ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Сентябрь—октябрь 2013. Том 20, № 5. С. 3–12

УДК 519.1

О ВЛОЖЕНИИ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ГРАФА ДЖОНСОНА В СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ГРАФА ХЭММИНГА *)

К. В. Воробьёв

Аннотация. Изучается связь собственных функций графов Джонсона и Хэмминга. *Собственной функцией графа* называется собственный вектор матрицы смежности графа, соответствующий некоторому собственному значению, причём она может быть тождественно нулевой. Найден критерий вложимости собственной функции графа Джонсона $J(n, w)$ с заданным собственным значением в некоторую собственную функцию графа Хэмминга с заданным собственным значением.

Ключевые слова: n-куб, графы Джонсона и Хэмминга, собственная функция.

1. Предварительные сведения

Вершинами графа Хэмминга H^n, называемого также *n-кубом*, являются двоичные наборы длины n; две вершины соединены ребром, если соответствующие им наборы отличаются ровно в одной координате. *Весом* $\mathrm{wt}(y)$ *вершины* $y \in H^n$ называется число единиц в этом наборе. *Расстояние Хэмминга* $d_H(x, y)$ между вершинами $x, y \in H^n$ — количество позиций, в которых x и y различны. Определим r-й слой графа H^n как множество $S(r) = \{y \in H^n \mid \mathrm{wt}(y) = r\}$. Известно, что любая функция $f : H^n \to \mathbb{R}$ единственным образом представима в виде

$$f(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{t \in H^n} (-1)^{\langle x,t \rangle} \widehat{f}(t), \quad x \in H^n,$$

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 12–01–00631 и 12–01–31098) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (соглашение № 8227).

где $\langle x,t\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i t_i$ — стандартное скалярное произведение. Величины $\widehat{f}(t)$ называются *коэффициентами Фурье*, и выполняется соотношение

$$\widehat{f}(x) = \sum_{t\in H^n} (-1)^{\langle x,t\rangle} f(t), \quad x \in H^n.$$

Задаваемое этой формулой преобразование называют *преобразованием Фурье функции* f.

Для произвольного неориентированного графа $G = (V, E)$ с матрицей смежности M функция $f : V \to \mathbb{R}$ называется *собственной с собственным значением* λ, если $Mf = \lambda f$. Заметим, что в определении не требуется, чтобы функция f не была тождественно равна нулю. Известно, что все собственные числа графа H^n исчерпываются множеством $\{n-2i,\ 0 \leqslant i \leqslant n,\ i \in \mathbb{Z}\}$ [4]. Приведём без доказательства одно несложное

Предложение 1. *Пусть $f : H^n \to \mathbb{R}$. Тогда для любого целого j, $0 \leqslant j \leqslant n$, функция f является собственной функцией H^n с собственным значением $n-2j$, если и только если все её ненулевые коэффиценты Фурье имеют вес j.*

Графом Джонсона $J(n,w)$ называется граф, вершинами которого являются все двоичные наборы, содержащие в точности w единиц. Две вершины *смежны*, если их наборы отличаются ровно в двух координатах. *Расстояние* между двумя вершинами $x, y \in J(n,w)$ определяется следующим образом: $d_J(x,y) = \frac{1}{2} d_H(x,y)$. Заметим, что расстояния $d_J(x,y)$ и $d_H(x,y)$ являются стандартными метриками, т. е. равны числу рёбер в минимальном пути из x в y в $J(n,w)$ и H^n соответственно. Известно, что собственные числа графа Джонсона описываются множеством $\{\lambda_i(w,n) = (w-i)(n-w-i)-i,\ 0 \leqslant i \leqslant w,\ i \in \mathbb{Z}\}$ [4].

В дальнейшем понадобятся полиномы Кравчука $K_k(x,n)$ и Эберлейн $E_k(x,w,n)$ [5]:

$$K_k(x,n) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{x}{j}\binom{n-x}{k-j},$$

$$E_k(x,w,n) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{x}{j}\binom{w-x}{k-j}\binom{n-w-x}{k-j}.$$

Нам также пригодится соотношение

$$K_k(\mathrm{wt}(x),n) = \sum_{t\in S(k)} (-1)^{\langle t,x\rangle}, \quad x \in H^n. \tag{1}$$

Пусть заданы множества $M_1, M_2,\ M_2 \subseteq M_1$, и определены функции $f_1 : M_1 \to \mathbb{R},\ f_2 : M_2 \to \mathbb{R}$. Будем говорить, что функция f_2 *вложима в* f_1, если $f_1(x) = f_2(x)$ для всех $x \in M_2$, другими словами, если сужение функции f_1 на множество M_2 совпадает с f_2, т. е. $f_1\big|_{M_2} \equiv f_2$.

Пусть $G = (V, E)$ — связный неориентированный граф диаметра d и $d(x, y)$ — стандартная метрика в графе, т. е. число рёбер в пути минимальной длины из x в y. Пусть $C \subseteq V$, $C_0 = C$, $C_i = \{v \in V \mid \min\limits_{t \in C} d(t, v) = i\}$, $1 \leqslant i \leqslant d$. Тогда подмножество вершин C графа G будем называть *полностью регулярным кодом* [8], если индуцированный на множестве вершин $C_i \cup C_{i+1}$ подграф графа G является двудольным бирегулярным графом с долями C_i и C_{i+1} для всех i, $0 \leqslant i \leqslant d - 1$.

Изучение собственных функций графов Джонсона и Хэмминга представляет интерес, так как они являются одним из основных инструментов при работе с совершенными раскрасками, полностью регулярными кодами и другими важными объектами в этих графах [1, 2, 8]. В нашей работе исследуется вопрос о вложимости собственных функций графа Джонсона $J(n, w)$ в собственные функции графа Хэмминга H^n, т. е. в каких случаях возможно продолжить собственную функцию графа Джонсона до собственной функции всего n-куба. Эту проблему в общем случае можно переформулировать следующим образом: в каких случаях можно восстановить функцию на множестве, если известны значения функции на некотором его подмножестве? В частности, такая задача решена для центрированных функций и совершенных кодов в графе Хэмминга H^n [1].

2. Основной результат

Рассмотрим граф Джонсона $J(n, w)$. Из его определения нетрудно видеть, что множество вершин $J(n, w)$ совпадает со слоем w графа H^n. Везде далее без ограничения общности можем считать, что $w \leqslant \frac{n}{2}$. Говоря о собственных функциях H^n с собственным значением $n - 2s$, также без ограничения общности будем считать, что $s \leqslant \frac{n}{2}$. Оказывается, что в некоторых случаях преобразование Фурье позволяет вложить собственную функцию графа $J(n, w)$ в собственную функцию H^n с определённым собственным значением.

Предложение 2. *Пусть* $g : H^n \to \mathbb{R}$, $g \not\equiv 0$ *и* $g\big|_{H^n \setminus S(w)} \equiv 0$, *причём* $g\big|_{S(w)}$ *— собственная функция графа Джонсона* $J(n, w)$ *с собственным значением* $\lambda_i(w, n)$. *Тогда* $\widehat{g}\big|_{S(j)}$ *является собственной функцией графа* $J(n, j)$ *с собственным значением* $\lambda_i(j, n)$.

Доказательство. Рассматриваем вершины графа $J(n,w)$ как подмножество вершин графа H^n. Посмотрим, чему равны значения функции $\widehat{g}$ на $S(j)$. Сначала проведём доказательство для случая $j \leqslant w$. Имеем $\widehat{g}(x) = \sum\limits_{t \in H^n} g(t)(-1)^{\langle x,t\rangle} = \sum\limits_{t \in S(w)} g(t)(-1)^{\langle x,t\rangle}$ по определению преобразования Фурье. Пусть $C_0(x) = \{z \in S(w) \mid x \subseteq z\}$, $C_k(x) = \{z \in S(w) \mid \min\limits_{t \in C_0(x)} d_J(z,t) = k\}$, $k \geqslant 1$, $x \in S(j)$. Нетрудно понять, что

$$\widehat{g}(x) = \sum_{t \in S(w)} g(t)(-1)^{\langle x,t\rangle} = \sum_{k=0}^{j} (-1)^{j+k} \sum_{t \in C_k(x)} g(t), \quad x \in S(j). \tag{2}$$

С другой стороны, известно [7], что множество $C_0(x)$ является полностью регулярным кодом. Поэтому при $x \in S(j)$ имеет место соотношение

$$\lambda_i(w,n) \sum_{t \in C_k(x)} g(t) \\ = \alpha_{k,k-1} \sum_{t \in C_{k-1}(x)} g(t) + \alpha_{k,k} \sum_{t \in C_k(x)} g(t) + \alpha_{k,k+1} \sum_{t \in C_{k+1}(x)} g(t), \tag{3}$$

где $\alpha_{k,k-1}, \alpha_{k,k}, \alpha_{k,k+1}$ — число смежных с C_k вершин из C_{k-1}, C_k, C_{k+1}, $k \geqslant 0$, соответственно. В силу тождеств (2), (3) и определения функции g получаем

$$\widehat{g}(x) = \kappa_j \sum_{t \in C_0(x)} g(t) = \kappa_j \sum_{t \in S(w) | x \subseteq t} g(t) \tag{4}$$

для всех $x \in S(j)$, где κ_j не зависит от выбора x. Преобразование вида (4) называется *оператором индуцирования из* $J(n,w)$ *на* $J(n,j)$. Известно [6], что такой оператор переводит собственную функцию графа $J(n,w)$, соответствующую собственному значению $\lambda_i(w,n)$, в собственную функцию графа $J(n,j)$, соответствующую собственному значению $\lambda_i(j,n)$. Следовательно, при $x \in S(j)$ выполняется

$$\sum_{\substack{y \in S(j),\\ d_J(x,y)=1}} \widehat{g}(y) = \lambda_i(j,n)\widehat{g}(x),$$

что и требовалось доказать. Доказательство случая $j \geqslant w$ проводится аналогично. Предложение 2 доказано.

В [6] показано, что в некоторых случаях оператор индуцирования позволяет построить совершенные раскраски в 2 цвета графа $J(n,w)$ по уже известным, а также введено обобщение такого оператора на более широкий класс графов.

Учитывая то, что номер собственного значения i любой собственной функции $J(n, j)$ ограничен сверху числом j, легко получить

Следствие 1. *Определим функцию g так же, как в предложении 2. Тогда при $j < i$ выполняется $\widehat{g}\big|_{S(j)} \equiv 0$.*

Прежде чем сформулировать основную теорему, введём следующее обозначение:

$$C_j(s, w) = \begin{cases} (-1)^s K_s(j, w) & \text{при } w > s, \\ (-1)^{w+j} K_{s-w}(j, n-w) & \text{при } w \leqslant s. \end{cases} \tag{5}$$

Заметим, что предложение 2 опирается на существенную взаимосвязь преобразования Фурье и оператора индуцирования: преобразование Фурье функции на $S(r)$ можно представить как оператор индуцирования с некоторым коэффициентом, зависящим от r. В следующем предложении исследуем вопрос, когда этот коэффициент ненулевой.

Предложение 3. *Пусть $g : H^n \to \mathbb{R}$, $g \not\equiv 0$ и $g\big|_{H^n \setminus S(s)} \equiv 0$, при этом $g\big|_{S(s)}$ — собственная функция графа Джонсона $J(n, s)$, соответствующая собственному значению $\lambda_i(s, n)$. Тогда $\widehat{g}(t)\big|_{S(w)} \equiv 0$, если и только если выполняется равенство*

$$\sum_{j=0}^{w} C_j(s, w) E_j(i, w, n) = 0. \tag{6}$$

Доказательство. Если $i > w$, то $\widehat{g}(t)\big|_{S(w)} \equiv 0$ по следствию 1, а $E_j(i, w, n) = 0$, $j = 0, 1, \ldots, w$.

Рассмотрим случай, когда $i \leqslant w$. Определим функцию

$$g_1(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{t \in S(s), \\ |t \cap x| = \min(w, s)}} g(t), & \text{если } x \in S(w), \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

т. е. значения g_1 на $S(w)$ получены из значений g на $S(s)$ с помощью индуцирования. Так как оператор индуцирования обратим, имеем

$$g(x) = c \sum_{\substack{t \in S(w), \\ |t \cap x| = \min(w, s)}} g_1(t), \quad x \in S(s),$$

где c — ненулевой коэффициент.

Следовательно, для $x \in S(w)$

$$\widehat{g}(x) = \sum_{t \in H^n} (-1)^{\langle x,t\rangle} g(t) = c \sum_{t \in S(s)} (-1)^{\langle x,t\rangle} \sum_{\substack{y \in S(w),\\ |t \cap y| = \min(w,s)}} g_1(y).$$

Меняя порядок суммирования, получаем

$$\widehat{g}(x) = c \sum_{y \in S(w)} g_1(y) \sum_{\substack{t \in S(s),\\ |t \cap y| = \min(w,s)}} (-1)^{\langle x,t\rangle}.$$

Распишем первую сумму по расстояниям в графе $J(n,w)$ от вершины x:

$$\widehat{g}(x) = c \sum_{j=0}^{w} \sum_{\substack{y \in S(w),\\ d_J(y,x) = j}} g_1(y) \sum_{\substack{t \in S(s),\\ |t \cap y| = \min(w,s)}} (-1)^{\langle x,t\rangle}.$$

При $x, y \in S(w)$, $d_J(x,y) = j$ прямым подсчётом легко убедиться, что

$$\sum_{\substack{t \in S(s),\\ |t \cap y| = \min(w,s)}} (-1)^{\langle x,t\rangle} = C_j(s,w).$$

Так как функция g_1 собственная в $J(n,w)$, имеем

$$\sum_{\substack{y \in S(w),\\ d_J(y,x) = j}} g_1(y) = g_1(x) E_j(i,w,n).$$

Таким образом, $\widehat{g}(x) = c g_1(x) \sum_{j=0}^{w} C_j(s,w) E_j(i,w,n)$. Поскольку функция g_1 не тождественно нулевая на $S(w)$, последнее равенство завершает доказательство. Предложение 3 доказано.

Теорема 1. *Пусть h — ненулевая собственная функция графа $J(n,w)$, соответствующая собственному значению $\lambda_i(w,n)$. Тогда она вложима в некоторую собственную функцию графа H^n с собственным значением $n - 2s$, если и только если*

$$\sum_{j=0}^{w} C_j(s,w) E_j(i,w,n) \neq 0.$$

Доказательство. Достаточность. Рассмотрим функцию

$$g(x) = \begin{cases} \sum\limits_{\substack{t \in S(w), \\ |x \cap t| = \min(w,s)}} h(t) & \text{при } x \in S(s), \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Применим к g преобразование Фурье и посмотрим, какие значения принимает функция $\widehat{g}$ на $S(w)$:

$$\widehat{g}(x) = \sum_{t \in H^n} (-1)^{\langle x,t \rangle} g(t) = \sum_{t \in S(s)} (-1)^{\langle x,t \rangle} \sum_{\substack{y \in S(w), \\ |t \cap y| = \min(w,s)}} h(y).$$

Совершив преобразования, аналогичные преобразованиям из доказательства предложения 3, получаем

$$\widehat{g}(x) = h(x) \sum_{j=0}^{w} C_j(s,w) E_j(i,w,n), \quad x \in S(w).$$

Так как $\sum\limits_{j=0}^{w} C_j(s,w) E_j(i,w,n) \neq 0$ по предположению 3,

$$\frac{\widehat{g}(x)}{\sum\limits_{j=0}^{w} C_j(s,w) E_j(i,w,n)}$$

— искомая функция, т. е. она является собственной в H^n с собственным значением $n-2s$ по предложению 1 и тождественно равна h при $x \in S(w)$.

Необходимость. Пусть h вложима в некоторую собственную функцию f графа H^n с собственным значением $n - 2s$. Рассмотрим функцию $\widehat{f}$. По предложению 1 все её ненулевые значения сосредоточены на $S(s)$. Далее разложим $\widehat{f}$ по базису собственных функций в $J(n,s)$. По предложению 2 в разложение входит и некоторая ненулевая собственная функция $g(x)$ с собственным значением $\lambda_i(s,n)$. Вновь из предложения 2 и определения преобразования Фурье следует, что функция $\frac{1}{2^n}\widehat{g}$ собственная в H^n с собственным значением $n - 2s$ и тождественно равна h при $x \in S(w)$. Поскольку h — ненулевая собственная функция графа $J(n,w)$, по предложению 3 имеем $\sum\limits_{j=0}^{w} C_j(s,w) E_j(i,w,n) \neq 0$. Теорема 1 доказана.

Явная формула, данная при доказательстве достаточности в теореме 1, позволяет сформулировать

Следствие 2. *Пусть* h — *ненулевая собственная функция графа* $J(n,w)$ *с собственным значением* $\lambda_i(w,n)$ *и* $\sum\limits_{j=0}^{w} C_j(s,w)E_j(i,w,n) \neq 0$. *Тогда она вложима в собственную функцию* f *графа* H^n *с собственным значением* $n-2s$, *где*

$$f(x) = \frac{\sum\limits_{y\in S(w)} h(y) \sum\limits_{\substack{t \in S(s),\\ |t\cap y| = \min(w,s)}} (-1)^{\langle x,t\rangle}}{\sum\limits_{j=0}^{w} C_j(s,w)E_j(i,w,n)}$$

Следствие 3. *Вложение, описанное в следствии* 2, *единственно, если и только если* $\sum\limits_{j=0}^{w} C_j(s,w)E_j(k,w,n) \neq 0$ *для всех* k, $0 \leqslant k \leqslant w$.

Доказательство. Необходимость. По предположению существует собственная функция f графа H^n с собственным значением $n-2s$ такая, что $h \equiv f\big|_{S(w)}$. По предложению 1 выполняется $\widehat{f}\big|_{H^n\setminus S(s)} \equiv 0$. Предположим, что $\sum\limits_{j=0}^{w} C_j(s,w)E_j(k,w,n) = 0$ для некоторого k. Рассмотрим функцию, равную сумме $\widehat{f}(x)$, $x \in S(s)$, и произвольной ненулевой собственной функцим графа $J(n,s)$, соответствующей собственному значению $\lambda_k(s,n)$. По предложению 1 значения этой функции при $x \in S(s)$ являются коэффициентами Фурье некоторой собственной функции f_1 графа H^n с собственным значением $n-2s$, не совпадающей тождественно с f. Однако $f_1\big|_{S(w)} \equiv f\big|_{S(w)}$ по предложению 3 и предположению, т. е. вложение не единственно. Тем самым $\sum\limits_{j=0}^{w} C_j(s,w)E_j(k,w,n) \neq 0$ для всех k, $0 \leqslant k \leqslant w$.

Достаточность. Предположим, что такое вложение не единственно, т. е. существует собственная функция f_1 графа H^n с собственным значением $n-2s$ такая, что $f_1\big|_{S(w)} \equiv f\big|_{S(w)} \equiv h$, но $f_1 \not\equiv f$. По предложению 1 значения $\widehat{f}(x)$, $\widehat{f_1}(x)$ могут быть не равны 0 только при $x \in S(s)$. Пусть $\delta(x) = \widehat{f_1}(x) - \widehat{f}(x)$. Разложим $\delta(x)$ по базису собственных функций $J(n,s)$. Заметим, что по построению $\widehat{\delta}\big|_{S(w)} \equiv 0$. Так как преобразование Фурье ненулевую функцию всегда переводит в ненулевую, имеем $\delta \not\equiv 0$. Поэтому найдётся ненулевая собственная функция q_j графа $J(n,s)$ с собственным числом $\lambda_j(w,n)$ для некоторого $0 \leqslant j \leqslant s$, входящая в это разложение. По предложению 3 функция $\widehat{\delta}(x)$ не равна тождественно 0 при $x \in S(w)$; противоречие. Следствие 3 доказано.

Отдельный интерес представляет случай $s = w$, так как при этом ненулевые значения исходной функции h из теоремы 1 и её ненулевые коэффициенты Фурье расположены в $S(w)$. Непосредственной подстановкой $s = w$ можно получить

Следствие 4. *Пусть $h(x)$ — ненулевая собственная функция графа $J(n,w)$, соответствующая собственному значению $\lambda_i(w,n)$. Тогда она вложима в некоторую собственную функцию графа H^n с собственным значением $n-2w$, если и только если $K_{w-i}(w-i,n-2i) \neq 0$.*

Доказательство. Подставив $s = w$ в $\sum\limits_{j=0}^{w} C_j(s,w)E_j(i,w,n)$, получим $\sum\limits_{j=0}^{w} C_j(w,w)E_j(i,w,n) = \sum\limits_{j=0}^{w} (-1)^{w+j}E_j(i,w,n)$. В [3] показано, что

$$\sum_{j=0}^{w} (-1)^j E_j(i,w,n) = (-1)^w(-2^i)K_{w-i}(w-i,n-2i).$$

В итоге $\sum\limits_{j=0}^{w} C_j(s,w)E_j(i,w,n) = (-2^i)K_{w-i}(w-i,n-2i)$. Следствие 4 доказано.

Аналогичным образом можно переформулировать следствия 2 и 3 для случая $s = w$. Следует заметить, что условие единственности в этом случае совпадает с критерием реконструктивности сферы в графе Хэмминга, найденным в [3]. Опираясь на известную серию целочисленных корней полинома Кравчука, можем вывести

Следствие 5. *Собственная функция графа Джонсона $J(2w,w)$ с собственным числом $\lambda_i(w,2w)$ при нечётном $w-i$ не может быть вложена ни в какую собственную функцию графа H^{2w} с собственным значением 0.*

По определению полинома Кравчука $K_t(s,2t) = 0$ при нечётных s, поэтому $K_{w-i}(w-i,2w-2i) = 0$ при нечётном $w-i$. Отсюда по следствию 4 получаем требуемое. Следствие 5 доказано.

Результаты, полученные в данной работе, показывают, что существует глубокая связь между собственными подпространствами графов Джонсона и Хэмминга. Это может оказаться полезным для доказательства несуществования и построения конструкций совершенных раскрасок графа Джонсона в 2 цвета.

Автор выражает благодарность С. В. Августиновичу и И. Ю. Могильных за полезные дискуссии по теме работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Августинович С. В., Васильева А. Ю.** Теоремы восстановления для центрированных функций и совершенных кодов // Сиб. мат. журн. — 2008. — Т. 49, № 3. — С. 483–489.
2. **Августинович С. В., Могильных И. Ю.** Совершенные раскраски графов Джонсона $J(8,3)$ и $J(8,4)$ в два цвета // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2010. — Т. 17, № 2. — С. 3–19.
3. **Васильева А. Ю.** О реконструктивных множествах вершин в булевом кубе // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2012. — Т. 19, № 1. — С. 3–16.
4. **Дельсарт Ф.** Алгебраический подход к схемам отношений теории кодирования. — М.: Мир, 1976. — 136 с.
5. **Мак-Вильямс Ф. Дж., Слоэн Н. Дж. А.** Теория кодов, исправляющих ошибки. — М.: Связь, 1994. — 744 с.
6. **Avgustinovich S. V., Mogil'nykh I. Yu.** Induced perfect colorings // Сиб. электрон. мат. изв. — 2011. — Т. 8. — С. 310–316.
7. **Martin W. J.** Completely regular designs of strength one // J. Algebr. Comb. — 1994. — Vol. 3. — P. 177–185.
8. **Martin W. J.** Completely regular designs // J. Comb. Des. — 1998. — Vol. 4. — P. 261–273.

Воробьёв Константин Васильевич,
e-mail: konstantin.vorobev@gmail.com,
vorobev@math.nsc.ru

Статья поступила
13 февраля 2012 г.

Переработанный вариант —
9 июня 2013 г.