 10, \ldots]).$$

Последняя пара транспозиций $(1, 67)(7, 67)$ действует на блок $[7, 11, \ldots]$, в котором не содержится элемента $\{45\}$. Поэтому $\alpha\pi^6 = (1, \ldots, 17, \ldots, 45, \ldots)$.

В результате последовательного соединения циклов из π^7 подстановка $\alpha\pi^7$ имеет вид

$$(1, [\mathrm{mod} = 0][\mathrm{mod} = 4][\mathrm{mod} = 5][\mathrm{mod} = 2][\mathrm{mod} = 3][\mathrm{mod} = 6] \\ [8, 15, \ldots,]).$$

Верны соотношения $17 = 4(\mathrm{mod}\, 7)$ и $45 = 3(\mathrm{mod}\, 7)$.

Таким образом, одноциклические $\alpha\pi^k$, $k = 5, 6, 7$, имеют вид $(1, \ldots, 17, \ldots, 45)$. Поэтому в силу замечания 3 соответствующие подстановки $\beta\alpha\pi^k$ будут одноциклическими.

Покажем одноцикличность подстановок типа (iv). Подстановка

$$\alpha\pi^3\alpha^{-1} = (1, 10, 13, \ldots)(2, \ldots, 17, \ldots)(6, \ldots, 45, \ldots)$$

состоит из трёх непересекающихся циклов. Элементы $\{1, 7, 67, 5, 65, 3, 83\}$ поменялись местами согласно замечанию 4. В частности, элемент $\{1\}$ в подстановке $\alpha\pi^3\alpha^{-1}$ занимает место элемента $\{7\}$ в подстановке π^3. Верны соотношения $7 = 1(\mathrm{mod}\, 3)$, $17 = 2(\mathrm{mod} 3)$, $45 = 0(\mathrm{mod} 3)$, т. е. элементы $\{7\}$, $\{17\}$ и $\{45\}$ лежат в разных циклах подстановки π^3. Значит, элементы из β лежат в разных циклах $\alpha\pi^3\alpha^{-1}$. Следовательно, $\beta\alpha\pi^3\alpha^{-1}$ одноциклическая.

Подстановки $\alpha\pi\alpha^{-1}, \alpha\pi^2\alpha^{-1}, \alpha\pi^4\alpha^{-1}$ по замечанию 3 одноциклические. Для $k = 1, 2, 4$ верно $17 = 45(\mathrm{mod}\, k)$. Элемент $\{1\}$ в $\alpha\pi^k\alpha^{-1}$ занимает место элемента $\{7\}$ в подстановке π^k. Так как $7 < 17 < 45$, то $\pi^k = (7, \ldots, 17, \ldots, 45, \ldots)$. А значит, $\alpha\pi^k\alpha^{-1} = (1, \ldots, 17, \ldots, 45, \ldots)$. Стало быть, подстановки $\beta\alpha\pi^k\alpha^{-1}$ одноциклические.

Максимальное значение n, при котором данные построения невозможны, равно $\max\{n \in N_6 \mid n < 83\} = 63$. Таким образом, при $n \in N_6$ и $n > 63$ 8-АЗНО разрешима. Лемма 6 доказана.

Лемма 7. *Если $n \in N_7$ и $n > 75$, то* 8-АЗНО *разрешима.*

Доказательство. Если $n \in N_7 = \{\, n \in \mathbb{N} \mid n$ не делится на $2, 7$ и делится на $3, 5\}$ и $n > 75$, то допустимое решение задачи дают подстановки

$$\pi_1 = \pi_2 = \pi,\ \pi_3 = \alpha\pi,\ \pi_4 = \pi_5 = \alpha\pi\alpha^{-1},\ \pi_6 = \beta\alpha\pi\alpha^{-1},\ \pi_7 = \beta\alpha\pi\alpha^{-1}\beta^{-1},$$

где $\alpha = (1, 88)(4, 88)(1, 30)(2, 30)$ и $\beta = (1, 36)(32, 36)$. Тогда подстановки $\sigma_{jj'}$, входящие в условие (5), имеют вид: (i) π, π^2; (ii) $\alpha\pi, \alpha\pi^2\alpha\pi^3, \alpha\pi^4, \alpha\pi^5$; (iii) $\alpha\pi\alpha^{-1}, \alpha\pi^2\alpha^{-1}$; (iv) $\beta\alpha\pi\alpha^{-1}, \beta\alpha\pi^2\alpha^{-1}$, $\beta\alpha\pi^3\alpha^{-1}, \beta\alpha\pi^4\alpha^{-1}$; (v) $\beta\alpha\pi\alpha^{-1}\beta^{-1}$; (vi) $\beta\alpha\pi^5, \beta\alpha\pi^6, \beta\alpha\pi^7$.

Подстановки типа (i), (iii) и (v) одноциклические согласно утверждению 1 и замечанию 2.

Покажем одноцикличность подстановок типа (ii). Поскольку $n \in N_7$, π^3 и π^6 являются произведениями трёх непересекающихся циклов. Элементы $\{1\}$, $\{2\}$, $\{30\}$ принадлежат различным циклам в подстановках π^3 и π^6, а значит, по замечанию 1 $(1,30)(2,30)\pi^3$ и $(1,30)(2,30)\pi^6$ одноциклические.

Подстановка π^5 является произведением пяти непересекающихся циклов. Элементы подстановки α принадлежат разным циклам π^5, поэтому в силу замечания 1 подстановка $\alpha\pi^5$ одноциклическая.

Для $k = 1,2,4,7$ подстановки π^k одноциклические и $2 = 30(\mathrm{mod}\ k)$. По утверждению 2 подстановки $(1,30)(2,30)\pi^k$ одноциклические.

Для $k = 1,2,3,4,6,7$ верно $4 = 88(\mathrm{mod}\ k)$ и $2 < 4$. Тогда по утверждению 3 подстановки $\alpha\pi^k$ одноциклические.

Покажем одноцикличность подстановок типа (vi). В результате последовательного соединения циклов из π^5 подстановка $\alpha\pi^5$ имеет вид

$$\alpha\pi^5 = (1, [\mathrm{mod} = 4][\mathrm{mod} = 3][\mathrm{mod} = 2][\mathrm{mod} = 5][6, \ldots, \mathrm{mod} = 1]).$$

Заметим, что $32 = 2(\mathrm{mod}\ 5)$, а $36 = 6(\mathrm{mod}\, 5)$, т. е. $\alpha\pi^5 = (1, \ldots, 32, \ldots, 36, \ldots)$.

В подстановках $(1,30)(2,30)\pi^6$ и $(1,30)(2,30)\pi^7$ элемент $\{32\}$ лежит в одном блоке с $\{4\}$ и $\{88\}$, так как $32 = 4(\mathrm{mod}\, k) = 88(\mathrm{mod} k)$ для $k = 6,7$. Поэтому согласно замечанию 3

$$(1,88)(4,88)(1,30)(2,30)\pi^k = (1,10,16,\ldots,32,\ldots) = (1,\ldots,32,\ldots 36,\ldots).$$

Таким образом, одноциклические $\alpha\pi^k$, $k = 5,6,7$, имеют вид $(1,\ldots,32, \ldots 36,\ldots)$, и в силу замечания 3 подстановки $\beta\alpha\pi^k$ одноциклические.

Покажем, наконец, одноцикличность подстановок типа (iv). Подстановка $\alpha\pi^3\alpha^{-1}$ состоит из трёх непересекающихся циклов. Согласно замечанию 4 элемент $\{1\}$ в подстановке $\alpha\pi^3\alpha^{-1}$ занимает место элемента $\{4\}$ в подстановке π^3. Числа $4, 32, 36$ имеют различные остатки при делении на 3, а значит, эти элементы лежат в разных циклах подстановки π^3. Поэтому $1, 32, 36$ лежат в разных циклах $\alpha\pi^3\alpha^{-1}$ и по замечанию 1 подстановка $\beta\alpha\pi^3\alpha^{-1}$ одноциклическая.

Подстановки $\alpha\pi\alpha^{-1}, \alpha\pi^2\alpha^{-1}, \alpha\pi^4\alpha^{-1}$ по замечанию 3 одноциклические. Для $k = 1,2,4$ верно $32 = 36(\mathrm{mod}\, k)$. Элемент $\{1\}$ в $\alpha\pi^k\alpha^{-1}$ занимает место элемента $\{4\}$ в подстановке π^k. Так как $4 < 32 < 36$, имеем $\pi^k = (4,\ldots,32,\ldots,36,\ldots)$. А значит, $\alpha\pi^k\alpha^{-1} = (1,\ldots,32,\ldots,36,\ldots)$. Следовательно, подстановки $\beta\alpha\pi^k\alpha^{-1}$ одноциклические.

Максимальное значение n, при котором данные построения невозможны, равно $\max\{n \in N_7 \mid n < 88\} = 75$. Таким образом, при $n \in N_7$ и $n > 75$ 8-АЗНО разрешима. Лемма 7 доказана.

Лемма 8. *Если* $n \in N_8$, *то* 8-АЗНО *разрешима.*

Доказательство. Если $n \in N_8 = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ не делится на 2 и делится на $3, 5, 7\}$, то допустимое решение задачи дают подстановки

$$\pi_1 = \pi_2 = \pi,\ \pi_3 = \alpha\pi,\ \pi_4 = \pi_5 = \alpha\pi\alpha^{-1},\ \pi_6 = \beta\alpha\pi\alpha^{-1},\ \pi_7 = \beta\alpha\pi\alpha^{-1}\beta^{-1},$$

где $\alpha = (1, 77)(17, 77)(1, 25)(13, 25)(1, 54)(2, 54)$ и $\beta = (1, 46)(21, 46)$. Тогда подстановки $\sigma_{jj'}$, входящие в условие (5), имеют вид: (i) π, π^2; (ii) $\alpha\pi$, $\alpha\pi^2$, $\alpha\pi^3$, $\alpha\pi^4$, $\alpha\pi^5$; (iii) $\alpha\pi\alpha^{-1}$, $\alpha\pi^2\alpha^{-1}$; (iv) $\beta\alpha\pi\alpha^{-1}$, $\beta\alpha\pi^2\alpha^{-1}$, $\beta\alpha\pi^3\alpha^{-1}$, $\beta\alpha\pi^4\alpha^{-1}$; (v) $\beta\alpha\pi\alpha^{-1}\beta^{-1}$; (vi) $\beta\alpha\pi^5$, $\beta\alpha\pi^6$, $\beta\alpha\pi^7$.

Подстановки типа (i), (iii) и (v) одноциклические согласно утверждению 1 и замечанию 2.

Покажем одноцикличность подстановок типа (ii). Поскольку $n \in N_8$, подстановки π^3 и π^6 являются произведениями трёх непересекающихся циклов. Элементы $\{1\}$, $\{54\}$, $\{2\}$ принадлежат различным циклам в подстановках π^3 и π^6, а значит, $(1, 54)(2, 54)\pi^3$ и $(1, 54)(2, 54)\pi^6$ одноциклические по замечанию 1.

Подстановка π^5 — произведение пяти непересекающихся циклов. Элементы подстановки $(1, 25)(13, 25)(1, 54)(2, 54)$ принадлежат разным циклам π^5, поэтому в силу замечания 1 подстановка $(1, 25)(13, 25)(1, 54)$ $(2, 54)\pi^5$ одноциклическая.

Подстановка π^7 — произведение семи непересекающихся циклов. Элементы подстановки α принадлежат разным циклам π^7, поэтому в силу замечания 1 подстановка $\alpha\pi^7$ одноциклическая.

При $k = 1, 2, 4$ верно $2 = 54 (\bmod k)$. По утверждению 2 подстановки $(1, 54)(2, 54)\pi^k$ одноциклические. Для $k = 1, 2, 3, 4, 6$ справедливо равенство $13 = 25 (\bmod k)$. Значит, подстановки $(1, 25)(13, 25)(1, 54)(2, 54)\pi^k$ одноциклические по утверждению 3.

Для $k = \overline{1, 6}$ имеем $17 = 77 (\bmod k)$ и $13 < 17$. Таким образом, используя утверждение 3, получим одноцикличность подстановок $\alpha\pi^k$.

Покажем одноцикличность подстановок типа (vi). В результате последовательного соединения циклов из π^5 подстановка $(1, 25)(13, 25)$ $(1, 54)(2, 54)\pi^5$ имеет вид $(1, [\bmod = 3][\bmod = 5][\bmod = 2][\bmod = 4]$ $[6, 11, \ldots,])$. Заметим, что $21 = 46 (\bmod 5)$, значит, в подстановке π^5 элементы $\{21\}$ и $\{46\}$ принадлежали 6-блоку, элементы которого не участвовали в предыдущих преобразованиях.

Подстановка $(1,54)(2,54)\pi^6$ имеет вид

$$(1,[x(\operatorname{mod}3)=2][x(\operatorname{mod}3)=0][7,13,\ldots,][4,10,\ldots]).$$

Справедливы равенства $21 = 3(\mathrm{mod}6) = 0(\mathrm{mod}3)$ и $46 = 4(\mathrm{mod}6)$. Действие остальных транспозиций из α не затрагивало 3- и 4-блоки.

Подстановка $\alpha\pi^7$ имеет вид

$$(1,[\mathrm{mod}=3][\mathrm{mod}=7][\mathrm{mod}=6][\mathrm{mod}=4][\mathrm{mod}=2][\mathrm{mod}=5] \\ [8,15,\ldots,]).$$

Верны соотношения $21 = 7(\operatorname{mod}7)$ и $46 = 4(\operatorname{mod}7)$.

Таким образом, одноциклические подстановки $\alpha\pi^k$, $k = 5,6,7$, имеют вид $(1,\ldots,21,\ldots,46)$. Поэтому подстановки $\beta\alpha\pi^k$, $k = 5,6,7$, одноциклические в силу замечания 3.

Покажем одноцикличность подстановок типа (iv). Из трёх непересекающихся циклов состоит подстановка $\alpha\pi^3\alpha^{-1}$. Согласно замечанию 4 элемент $\{1\}$ в $\alpha\pi^3\alpha^{-1}$ занимает место элемента $\{17\}$ в подстановке π^3. Числа $17,21,46$ имеют различные остатки при делении на 3, а значит, они лежат в различных циклах подстановки π^3. Поэтому $1,21,46$ лежат в различных циклах $\alpha\pi^3\alpha^{-1}$, и по замечанию 1 подстановка $\beta\alpha\pi^3\alpha^{-1}$ одноциклическая.

Подстановки $\alpha\pi\alpha^{-1},\alpha\pi^2\alpha^{-1},\alpha\pi^4\alpha^{-1}$ по замечанию 3 одноциклические. Для $k = 1,2,4$ верно $21 = 17(\operatorname{mod}k)$. Элемент $\{1\}$ в $\alpha\pi^k\alpha^{-1}$ занимает место элемента $\{17\}$ в подстановке π^k. Так как $17 < 21 < 46$, имеем $\pi^k = (17,\ldots,21,\ldots,46,\ldots)$. А значит, $\alpha\pi^k\alpha^{-1} = (1,\ldots,21,\ldots,46,\ldots)$. Следовательно, подстановки $\beta\alpha\pi^k\alpha^{-1}$ одноциклические.

Максимальное значение n, при котором данные построения невозможны, равно $\max\{n \in N_8 \mid n < 77\}$. Таким образом, при $n \in N_8$ 8-АЗНО разрешима. Лемма 8 доказана.

Теорема 1. 8-АЗНО *разрешима при нечётных* $n > 85$.

Утверждение теоремы следует из лемм 1–8 при $n > 85$.

Следствие. *Для всякого* $2 < m \leqslant 8$ *найдётся номер* n_m *такой, что* m*-АЗНО разрешима при нечётных* $n > n_m$.

Заключение

Рассмотрен вопрос о разрешимости многоиндексной аксиальной задачи о назначениях на одноциклических подстановках длины n по Сердюкову. Доказано, что 8-индексная задача при $n > 85$ разрешима для нечётных n.

Для дальнейших исследований представляют интерес следующие проблемы.

1. **Гипотеза.** Для любого $m > 2$ найдётся номер n_m такой, что при нечётных $n \geqslant n_m$ m-АЗНО разрешима.

2. Для заданного числа индексов $m > 2$ указать минимальный номер n_m, начиная с которого нечётность n является необходимым и достаточным условием разрешимости m-АЗНО.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гимади Э. Х., Ивонина Е. В.** Приближённые алгоритмы решения задачи о двух коммивояжёрах на максимум // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2012. — Т. 19, № 1. — С. 17–32.
2. **Гимади Э. Х., Коркишко Н. М., Сердюков А. И.** О разрешимости многоиндексной аксиальной задачи о назначениях на одноциклических подстановках // Изв. вузов. Математика. — 2000. — № 12. — С. 21–26.
3. **Глебов А. Н., Гордеева А. В., Замбалаева Д. Ж.** Алгоритм с оценкой 7/5 для задачи о двух коммивояжёрах на минимум с различными весовыми функциями // Сиб. электрон. мат. изв. — 2011. — Т. 8. — С. 296–309.
4. **Глебов А. Н., Замбалаева Д. Ж.** Полиномиальный алгоритм с оценкой точности 7/9 для задачи о двух коммивояжёрах на максимум // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2011. — Т. 18, № 4. — С. 17–48.
5. **Глебов А. Н., Замбалаева Д. Ж.** Приближённый алгоритм решения задачи о двух коммивояжёрах на минимум с различными весовыми функциями // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2011. — Т. 18, № 5. — С. 11–37.
6. **Гимади Э. Х., Сердюков А. И.** Аксиальные задачи о назначении и коммивояжёра: быстрые приближённые алгоритмы и их вероятностный анализ // Изв. вузов. Математика. — 1999. — Т. 451, №12. — С. 19–25.
7. **Коркишко Н. М.** Приближенные алгоритмы решения некоторых многоиндексных задач о назначениях: Дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.09. — Новосибирск, 2003. — 116 с.
8. **Burkard R., Dell'Amico M., Martello S.** Assignments. — Philadelphia: SIAM, 2009. — 382 p.
9. **Fon-Der-Flaass D. G.** Array of distinct representatives — a very simple NP-complete problem // Discrete Math. — 1997. — Vol. 171, N 1–3. — P. 295–298.
10. **Frieze A. M.** Complexity of a 3–dimensional assignment problem // Eur. J. Oper. Res. — 1983. — Vol. 13, N 2. — P. 161–164.

11. **Spieksma F. C. R.** Multi index assignment problems: complexity, approximation, applications // Nonlinear assignment problems, algorithms and applications. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000. — P. 1–12.

Цидулко Оксана Юрьевна,
e-mail: tsidulko.ox@gmail.com

Статья поступила
15 февраля 2012 г.

Переработанный вариант —
2 мая 2013 г.