

УДК 519.8

О ЗАДАЧЕ НЕСКОЛЬКИХ КОММИВОЯЖЁРОВ
С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ПРОПУСКНЫЕ СПОСОБНОСТИ
РЁБЕР ГРАФА *)

Э. Х. Гимади, А. М. Истомин, И. А. Рыков

Аннотация. Рассматривается частный случай задачи отыскания m гамильтоновых циклов с ограничениями на число повторений рёбер (m -Capacitated Peripatetic Salesman Problem, m -CPSP) — задачи 2-CPSP на минимум и максимум с весами рёбер из целочисленного сегмента $\{1, q\}$. Пропускные способности рёбер заданы независимыми случайными величинами, принимающими значение 2 (1) с вероятностью p ($1 - p$). Построены алгоритмы решения задач 2-CPSP_{min} и 2-CPSP_{max} с гарантированными оценками точности в среднем по всем возможным входам. В частности, для задач на графах с весами рёбер 1 и 2 алгоритмы имеют оценки точности $(19 - 5p)/12$ и $(25 + 7p)/36$ в среднем по всем возможным входам для задачи на минимум и на максимум соответственно.

Ключевые слова: задача коммивояжёра, задача нескольких коммивояжёров, рёберно непересекающийся гамильтонов цикл, приближённый алгоритм, гарантированная оценка точности.

Введение

В классической постановке задачи коммивояжёра в качестве входной информации берётся рёберно-взвешенный граф $G = (V, E)$ с неотрицательной весовой функцией рёбер $w : E \rightarrow \mathbb{R}^+$, а целью является отыскание в нём экстремального по весу гамильтонова цикла. Задача коммивояжёра принадлежит к числу известных NP-трудных задач [8]. Обзор работ по этой теме можно найти в [12, 18]. Исследователи рассматривают различные постановки: задачу отыскания минимального или максимального по весу гамильтонова цикла, задачу на ориентированных или неориентированных графах.

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 12-01-00093а, 10-07-00195а, 12-01-33028мол_а_вед), целевой программы Президиума РАН (проект № 227) и междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН (проект № 7Б).

Естественным обобщением является задача о двух или более коммивояжёрах. Такую задачу называют также задачей о m бродячих торговцах [17] (m -Peripatetic Salesman Problem, далее m -PSP). Целью является нахождение в графе G непересекающихся по рёбрам гамильтоновых циклов $H_1, \dots, H_m \subset E$ таких, что величина

$$W(H_1, \dots, H_m) = \sum_{k=1}^m \sum_{e \in H_k} w(e)$$

минимальна (максимальна).

В [15] показано сведением задачи Гамильтонов Путь к 2-PSP, что задача 2-PSP NP-трудна. Аналогичные аргументы могут быть применены к случаю m -PSP при $m > 2$.

Рассматривают также модификацию задачи m коммивояжёров с различными весовыми функциями маршрутов: $w_1 : E \rightarrow \mathbb{R}^+$, ..., $w_m : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ с целевой функцией

$$W_1(H_1, \dots, H_m) = \sum_{k=1}^m \sum_{e \in H_k} w_k(e).$$

В [16] предложена постановка задачи m коммивояжёров с ограничениями пропускной способности рёбер (m -Capacitated Peripatetic Salesman Problem, m -CPSP), являющаяся обобщением задачи m -PSP. В m -CPSP на полном неориентированном взвешенном графе G с заданной пропускной способностью $C_e \in \{1, 2, \dots, m\}$ ребра e требуется найти m гамильтоновых циклов экстремального суммарного веса, при этом любое ребро e можно использовать не более C_e раз.

Очевидно, что если все пропускные способности рёбер единичны, то задача m -CPSP совпадёт с задачей m -PSP, откуда следует NP-трудность m -CPSP.

Обозначим через $OPT(I)$ и $F_A(I)$ оптимальное и полученное с помощью некоторого алгоритма A значения целевой функции на входе I . Приближённый алгоритм A решения массовой задачи оптимизации называется ρ -приближённым алгоритмом решения (алгоритмом с гарантированной оценкой точности ρ) для некоторого $\rho > 0$, если для произвольного входа I со строго положительным оптимумом справедливы оценки

$$\frac{F_A(I)}{OPT(I)} \leq \rho, \quad \frac{F_A(I)}{OPT(I)} \geq \rho$$

для задач на минимум и на максимум соответственно.

Пусть теперь входные данные задачи I являются некоторой случайной величиной. Алгоритм A решения массовой задачи оптимизации будем называть *алгоритмом с гарантированной оценкой точности ρ в среднем* для некоторого $\rho > 0$, если для произвольного входа I со строго положительным ожиданием оптимума верны неравенства

$$\mathbb{M}\left(\frac{F_A(I)}{OPT(I)}\right) \leq \rho, \quad \mathbb{M}\left(\frac{F_A(I)}{OPT(I)}\right) \geq \rho$$

для задач на минимум и на максимум соответственно. Здесь и далее через $\mathbb{M}(X)$ обозначено математическое ожидание случайной величины X .

Поскольку задачи 2-PSP и 2-CPSP NP-трудны, представляется интересным построение полиномиальных алгоритмов с гарантированными оценками точности для решения этих задач с различными свойствами весовой функции.

Для задачи на минимум будем использовать следующие обозначения:

$\text{Metric-}m\text{-CPSP}_{\min}$ — метрическая задача m коммивояжёров на минимум с ограничениями на пропускную способность рёбер;

$m\text{-PSP}_{\min}\{\overline{1, q}\}$ ($m\text{-CPSP}_{\min}[1, q]$) — задача m коммивояжёров на минимум с ограничениями на пропускную способность рёбер на графе, рёбра которого имеют веса из целочисленного сегмента $\{1, 2, \dots, q\}$ (из отрезка $[1, q]$).

Для задачи на максимум будем заменять \min на \max в приведённых обозначениях. Так, например, задачу двух коммивояжёров на максимум с ограничениями на пропускную способность рёбер на графе, рёбра которого имеют веса из множества $\{1, 2\}$, обозначим через $2\text{-CPSP}_{\max}\{1, 2\}$.

Когда речь идёт о классической задаче коммивояжёра, будем заменять $m\text{-CPSP}$ на TSP. Аналогично, вместо $m\text{-CPSP}$ используем $m\text{-PSP}$ для обозначения классической задачи нескольких коммивояжёров.

Если не оговорено другое, то рассматривается полный неориентированный граф $G = (V, E)$. Через n обозначается число его вершин.

В ходе дальнейшего изложения будет продемонстрирована связь некоторых известных алгоритмов решения $m\text{-PSP}$ с задачей $m\text{-CPSP}$. Затем будут приведены описания алгоритмов $A_{\min}\{\overline{1, q}\}$ и $A_{\max}\{\overline{1, q}\}$, а также лежащей в их основе процедуры перестроения гамильтонова цикла.

В разд. 2 обоснованы оценки точности алгоритмов в случае, когда каждое ребро e графа имеет пропускную способность $C_e = 2$ с вероятностью p и $C_e = 1$ с вероятностью $1 - p$.

В предположении, что известен некоторый Δ -приближённый алгоритм решения задачи TSP_{\min} (TSP_{\max}) на графе G , алгоритм решения

задачи 2-CPSP_{min} (2-CPSP_{max}) имеет гарантированную оценку точности в среднем $\frac{(1+p)\Delta+(1-p)q}{2}$ ($\frac{(1+p)\Delta+(1-p)/q}{2}$) для графов с достаточно большим числом вершин. В частности, с использованием 7/6-приближённого алгоритма решения задачи TSP_{min}{1, 2} из [19] в задаче 2-CPSP_{min}{1, 2} получена гарантированная оценка точности в среднем $(19 - 5p)/12$. Алгоритм решения задачи 2-CPSP_{max}{1, 2}, использующий алгоритм решения задачи TSP_{max}{1, 2} с оценкой точности 8/9 из [5], имеет гарантированную оценку точности в среднем $(25 + 7p)/36$.

Известные алгоритмы решения 2-PSP. В [2] для решения задачи 2-PSP_{max} представлен приближённый полиномиальный алгоритм $A_{3/4}$ с оценкой точности 3/4 и временной сложностью $O(n^3)$. В [7] представлен другой приближённый алгоритм $A_{7/9}$ с той же временной сложностью для этой задачи с улучшенной оценкой точности 7/9.

Для задачи Metric-2-PSP_{min} построены приближённый алгоритм $A_{9/4}$ с временной сложностью $O(n^3)$ [3] и 2-приближённый алгоритм A_2 с временной сложностью $O(n^2 \log n)$ [1].

Задача 2-PSP_{min}[1, q] может быть решена за $O(n^3)$ с гарантированной оценкой точности $(4 + q)/5$ [4].

Для задачи 2-PSP_{min}{1, 2} предложены алгоритмы с оценками точностей 1,37 [13], 5/4 [2], 11/9 [7] и 6/5 [4].

В [5] путём комбинирования 3/4-приближённого алгоритма для задачи 2-PSP_{max} и 5/($q + 4$)-приближённого алгоритма для 2-PSP_{min}{1, q } [4] достигается улучшенная оценка точности $(3q + 2)/(4q + 1)$, при $q = 2$ она равна 8/9.

Замечание 1. В ряде случаев результаты, полученные для задачи 2-PSP, могут быть использованы для 2-CPSP. Любое допустимое решение 2-PSP является допустимым решением 2-CPSP, а величина $2W(T^*)$ является нижней (верхней) оценкой для решения 2-CPSP_{min} (2-CPSP_{max}). Любой алгоритм A решения задачи 2-PSP_{min} (2-PSP_{max}), для которого доказана оценка вида $W(P^A) \leq \alpha \cdot 2W(T^*)$ ($W(P^A) \geq \alpha \cdot 2W(T^*)$), является α -приближённым алгоритмом для задачи 2-CPSP_{min} (2-CPSP_{max}); в качестве решения 2-CPSP возьмём решение 2-PSP, полученное алгоритмом A . Действительно, для задачи на минимум из неравенства $W(H^*) \geq 2W(T^*)$ следует, что

$$W(H^A) = W(P^A) \leq \alpha \cdot 2W(T^*) \leq \alpha \cdot W(H^*).$$

Аналогично, для задачи на максимум имеем $W(H^A) \geq \alpha \cdot W(H^*)$.

1. Новые алгоритмы решения задач 2-CPSP_{min} и 2-CPSP_{max}

Пусть задан n -вершинный граф $G = (V, E)$, на его рёбрах задана весовая функция w , принимающая значения из множества $\{1, 2, \dots, q\}$. Описанные ниже алгоритмы $A_{\min}\{\overline{1}, q\}$ и $A_{\max}\{\overline{1}, q\}$ решения задач соответственно 2-CPSP_{min} и 2-CPSP_{max} используют процедуру 1, которая изложена в разд. 1.1.

АЛГОРИТМ $A_{\min}\{\overline{1}, q\}$.

ЭТАП 1. В графе G некоторым известным полиномиальным алгоритмом находим Δ -приближённое решение задачи отыскания гамильтонова цикла минимального веса $T \subset G$.

ЭТАП 2. Полагаем $H_1 = T$.

ЭТАП 3. В качестве H_2 (второго цикла решения) берём цикл $H_2(T)$, полученный перестроением цикла T с помощью процедуры 1 для задачи на минимум.

АЛГОРИТМ $A_{\max}\{\overline{1}, q\}$.

ЭТАП 1. В графе G некоторым известным полиномиальным алгоритмом находим Δ -приближённое решение задачи отыскания гамильтонова цикла максимального веса $T \subset G$.

ЭТАП 2. Полагаем $H_1 = T$.

ЭТАП 3. В качестве H_2 (второго цикла решения) берём цикл $H_2(T)$, полученный перестроением T с помощью процедуры 1 для задачи на максимум.

1.1. Описание процедуры 1. Введём некоторые необходимые для описания процедуры 1 обозначения.

Для произвольного набора рёбер $\tilde{E} \subset E$ графа $G = (V, E)$ будем обозначать через $D(\tilde{E})$ множество всех рёбер из \tilde{E} , пропускная способность которых равна двум.

Определение 1. *Частичным туром* в графе G назовём любой набор рёбер $\tilde{H} \subset E$ такой, что остовный подграф (V, \tilde{H}) состоит из набора цепей, т. е. не содержит циклов, и степень каждой вершины в нём не превосходит двух.

Отметим, что в полном графе любой частичный тур можно достроить до гамильтонова цикла.

Определение 2. Вершины графа G , не инцидентные рёбрам данного частичного тура \tilde{H} , назовём *свободными вершинами относительно частичного тура \tilde{H}* .

Понятие свободной вершины будем далее использовать без указания частичного тура, если из контекста понятно, о каком частичном туре идёт речь.

В рамках алгоритмов $A_{\min}\{\overline{1}, q\}$ и $A_{\max}\{\overline{1}, q\}$ процедура 1 строит гамильтонов цикл H_2 , используя рёбра $D(H_1)$, имеющие пропускную способность 2. Поскольку эти рёбра входили в цикл, полученный в результате решения задачи минимизации (максимизации) для той же весовой функции, целесообразно использовать их и во втором туре. Если оказалось, что все рёбра H_1 имеют пропускную способность 2, то H_2 можно положить равным H_1 . В противном случае рёбра $D(H_1)$ образуют частичный тур. Таким образом, целью процедуры 1 является дополнение частичного тура $D(H_1)$ до гамильтонова цикла H_2 с помощью рёбер, не принадлежащих гамильтонову циклу H_1 .

В дальнейшем пришедший на вход процедуры 1 цикл будем обозначать через \tilde{H}_1 , а результат её работы — через \tilde{H}_2 . Здесь сознательно разделяются обозначения: внутренние циклы процедуры 1 обозначаются через \tilde{H}_1 и \tilde{H}_2 , в то время как для обозначения циклов, использованных в описании алгоритмов $A_{\min}\{\overline{1}, q\}$ и $A_{\max}\{\overline{1}, q\}$, используются символы H_1 и H_2 . Тем самым подчеркивается, что процедура может быть использована и вне контекста этих алгоритмов.

Определение 3. Набор рёбер $\tilde{H} \subset E$ будем называть *допустимым*, если он

- (i) является либо гамильтоновым циклом (в этом случае процедура завершает работу), либо частичным туром;
- (ii) не содержит рёбер $\tilde{H}_1 \setminus D(\tilde{H}_1)$;
- (iii) содержит все рёбра $D(\tilde{H}_1)$ за исключением, быть может, одного.

Процедура состоит в такой последовательности преобразований подмножества рёбер $\tilde{H} \subseteq E$ графа G , что после каждого преобразования \tilde{H} остаётся допустимым.

Процедура 1 принимает на вход гамильтонов цикл \tilde{H}_1 и инструкцию о том, применяется процедура для решения задачи на минимум или для задачи на максимум. Результатом работы процедуры 1 является гамильтонов цикл \tilde{H}_2 , пересекающийся с \tilde{H}_1 только по рёбрам с пропускной способностью два, содержащий все, быть может, кроме одного, рёбра пропускной способности два из \tilde{H}_1 .

ПРОЦЕДУРА 1.

Перенумеруем все вершины графа G в соответствии с порядком их следования в некотором обходе цикла \tilde{H}_1 . В качестве начального на-

бора \tilde{H} возьмём множество $D(\tilde{H}_1) \subset \tilde{H}_1$ рёбер, имеющих пропускную способность два. Эти рёбра на рис. 1 изображены жирными. Очевидно, что начальный набор рёбер допустим.

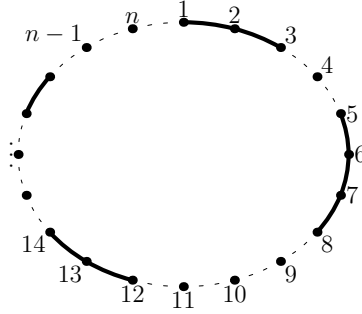


Рис. 1. Гамильтонов цикл \tilde{H}_1

Если текущий допустимый набор рёбер является гамильтоновым циклом, то завершаем процедуру и возвращаем его в качестве результата.

Если число свободных вершин больше или равно четырём, но меньше, чем n , то выполняется процедура 1.1.

Если число свободных вершин равно n , т. е. \tilde{H}_1 не содержит рёбер с пропускной способностью два, то выполняется процедура 1.2.

Если число свободных вершин меньше четырёх, то выполняется процедура 1.3.

Без ограничения общности считаем, что нумерация графа выбрана так, что вершина с номером 1 является концом некоторой цепи с вершинами $1, 2, \dots$ (рис. 1). В процедурах 1.1 и 1.3 используется операция ОБЪЕДИНЕНИЯ двух или нескольких цепей частичного тура. Она состоит в последовательном добавлении к множеству рёбер указанных цепей ребра, соединяющего вершины с наименьшими номерами, принадлежащие двум разным цепям. При этом число цепей уменьшается на единицу. Добавление рёбер происходит до тех пор, пока не останется одна цепь. Иллюстрация объединения двух цепей приведена на рис. 2.

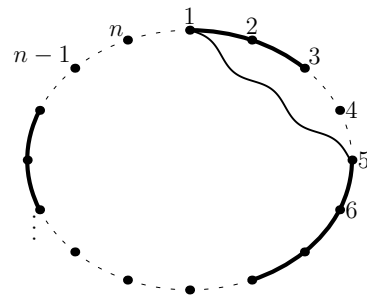


Рис. 2. Объединение цепей

Замечание 2. Очевидно, что операция объединения цепей не нарушает допустимости частичного тура.

ПРОЦЕДУРА 1.1 (число свободных вершин больше или равно четырём, частичный тур содержит по крайней мере одно ребро).

ЭТАП 1. Объединяем свободные вершины в одну цепь с помощью допустимых рёбер описанным ниже способом.

Пусть \tilde{V} — множество свободных вершин. Перенумеруем вершины \tilde{V} в соответствии с порядком вершин в цикле \tilde{H}_1 : произвольная вершина получает номер 1, следующая за ней в цикле \tilde{H}_1 вершина — номер 2, и т. д. На рис. 3 приведён пример такой перенумерации вершин множества \tilde{V} (отмечены звёздочкой).

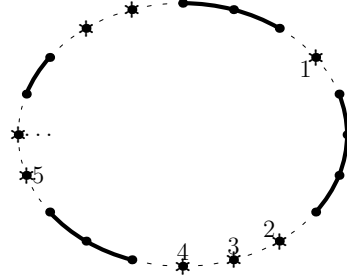


Рис. 3. Нумерация свободных вершин

Пронумерованный набор свободных вершин изображён на рис. 4. Вершины \tilde{H}_1 , имевшие в исходной нумерации последовательные индексы, соединены рёбрами этого цикла. Эти рёбра не могут быть использованы в построениях. На рисунке такие рёбра изображены пунктирной линией. В приведённых ниже построениях не используются рёбра, соединяющие вершины с последовательными индексами в новой нумерации, тем самым рёбра \tilde{H}_1 гарантированно не затрагиваются.



Рис. 4. Пример расположения вершин в порядке перенумерации

Обозначим через k число свободных вершин (по входным условиям процедуры $k \geq 4$). При $k = 4$ замыкающая вершины цепь содержит рёбра $\{(1, 3), (1, 4), (2, 4)\}$ (рис. 5).

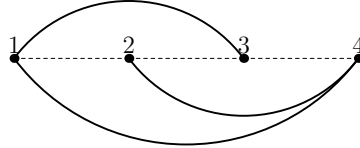


Рис. 5. Объединение четырёх свободных вершин

Если $k > 4$ чётно, то замыкающая вершины цепь содержит рёбра

$$\left(\bigcup_{i=1}^{k-3} \{(i, i+2)\} \right) \cup \{(2, k-1)\} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k-3} \{(i+1, i+3)\} \right).$$

Эти рёбра при $k = 6$ изображены на рис. 6.

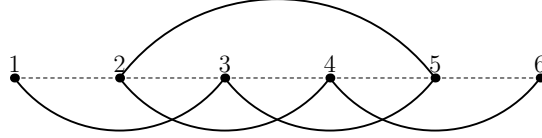


Рис. 6. Объединение чётного числа свободных вершин ($k = 6$)

Если $k > 4$ нечётно, то цепь содержит рёбра

$$\left(\bigcup_{i=1}^{k-2} \{(i, i+2)\} \right) \cup \{(2, k)\} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k-4} \{(i+1, i+3)\} \right).$$

Эти рёбра при $k = 7$ изображены на рис. 7.

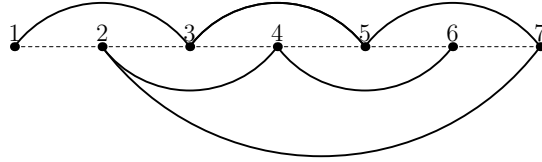


Рис. 7. Объединение нечётного числа свободных вершин ($k = 7$)

После таких преобразований получаем цепь, подобную цепи на рис. 8.

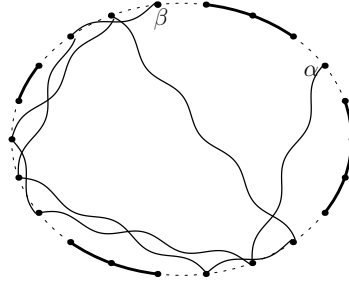


Рис. 8. Цепь, объединяющая свободные вершины

Обозначим через α и β концевые вершины построенной цепи.

ЭТАП 2. Вершины α и β разбивают цикл \tilde{H}_1 на две части, обозначим их через I и II. Для каждой из частей выполняем *операцию объединения* всех лежащих в ней цепей в одну.

ЭТАП 3. Замыкаем полученный частичный тур в гамильтонов цикл. Поскольку частичный тур содержит хотя бы одно ребро (напомним, что

для входов процедуры 1.1 число свободных вершин меньше n), то по крайней мере одна из частей I или II содержит ребро частичного тура. Возможны два случая.

(а) Рёбра частичного тура есть как в I, так и в II, способ его замыкания изображён на рис. 9.

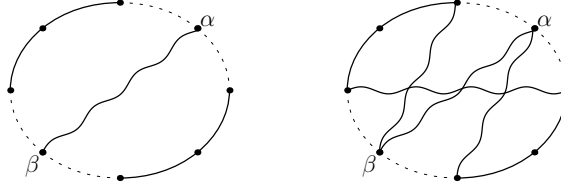


Рис. 9. Рёбра частичного тура присутствуют в обеих частях цикла

(б) Одна из частей не содержит рёбер частичного тура, способ его замыкания изображён на рис. 10.

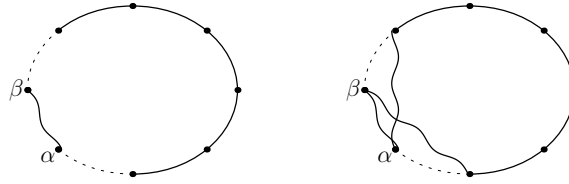


Рис. 10. Рёбра частичного тура присутствуют только в одной части цикла

ПРОЦЕДУРА 1.2 ($D(\tilde{H}_1) = \emptyset$).

Строим гамильтонов цикл \tilde{H}_2 , рёберно непересекающийся с \tilde{H}_1 , с помощью алгоритма 1 из [3].

ПРОЦЕДУРА 1.3 (число свободных вершин меньше четырёх).

ЭТАП 1. Применяем операцию объединения цепей ко всем цепям частичного тура, которые не разделены свободной вершиной.

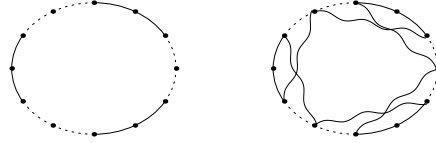
ЭТАП 2. Далее будут разобраны все случаи, возможные после проведённого объединения. Каждый случай будем обозначать парой вида $\langle s, (...) \rangle$, где s — число цепей, а кортеж в круглых скобках определяет разбиение свободных вершин в группы относительно этих цепей. Например, $\langle 2, (1, 1) \rangle$ — случай с двумя цепями и двумя свободными вершинами, при этом цепи разделены свободными вершинами.

В тех случаях, когда частичный тур состоит из одной цепи, для замыкания частичного тура в гамильтонов цикл с помощью допустимых рёбер

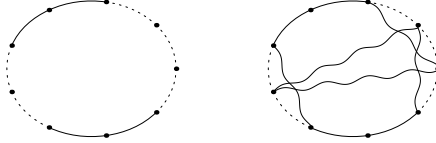
нам потребуется удалить из частичного решения одно ребро. Удаляемое ребро выбирается по следующему *правилу выбора удаляемого ребра*: для задачи на максимум (минимум) удаляется ребро минимального (максимального) веса, не инцидентное концевым вершинам цепи частичного тура.

Замечание 3. Пусть для удаления выбрано ребро \hat{e} и оно имеет вес t . Для задачи на минимум удалим ребро веса $t < q$ только при отсутствии подходящего ребра веса $t + 1$. Отметим, что если вынуждены удалить ребро веса $t < q$, то в получившемся цикле вес q могут иметь только два концевых ребра цепи частичного решения и каждое из добавленных на данном этапе рёбер; остальные рёбра имеют вес, меньший либо равный $q - 1$. Аналогично для задачи на максимум удалим ребро веса $t > 1$ только при отсутствии подходящего ребра веса $t - 1$. Отметим, что если вынуждены удалить ребро веса $t > 1$, то в получившемся цикле вес 1 могут иметь только два концевых ребра цепи частичного решения и каждое из добавленных на данном этапе рёбер; остальные рёбра имеют вес, больший либо равный 2.

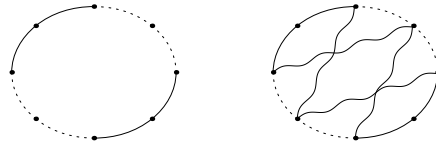
СЛУЧАЙ $\langle 3, (1, 1, 1) \rangle$. Три цепи в частичном туре и три свободные вершины. Замыкаем их в цикл изображённым на рис. 11 образом.

Рис. 11. $\langle 3, (1, 1, 1) \rangle$

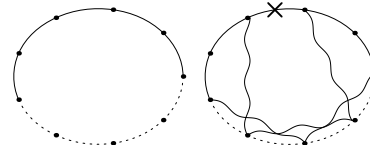
СЛУЧАЙ $\langle 2, (2, 1) \rangle$. Две цепи в частичном туре и три свободные вершины. Замыкаем их в цикл как на рис. 12.

Рис. 12. $\langle 2, (2, 1) \rangle$

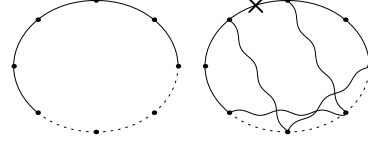
СЛУЧАЙ $\langle 2, (1, 1) \rangle$. Две цепи в частичном туре и две свободные вершины. Замыкаем их в цикл способом, изображённым на рис. 13.

Рис. 13. $\langle 2, (1, 1) \rangle$

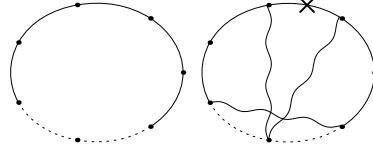
СЛУЧАЙ $\langle 1, (3) \rangle$. Одна цепь в частичном туре, три свободных вершины. Замыкаем их в цикл изображённым на рис. 14 образом.

Рис. 14. $\langle 1, (3) \rangle$

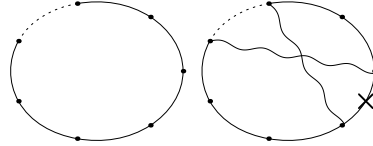
СЛУЧАЙ $\langle 1, (2) \rangle$. Одна цепь в частичном туре, две свободные вершины. Пример замыкания их в цикл приведён на рис. 15.

Рис. 15. $\langle 1, (2) \rangle$

СЛУЧАЙ $\langle 1, (1) \rangle$. Одна цепь в частичном туре, одна свободная вершина. На рис. 16 приведён пример замыкания в цикл.

Рис. 16. $\langle 1, (1) \rangle$

СЛУЧАЙ $\langle 1, (0) \rangle$. Одна цепь в частичном туре, множество свободных вершин пусто. Замыкаем их в цикл способом, изображённым на рис. 17.

Рис. 17. $\langle 1, (0) \rangle$

Лемма 1. Процедура 1 по данному гамильтонову циклу \tilde{H}_1 строит гамильтонов цикл \tilde{H}_2 , удовлетворяющий определению допустимости:

- (i) \tilde{H}_2 не содержит рёбер $\tilde{H}_1 \setminus D(\tilde{H}_1)$;
- (ii) \tilde{H}_2 содержит все рёбра $D(\tilde{H}_1)$ за исключением, быть может, одного ребра \hat{e} , причём
 - (iia) для задачи на минимум: если вес ребра \hat{e} меньше q , то \tilde{H}_2 содержит не более чем 7 рёбер веса q , вес остальных рёбер меньше;
 - (iib) для задачи на максимум: если вес ребра \hat{e} больше 1, то \tilde{H}_2 содержит не более чем 7 рёбер веса 1, вес остальных рёбер больше.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам достаточно доказать, что в каждой из процедур 1.1–1.3 все преобразования сохраняют допустимость частичного тура.

Докажем этот факт для процедуры 1.1. Допустимость частичного тура после этапа 1 очевидна из построений, после этапа 2 — следует из замечания 2, после этапа 3 — следует из построений.

Для процедуры 1.2 доказательство очевидно: множество $D(\tilde{H}_1)$ пусто, а алгоритм 1 из [3] строит гамильтонов цикл, рёберно непересекающийся с данным.

Допустимость частичного тура после этапа 1 процедуры 1.3 следует из замечания 2.

Во время выполнения процедуры 1 удаление ребра возможно только внутри процедуры 1.3 на этапе 2 для случаев с одной цепью в частичном

туре, допустимость частичного тура для случаев с двумя и тремя цепями очевидна. Во всех случаях с одной цепью из частичного тура удаляется только одно ребро и добавляется не более пяти рёбер, не лежащих в \tilde{H}_1 . Допустимость построенного цикла очевидна.

Следуя правилу выбора удаляемого ребра, удаляем ребро наибольшего возможного веса для задачи на минимум и наименьшего — для задачи на максимум. При этом не может быть удалено ни одно из двух концевых рёбер цепи, поскольку такое удаление не может гарантировать возможности требуемых построений. Для замыкания в гамильтонов цикл затем используется не более пяти рёбер, поэтому удаляемое ребро выбирается из набора, состоящего не менее чем из $n - 7$ рёбер. Обозначим этот набор через \tilde{E} .

Для задачи на минимум, если было выбрано ребро веса, меньшего или равного $q - 1$, то каждое ребро набора \tilde{E} имеет вес, меньший либо равный $q - 1$. Для задачи на максимум, если было выбрано ребро веса, большего или равного 2, то вес каждого ребра набора \tilde{E} больше либо равен 2. Лемма 1 доказана.

2. Анализ точности в среднем

Пусть \tilde{H}^* — оптимальное решение задачи 2-CPSP на данном графе G , а величина x — отношение $n/W(\tilde{H}^*)$. Если веса рёбер принимают значения из целочисленного сегмента $\{\overline{1, q}\}$, то $1/2q \leq x \leq 1/2$. Это соотношение верно как для задачи на минимум, так и для задачи на максимум.

Предполагается, что в графе G пропускные способности рёбер — независимые бернуллиевские случайные величины с вероятностью успеха p , т. е. каждое ребро независимо от остальных имеет пропускную способность 2 с вероятностью p и 1 с вероятностью $1 - p$.

Во всех изложенных ниже результатах под точностью алгоритма в среднем понимается точность в среднем относительно случайных величин — пропускных способностей рёбер.

Лемма 2. Пусть H_1 — гамильтонов цикл первого этапа алгоритма $A_{\min}\{\overline{1, q}\}$ или $A_{\max}\{\overline{1, q}\}$. Математическое ожидание суммарного веса рёбер H_1 с пропускной способностью два составляет $pW(H_1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Гамильтоновы циклы первого этапа алгоритмов $A_{\min}\{\overline{1, q}\}$ и $A_{\max}\{\overline{1, q}\}$ строятся независимо от пропускной способности рёбер, поэтому ожидаемая доля рёбер с пропускной способностью два в каждом из циклов составляет p . Кроме того, поскольку распределение

пропускных способностей рёбер не зависит от весовой функции, при весе $W(H_1)$ гамильтонова цикла первого этапа вес его рёбер с пропускной способностью два составит в среднем $pW(H_1)$. Лемма 2 доказана.

2.1. Алгоритм для задачи на минимум

Теорема 1. *Предположим, что в алгоритме $A_{\min}\{\overline{1}, q\}$ используется полиномиальный приближённый алгоритм решения $\text{TSP}_{\min}\{\overline{1}, q\}$ с гарантированной оценкой точности Δ . Тогда в полном n -вершинном графе с весами рёбер из целочисленного сегмента $\{\overline{1}, q\}$ алгоритм $A_{\min}\{\overline{1}, q\}$ находит приближённое решение задачи $2\text{-CPSP}_{\min}\{\overline{1}, q\}$ с гарантированной оценкой точности ρ в среднем*

$$\rho \leq \begin{cases} \frac{(1+p)\Delta + (1-p)q}{2} & \text{при } n \geq n_0, \\ \frac{(1+p)\Delta + (1-p)q}{2} + \varepsilon & \text{при } n < n_0, \end{cases}$$

$$\text{где } \varepsilon \leq \frac{q}{2n}, \quad n_0 = \begin{cases} \min \left\{ \frac{q+5}{1-p}, \frac{7}{1+(\Delta-q)p} \right\}, & \text{если } 1 + (\Delta - q)p > 0, \\ \frac{q+5}{1-p} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Алгоритмом решения задачи $\text{TSP}_{\min}\{\overline{1}, q\}$ найдём приближённое решение задачи нахождения гамильтонова цикла минимального веса: цикл $T \subset G$ такой, что $W(T) \leq \Delta W(T^*)$, где T^* — гамильтонов цикл минимального веса в графе G . Из этапа 2 алгоритма следует, что $W(H_1) = W(T) \leq \Delta W(T^*)$.

Гамильтонов цикл H_2 строится процедурой 1. Из теоремы 1 следует, что его пересечение с циклом H_1 содержит только рёбра с пропускной способностью два. При этом все рёбра $D(H_1)$, быть может, кроме одного, содержатся в H_2 . Если такое ребро имеется, то обозначим его через \hat{e} . Вес каждого добавленного при выполнении процедуры 1 ребра, не лежащего в $D(T)$, оценивается максимальным возможным значением q .

Из леммы 2 следует, что

$$\mathbb{M}(W(D(H_1))) \leq p \cdot W(T) \leq p \cdot \Delta W(T^*).$$

Если при исполнении процедуры 1 не удаляется ребро, т.е. все рёбра $D(H_1)$ без исключения попадают в H_2 , или было удалено ребро \hat{e} , вес которого равен q , то справедлива оценка

$$\mathbb{M}(W(H_2)) \leq p \cdot W(T) + (1-p)qn \leq p \cdot \Delta W(T^*) + (1-p)qn.$$

Пусть теперь $\hat{e} \in D(H_1)$ и $w(\hat{e}) < q$. Тогда H_2 согласно теореме 1 содержит не более чем 7 рёбер веса q , вес остальных рёбер меньше. При

выполнении процедуры 1 из $D(T)$ удаляется одно ребро (наиболее неблагоприятная ситуация, если это ребро имеет вес 1), затем к полученному множеству добавляется $(1-p)n+1$ рёбер, из которых только семь могут иметь вес q , остальные имеют вес меньше. Имеем

$$\begin{aligned}\mathbb{M}(W(H_2)) &\leq p \cdot W(T) - 1 + ((1-p)n+1)(q-1) + 7 \\ &\leq p \cdot \Delta W(T^*) + (1-p)n(q-1) + q + 5.\end{aligned}$$

Очевидно, что $(1-p)n(q-1) + q + 5 \leq (1-p)qn$ при $n \geq \frac{q+5}{1-p}$, поэтому при таких n верна оценка

$$\mathbb{M}(W(H_2)) \leq p \cdot \Delta W(T^*) + (1-p)qn.$$

Также из условия, что H_2 содержит не более чем 7 рёбер веса q , следует неравенство

$$\mathbb{M}(W(H_2)) \leq 7q + (n-7)(q-1) = n(q-1) + 7.$$

При $7 \leq (p(\Delta - q) + 1)n$ выполняется оценка

$$n(q-1) + 7 \leq p \cdot \Delta W(T^*) + (1-p)qn.$$

Окончательно получаем, что основное неравенство

$$\mathbb{M}(W(H_2)) \leq p \cdot \Delta W(T^*) + (1-p)qn$$

выполняется при $n > n_0$, где

$$n_0 = \begin{cases} \min \left\{ \frac{q+5}{1-p}, \frac{7}{1+(\Delta-q)p} \right\}, & \text{если } 1 + (\Delta - q)p > 0; \\ \frac{q+5}{1-p} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Для $n \leq n_0$ несложно установить справедливость неравенства

$$\mathbb{M}(W(H_2)) \leq p \cdot \Delta W(T^*) + (1-p)qn + (q-1).$$

Как отмечалось ранее, для оптимального решения задачи 2-CPSP_{min} верны оценки

$$W(H^*) = W(H_1^*) + W(H_2^*) \geq 2W(T^*) \geq 2n.$$

Окончательно для решения, построенного алгоритмом $A_{\min}\{\overline{1}, q\}$, получаем при $n > n_0$

$$\begin{aligned}\mathbb{M}\left(\frac{W(H)}{W(H^*)}\right) &\leq \frac{\mathbb{M}(W(H))}{2n} \leq \frac{\Delta W(T^*) + p \cdot \Delta W(T^*) + (1-p)qn}{2n} \\ &\leq \frac{(1+p)\Delta}{2} + \frac{(1-p)qn}{2n} \leq \frac{(1+p)\Delta + (1-p)q}{2}.\end{aligned}$$

При $n \leq n_0$ аналогично имеем

$$\mathbb{M} \left(\frac{W(H)}{W(H^*)} \right) \leq \frac{(1+p)\Delta + (1-p)q}{2} + \frac{q-1}{2n} \leq \frac{(1+p)\Delta + (1-p)q}{2} + \frac{q}{2n}.$$

Теорема 1 доказана.

Следствие 1. Используя 7/6-приближённый алгоритм [19] решения задачи $\text{TSP}_{\min}\{1, 2\}$, алгоритм $A_{\min}\{\overline{1}, q\}$ ($q = 2$) строит решение задачи $2\text{-CPSP}_{\min}\{1, 2\}$ с гарантированной оценкой точности в среднем не хуже, чем $(19 - 5p)/12$, при $n \geq \frac{7}{1-\frac{5}{6}p}$.

2.2. Алгоритм для задачи на максимум

Теорема 2. Предположим, что в алгоритме $A_{\max}\{\overline{1}, q\}$ используется полиномиальный приближённый алгоритм решения $\text{TSP}_{\max}\{\overline{1}, q\}$ с гарантированной оценкой точности Δ . Тогда в полном n -вершинном графе с весами рёбер из целочисленного сегмента $\{\overline{1}, q\}$ алгоритм $A_{\max}\{\overline{1}, q\}$ находит приближённое решение задачи $2\text{-CPSP}_{\max}\{\overline{1}, q\}$ с гарантированной оценкой точности ρ в среднем

$$\rho \geq \begin{cases} \frac{\Delta}{2}(1+p) + x(1-p) & \text{при } n \geq n_0, \\ \frac{\Delta}{2}(1+p) + x(1-p) - \varepsilon & \text{при } n < n_0 \end{cases}$$

$$\text{где } \varepsilon \leq \frac{q}{2n}, \quad n_0 = \begin{cases} \min \left\{ \frac{q+5}{1-p}, \frac{7}{1+p(1-q\Delta)} \right\}, & \text{если } 1+p(1-q\Delta) > 0, \\ \frac{q+5}{1-p} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству теоремы 1.

Замечание 4. Принимая во внимание тот факт, что $1/2q \leq x \leq 1/2$, величину $\frac{\Delta}{2}(1+p) + x(1-p)$ в формулировке теоремы 2 можно заменить на $\frac{\Delta}{2}(1+p) + \frac{1}{2q}(1-p)$.

Следствие 2. Для задачи $2\text{-CPSP}_{\max}\{1, 2\}$ при помощи алгоритма из [5] решения задачи $\text{TSP}_{\max}\{1, 2\}$ с оценкой точности $8/9$ алгоритм $A_{\max}\{\overline{1}, q\}$ ($q = 2$) строит решение с гарантированной оценкой точности не хуже, чем $(25 + 7p)/36$, при $n \geq \frac{7}{1-\frac{7}{9}p}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агеев А. А., Пяткин А. В. Приближённый алгоритм решения метрической задачи о двух коммивояжёрах с оценкой точности 2 // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2009. — Т. 16, № 4. — С. 3–20.

2. Агеев А. А., Бабурин А. Е., Гимади Э. Х. Полиномиальный алгоритм с оценкой точности $3/4$ для отыскания двух непересекающихся гамильтоновых циклов максимального веса // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2006. — Т. 13, № 2. — С. 11–20.
3. Бабурин А. Е., Гимади Э. Х., Коркишко Н. М. Приближённые алгоритмы для нахождения двух рёберно непересекающихся гамильтоновых циклов минимального веса // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. — 2004. — Т. 11, № 1. — С. 11–25.
4. Гимади Э. Х., Глазков Ю. В., Глебов А. Н. Приближённые алгоритмы решения задачи о двух коммивояжёрах в полном графе с весами рёбер 1 и 2 // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. — 2007. — Т. 14, № 2. — С. 41–60.
5. Гимади Э. Х., Ивонина Е. В. Приближённые алгоритмы решения задачи о двух коммивояжёрах на максимум // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2012. — Т. 19, № 1. — С. 17–32.
6. Глебов А. Н., Замбалаева Д. Ж. Приближённый алгоритм решения задачи о двух коммивояжёрах на минимум с различными весовыми функциями // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2011. — Т. 18, № 5. — С. 11–37.
7. Глебов А. Н., Замбалаева Д. Ж. Полиномиальный алгоритм с оценкой точности $7/9$ для задачи о двух коммивояжёрах на максимум // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2011. — Т. 18, № 4. — С. 17–48.
8. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. — М.: Мир, 1982. — 416 с.
9. Baburin A. E., Della Croce F., Gimadi E. K., Glazkov Yu. V., Paschos V. Th. Approximation algorithms for the 2-PSP with edge weights 1 and 2 // Discrete Appl. Math. — 2009. — Vol. 157, N 9. — P. 1988–1992.
10. Berman P., Karpinski M. 8/7-Approximation algorithm for (1,2)-TSP // Proc. 17th Annual ACM-SIAM Symp. Discrete Algorithm (SODA'06) (Miami, January, 2006). — New York: ACM, 2006. — P. 641–648.
11. Gabow H. N. An efficient reduction technique for degree-constrained subgraph and bidirected network flow problems // Proc. 15th Annual ACM Symp. Theory Comput. (Boston, April 25–27, 1983). — New York: ACM, 1983. — P. 448–456.
12. Gutin G., Punnen A. P. (eds.) The traveling salesman problem and its variations. — Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 2002. — 830 p.
13. Della Croce F., Paschos V. Th., Wolfler Calvo R. Approximating the 2-peripatetic traveling salesman problem // 7th Workshop Modeling and Algorithms for Planning and Scheduling Problems, MAPSP 2005 (Siena, Italy, June 6–10, 2005). — Berlin: Springer-Verl., 2005. — P. 114–116.
14. De Kort J. B. J. M. Lower bounds for symmetric k -peripatetic salesman problems // Optimization. — 1991. — Vol. 22, N 1. — P. 113–122.

15. **De Kort J. B. J. M.** A branch and bound algorithm for symmetric 2-peripatetic salesman problems // Eur. J. Oper. Res. — 1993. — Vol. 70, N 2. — P. 229–243.
16. **Duchenne É., Laporte G., Semet F.** The undirected m -capacitated peripatetic salesman problem. // Eur. J. Oper. Res. — 2012. — Vol. 223, N 3. — P. 637–643.
17. **Krarup J.** The peripatetic salesman and some related unsolved problems // Combinatorial programming: methods and applications (Proc. NATO Advanced Study Inst., Versailles, 1974). — 1975. — P. 173–178.
18. **Lawler E. L., Lenstra J. K., Rinnooy Kan A. H. G., Shmoys D. B. (eds.)** The traveling salesman problem: a guided tour of combinatorial optimization. — Chichester; New York; Brisbane; Toronto; Singapore: John Wiley & Sons, 1985. — 463 p.
19. **Papadimitriu C. H., Yannakakis M.** The travelling salesman problem with distances one and two // Math. Oper. Res. — 1993. — Vol. 18, N 1. — P. 1–11.
20. **Roskind J., Tarjan R. E.** A note on finding minimum-cost edge-disjoint spanning trees // Math. Oper. Res. — 1985. — Vol. 10, N 4. — P. 701–708.

Гимади Эдуард Хайрутдинович,
e-mail: gimadi@math.nsc.ru
Истомин Алексей Михайлович,
e-mail: alexeyistomin@gmail.com
Рыков Иван Александрович,
e-mail: rykovweb@gmail.com

Статья поступила
27 декабря 2012 г.
Переработанный вариант —
10 июня 2013 г.