ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Ноябрь—декабрь 2013. Том 20, № 6. С. 40–58

УДК 519.1

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ЭЙЛЕРОВЫХ ОРИЕНТАЦИЙ В ГРАФАХ, ОБЛАДАЮЩИХ СИЛЬНЫМИ ПЕРЕМЕШИВАЮЩИМИ СВОЙСТВАМИ*)

М. И. Исаев, К. В. Исаева

Аннотация. Рассмотрена задача подсчёта числа эйлеровых ориентаций в простых связных графах, все вершины которых имеют чётную степень. Для класса графов, обладающих сильными перемешивающими свойствами, получена асимптотическая формула, позволяющая определить искомое значение с точностью до мультипликативной ошибки $O(n^{-1+\varepsilon})$, где n — число вершин.

Ключевые слова: эйлерова ориентация, асимптотический анализ, гауссовский интеграл, алгебраическая связность, матрица Лапласа.

Введение

Эйлеровой ориентацией графа G называется такая ориентация его рёбер, что для любой вершины количество входящих и выходящих рёбер одинаково. Обозначим через $\mathrm{EO}(G)$ число эйлеровых ориентаций графа G. Легко видеть, что $\mathrm{EO}(G) = 0$, если степень хотя бы одной вершины G нечётная. Эйлерова ориентация полного графа K_n называется *регулярным турниром*.

Известно [10], что

(a) задача о точном подсчёте числа эйлеровых ориентаций неориентированного простого графа (т. е. графа без петель и кратных рёбер) полна для класса $\#P$ и, следовательно, трудна с точки зрения теории сложности;

(b) рассматриваемая задача может быть сведена к подсчёту числа совершенных паросочетаний класса двудольных графов, для которых это может быть сделано приближённо с большой вероятностью за полиномиальное время.

*) Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11–01–00398).

Кроме того, для случая $2d$-регулярного графа без петель G с n вершинами верны оценки [7, 11]

$$2^d\left(\frac{(2d-1)!!}{d!}\right)^{n-1} \leqslant \mathrm{EO}(G) \leqslant \left(\frac{(2d)!}{d!\cdot d!}\right)^{n/2}.$$

В [8] улучшена верхняя оценка для случая регулярного графа, а также проведены некоторые дополнительные исследования в этом направлении.

Даже для полного графа K_n точное выражение для числа эйлеровых ориентаций не известно при нечётном n (легко видеть, что $\mathrm{EO}(K_n) = 0$ для чётных n) и получена только асимптотическая формула [11]

$$\mathrm{EO}(K_n) = \left(\frac{2^{n+1}}{\pi n}\right)^{(n-1)/2} n^{1/2}e^{-1/2}(1 + O(n^{-1/2+\varepsilon})) \tag{1}$$

при нечётном $n \to \infty$ для любого фиксированного $\varepsilon > 0$.

В [1] обобщён подход из [11]. В частности, определено асимптотическое поведение числа эйлеровых ориентаций в простых графах с большой алгебраической связностью. Такие графы обладают сильными перемешивающими свойствами (см. разд. 2).

В настоящей работе продолжены исследования из [1, 11]. В разд. 1 получена асимптотическая формула для числа эйлеровых ориентаций в графах, обладающих сильными перемешивающими свойствами. Доказательство приведено в разд. 4.

Фактически оценка числа эйлеровых ориентаций сведена в [1] к оценке n-мерного интеграла гауссовского типа. В разд. 3, 5, 6 разработан подход для оценки интегралов такого типа.

1. Основной результат

Пусть G — неориентированный простой граф с множествами вершин $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ и рёбер $E(G)$. Определим $(n \times n)$-матрицу Q следующим образом:

$$Q_{jk} = \begin{cases} -1, & \{v_j, v_k\} \in E(G), \\ d_j, & j = k, \\ 0 & \text{в остальных случаях}, \end{cases} \tag{2}$$

где $n = |V(G)|$, d_j — степень $v_j \in V(G)$. Матрица $Q = Q(G)$ называется *матрицей Лапласа* графа G. Собственные значения матрицы Q

$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ являются неотрицательными вещественными числами, причём количество нулевых собственных значений совпадает с количеством компонент связности графа G, в частности, $\lambda_1 = 0$. Число $\lambda_2 = \lambda_2(G)$ называется *алгебраической связностью* графа G. Кроме того, верны неравенства

$$2 \min_j d_j - n + 2 \leqslant \lambda_2 \leqslant \frac{n}{n-1} \min_j d_j. \tag{3}$$

Для дополнительной информации о спектральных свойствах матрицы Лапласа см., например, [4, 5, 13].

По теореме Кирхгофа (матричная теорема о деревьях) [6]

$$t(G) = \frac{1}{n} \lambda_2 \lambda_3 \cdots \lambda_n = \det M_{11}, \tag{4}$$

где $t(G)$ — число остовных деревьев графа G, матрица M_{11} получается при удалении первого столбца и первой строчки Q.

Граф G назовём *γ-перемешивающим графом*, $\gamma > 0$, если для алгебраической связности верна оценка

$$\lambda_2 = \lambda_2(G) \geqslant \gamma |V(G)|. \tag{5}$$

В разд. 2 показано, что

(i) класс γ-перемешивающих графов может быть определён также как класс графов, у которых большая константа Чигера (изопериметрическое число), или класс графов с достаточно большим спектральным зазором между единицей и вторым по величине собственным значением матрицы вероятностей перехода случайного блуждания на графе и с большой степенью всех вершин;

(ii) почти все графы (асимптотически, в некотором вероятностном смысле) являются γ-перемешивающими.

Основным результатом нашей работы является

Теорема 1. *Пусть G — неориентированный простой граф с n вершинами $v_1, v_2, \ldots, v_n$ чётной степени. Пусть G удовлетворяет (5) для некоторого $\gamma > 0$. Тогда*

$$\begin{gathered} \mathrm{EO}(G) = (1 + \delta(G)) \left(2^{|E(G)| + \frac{n-1}{2}} \pi^{-\frac{n-1}{2}} \frac{1}{\sqrt{t(G)}} \prod_{\{v_j, v_k\} \in E(G)} P_{jk} \right), \\ P_{jk} = 1 - \frac{1}{4(d_j+1)^2} - \frac{1}{2(d_j+1)(d_k+1)} - \frac{1}{4(d_k+1)^2}, \end{gathered} \tag{6}$$

где d_j — степень вершины v_j, $t(G)$ — число остовных деревьев G, и для любого $\varepsilon > 0$ $|\delta(G)| \leqslant Cn^{-1+\varepsilon}$, причём константа $C > 0$ зависит только от γ и ε.

Доказательство теоремы 1 приведено в разд. 4. Оно основано на результатах разд. 3.

Замечание 1. Для полного графа имеем $\lambda_2(K_n) = n$, $E(K_n)=\frac{n(n-1)}{2}$, $t(K_n) = n^{n-2}$,

$$\prod_{\{v_j,v_k\}\in E(K_n)} P_{jk} = \left(1 - \frac{1}{4n^2} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{4n^2}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$$= (e^{\ln(1-1/n^2)})^{\frac{n(n-1)}{2}} = e^{-1/2} + O(n^{-1}).$$

Теорема 1 для полного графа улучшает оценку относительной погрешности в (1).

2. Класс γ-перемешивающих графов

2.1. Определения и обозначения. Пусть $\mathcal{F}_\gamma$ — множество простых графов G, обладающих свойством 1.

Свойство 1. Имеет место оценка $\lambda_2(G) \geqslant \gamma|V(G)|$.

Для подмножества вершин $A \subseteq V(G)$ через ∂A обозначим множество всех рёбер, соединяющих вершину из A и вершину не из A:

$$\partial A = \{\{u,v\} \in E(G) \mid u \in A,\ v \in V(G) \setminus A\}.$$

Константа Чигера $i(G)$ (или *изопериметрическое число*) графа G определяется следующим образом:

$$i(G) = \min\left\{\frac{|\partial A|}{|A|} \mid A \subset V(G),\ 0 < |A| \leqslant \frac{|V(G)|}{2}\right\}.$$

Число $i(G)$ является дискретным аналогом изопериметрической константы (Чигера) в теории римановых многообразий и имеет много интересных интерпретаций (для более подробной информации см., например, [12] и приведённые там ссылки).

Пусть $\mathcal{C}_\gamma$ — множество простых графов G, обладающих свойством 2.

Свойство 2. Имеет место неравенство $i(G) \geqslant \gamma|V(G)|$.

Пусть $P = P(G)$ — матрица переходных вероятностей случайного блуждания по графу G:

$$P_{jk} = \begin{cases} \frac{1}{d_j}, & \text{если } \{v_j, v_k\} \in E(G), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \qquad (7)$$

Собственные значения P таковы, что

$$1 = \chi_1 \geqslant \chi_2 \ldots \geqslant \chi_n \geqslant -1.$$

Граф G связен тогда и только тогда, когда случайное блуждание является неприводимой цепью Маркова. В этом случае существует единственное стационарное распределение и кратность собственного значения $\chi_1 = 1$ равна одному. (Для дополнительной информации о случайных блужданиях на графах см., например, [9] и приведённые там ссылки.)

Пусть $\mathcal{M}_\gamma$ — множество простых графов G, обладающих свойством 3.

Свойство 3. Имеют место неравенства

$$1 - \chi_2(G) \geqslant \gamma \quad \text{и} \quad \min_j d_j \geqslant \gamma |V(G)|.$$

В п. 2.2 доказана эквивалентность свойств 1–3. Отметим, что некоторые подобные оценки для рассматриваемых параметров графов ранее получены в [4].

2.2. Эквивалентность свойств 1–3. Известно [12], что для простого графа G с n вершинами верна оценка

$$\frac{\lambda_2(G)}{2} \leqslant i(G) \leqslant \sqrt{\lambda_2(G)(2 \max_j d_j - \lambda_2(G))}. \qquad (8)$$

Используя (8) и неравенство $d_j < n$, получаем, что для любого $\gamma_0 > 0$

$$\mathcal{F}_{\gamma_0} \subset \mathcal{C}_{\gamma_1} \quad \text{и} \quad \mathcal{C}_{\gamma_0} \subset \mathcal{F}_{\gamma_1}, \qquad (9)$$

где $\gamma_1 > 0$ зависит только от γ_0.

Пусть $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, M — $(n \times n)$-матрица. Тогда

$$\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{\vec{x}^T \vec{x}}, \quad \|M\|_2 = \sup_{\substack{\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \\ \|\vec{x}\|_2 = 1}} \|M\vec{x}\|_2.$$

Для завершения доказательства эквивалентности свойств 1–3 потребуется

Лемма 1. *Пусть* $a, b_1, b_2 > 0$ *и* A *— симметричная положительно определённая* $(n \times n)$*-матрица такая, что*

$$A\vec{w} = 0 \tag{10a}$$

для некоторого $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{w} \neq \vec{0}$, *и*

$$\|A\vec{u}\|_2 \geqslant a\|\vec{u}\|_2 \tag{10b}$$

для любого $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ *такого, что* $\vec{u}^T\vec{w} = 0$. *Тогда для любой симметричной* $(n \times n)$*-матрицы* B *такой, что*

$$\|B\|_2 \leqslant b_1 \quad \text{\textit{и}} \quad \vec{w}^T B\vec{w} \geqslant b_2\|\vec{w}\|_2^2, \tag{10c}$$

справедливо утверждение:

$$\det(A - \lambda B) = 0 \quad \text{\textit{и}} \quad \lambda \neq 0 \Longrightarrow \lambda \geqslant \rho \tag{11}$$

для некоторого $\rho = \rho(a, b_1, b_2) > 0$.

Доказательство. Пусть $\det(A - \lambda B) = 0$. Тогда

$$A\vec{v} = \lambda B\vec{v} \tag{12}$$

для некоторого $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{v} \neq 0$. Пусть $\vec{v} = \vec{v}_\parallel + \vec{v}_\perp$, где $\vec{v}_\parallel \parallel \vec{w}$ и $\vec{v}_\perp^T\vec{w} = 0$. Согласно (10a) $\vec{v}_\parallel^T A\vec{v} = 0$. Так как $\lambda \neq 0$, в силу (12) получаем $\vec{v}_\parallel^T B\vec{v}_\parallel = -\vec{v}_\parallel^T B\vec{v}_\perp$. Из (10c), последнего равенства и неравенства Коши — Шварца следует, что

$$b_1\|\vec{v}_\parallel\|\|\vec{v}_\perp\| \geqslant \|\vec{v}_\parallel\|\|B\vec{v}_\perp\| \geqslant \left|\vec{v}_\parallel^T B\vec{v}_\perp\right| = \left|\vec{v}_\parallel^T B\vec{v}_\parallel\right| \geqslant b_2\|\vec{v}_\parallel\|^2.$$

Поэтому $\|\vec{v}_\perp\| \geqslant \frac{b_2}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}\|\vec{v}\|$. Отсюда и из (10b), (10c) получаем

$$\|A\vec{v}\| \geqslant a\|\vec{v}_\perp\|, \quad \|B\vec{v}\| \leqslant b_1\|\vec{v}\| \leqslant \frac{b_1\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}{b_2}\|\vec{v}_\perp\|. \tag{13}$$

Комбинируя (12) и (13), имеем $\lambda \geqslant \frac{ab_2}{b_1\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$. Лемма 1 доказана.

Заметим, что

$$P = I - D^{-1}Q, \tag{14}$$

где Q и P — матрицы, определённые в (2) и (7) соответственно, I — единичная матрица и D — диагональная матрица, $D_{jj} = d_j$.

Пусть $A_1 = \frac{1}{n}Q$, $B_1 = \frac{1}{n}D$ и $\vec{w}_1 = [1, \dots, 1]^T$. Используя (14), получаем

$$\begin{gathered} \det(A_1 - \lambda I) = 0 \Longleftrightarrow \det(Q - \lambda n I) = 0, \\ \det(A_1 - \lambda B_1) = 0 \Longleftrightarrow \det(P - (1-\lambda)I) = 0. \end{gathered} \tag{15}$$

Для любого $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ такого, что $\vec{u}^T \vec{w}_1 = 0$, имеем

$$\begin{gathered} \vec{u}^T A_1 \vec{u} \geqslant \frac{1}{n}\lambda_2(G)\vec{u}^T\vec{u}, \quad \|B_1\|_2 \leqslant \frac{1}{n}\max_j d_j \leqslant 1, \\ \vec{w}_1^T B_1 \vec{w}_1 \geqslant \frac{1}{n}\min_j d_j\, \vec{w}_1^T \vec{w}_1. \end{gathered} \tag{16}$$

В силу свойства 1, соотношений (3), (15), (16) и леммы 1

$$\mathcal{F}_{\gamma_0} \subset \mathcal{M}_{\gamma_2} \tag{17}$$

для любого $\gamma_0 > 0$, где $\gamma_2 > 0$ зависит только от γ_0.

Пусть $A_2 = D^{-\frac{1}{2}} Q D^{-\frac{1}{2}}$, $B = nD^{-1}$ и $\vec{w}_2 = D^{\frac{1}{2}}\vec{w}_1$, где D^s — диагональная матрица, $D^s_{jj} = (d_j)^s$. Используя (14), находим

$$\begin{gathered} \det(A_2 - \lambda I) = 0 \Longleftrightarrow \det(P - (1-\lambda)I) = 0, \\ \det(A_2 - \lambda B_2) = 0 \Longleftrightarrow \det(Q - \lambda n I) = 0. \end{gathered} \tag{18}$$

Для любого $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ такого, что $\vec{u}^T \vec{w}_2 = 0$, получаем

$$\begin{gathered} \vec{u}^T A_2 \vec{u} \geqslant (1 - \chi_2(G))\vec{u}^T\vec{u}, \quad \|B_2\|_2 \leqslant \frac{n}{\min\limits_j d_j}, \\ \vec{w}_2^T B_1 \vec{w}_2 = n\vec{w}_1^T \vec{w}_1 \geqslant \vec{w}_2^T \vec{w}_2. \end{gathered} \tag{19}$$

Комбинируя свойство 3, соотношения (3), (18), (19) и лемму 1, для любого $\gamma_0 > 0$ имеем

$$\mathcal{M}_{\gamma_0} \subset \mathcal{F}_{\gamma_3}, \tag{20}$$

где $\gamma_3 > 0$ зависит только от γ_0.

Собирая вместе (9), (17) и (20), получаем искомое утверждение.

Теорема 2. *Для любого* $\gamma_0 > 0$

$$\mathcal{F}_{\gamma_0} \cup \mathcal{C}_{\gamma_0} \cup \mathcal{M}_{\gamma_0} \subset \mathcal{F}_{\gamma} \cap \mathcal{C}_{\gamma} \cap \mathcal{M}_{\gamma}, \tag{21}$$

где $\gamma > 0$ *зависит только от* γ_0.

2.3. Вероятность случайного графа быть γ-перемешивающим. Пусть ξ — случайная величина, принадлежащая биномиальному распределению $B(M,p)$:

$$\Pr(\xi = k) = \frac{M!}{k!(M-k)!} p^k (1-p)^{M-k}, \quad 0 < p < 1,\ M \in \mathbb{N}.$$

Заметим, что для некоторых $\alpha > 0$, $c > 1$, зависящих только от p, имеем

$$\Pr(\xi \leqslant \alpha M) \leqslant c^{-M}. \tag{22}$$

Это следует, например, из следующей оценки:

$$\frac{\Pr(\xi = k)}{\Pr(\xi = k-1)} = \frac{M-k+1}{k}\,\frac{p}{1-p} \geqslant \frac{\frac{2}{p+2}(M+1)}{\frac{p}{p+2}(M+1)}\,\frac{p}{1-p} \geqslant 2$$

при $1 \leqslant k \leqslant \frac{p(M+1)}{p+2}$.

Пусть G — случайный граф, принадлежащий модели Гильберта $G(n,p)$: $\Pr(\{v_i, v_j\} \in E(G)) = p$, $0 < p < 1$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$ (независимо для каждой пары $\{i,j\}$). Для подмножества вершин $A \subset V(G)$, используя (22), получаем $\Pr(|\partial A| \leqslant \alpha |A|(n-|A|)) \leqslant c^{-|A|(n-|A|)}$. Отсюда

$$\begin{aligned}
\Pr\left(i(G) \leqslant \frac{\alpha n}{2}\right) &\leqslant \sum_{A \subset V(G),\ 0<|A|\leqslant \frac{n}{2}} \Pr\left(|\partial A| \leqslant \alpha |A| \frac{n}{2}\right) \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n/2} \sum_{|A|=k} \Pr(|\partial A| \leqslant \alpha |A|(n-|A|)) \leqslant \sum_{k=1}^{n/2} \frac{n!}{k!(n-k)!}\, c^{-k(n-k)} \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n/2} \frac{n!}{k!(n-k)!}\,(c^{-n/2})^k \leqslant (1 + c^{-n/2})^n - 1 \leqslant \beta^{-n}
\end{aligned} \tag{23}$$

для некоторого $\beta > 1$, зависящего только от p.

Согласно (23) и теореме 2 вероятность случайного графа (в модели Гильберта $G(n,p)$) быть γ-перемешивающим не менее чем $1 - \beta^{-n}$, где $\gamma = \gamma(p) > 0$ и $\beta = \beta(p) > 1$.

3. Асимптотические оценки интегралов

Зафиксируем константы $a, b, \varepsilon > 0$. Используем обозначение $f = O(g)$, подразумевая, что $|f| \leqslant c|g|$ для некоторого $c > 0$, зависящего только от a, b и ε.

Для действительного $p \geqslant 1$ и вектора $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ положим

$$\|\vec{x}\|_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{1/p}, \quad \|\vec{x}\|_\infty = \max_j |x_j|.$$

Векторной p-норме соответствует матричная норма

$$\|A\|_p = \sup_{\vec{x} \neq 0} \frac{\|A\vec{x}\|_p}{\|\vec{x}\|_p}.$$

Если A — симметрическая матрица и $p \geqslant 1$, то

$$\|A\|_p \geqslant \|A\|_2 \,. \tag{24}$$

Для обратимых матриц определяется число обусловленности:

$$\mu_p(A) = \|A\|_p \cdot \|A^{-1}\|_p \geqslant \|AA^{-1}\|_p = 1.$$

Пусть I — единичная $(n \times n)$-матрица, $A = I + X$ — положительно определённая симметрическая матрица такая, что

$$|X_{jk}| \leqslant a/n, \quad X_{jj} = 0, \quad \|A^{-1}\|_2 \leqslant b. \tag{25}$$

Заметим, что

$$\|A^{-1}\|_2^{-1} \leqslant \|A\|_2 \leqslant \|A\|_\infty = \|A\|_1 = \max_j \sum_{k=1}^{n} |A_{jk}| = O(1). \tag{26}$$

Напомним, что при выполненных предположениях (25) [1, лемма 3.2] имеет место равенство

$$\mu_\infty(A) = \mu_1(A) = O(\mu_2(A)). \tag{27}$$

Используя (24)–(27), получаем следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть A удовлетворяет* (25). *Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty = \|A^{-1}\|_1 = O(1), \tag{28}$$

$$|X'_{jk}| = O(n^{-1}), \tag{29}$$

где $X' = A^{-1} - I = A^{-1}(I - A) = -A^{-1}X$.

Пусть $\langle g\rangle_{F,\Omega} = \int\limits_{\Omega} g(\vec\theta)e^{F(\vec\theta)}d\,\vec\theta$, $\langle g\rangle_{F,r} = \langle g\rangle_{F,U_n(rn^{\varepsilon})}$ при $r > 0$, где $U_n(\rho) = \{(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n) \in \mathbb{R}^n \mid |\theta_j| \leqslant \rho$ для всех $j = 1,\ldots,n\}$. В качестве F используются функции вида

$$F(\vec\theta) = -\vec\theta^T A\vec\theta + R(\vec\theta), \tag{30}$$

где A удовлетворяет (25). Рассмотрим следующие условия на R:

$$R(\vec\theta) \leqslant c_1\frac{\vec\theta^T A\vec\theta}{n}, \qquad \left\|\frac{\partial R(\vec\theta)}{\partial\vec\theta}\right\|_{\infty} \leqslant c_2\frac{\|\vec\theta\|_{\infty}^3}{n}. \tag{31}$$

Для случая $R \equiv 0$ используем обозначения

$$\langle g\rangle_{\Omega} = \langle g\rangle_{F,\Omega}, \quad \langle g\rangle_r = \langle g\rangle_{F,r}, \quad \langle g\rangle = \langle g\rangle_{+\infty}.$$

Предложение 1. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *такая, что* $U_n(r_1n^{\varepsilon}) \subset \Omega \subset U_n(r_2n^{\varepsilon})$ *для некоторых* $r_2 > r_1 > 0$. *Пусть* A *удовлетворяет* (25) *и предположения* (31) *выполнены для некоторых* $c_1, c_2 > 0$. *Тогда*

$$\langle 1\rangle_{\Omega} = (1 + O(\exp(-c_3n^{2\varepsilon})t))\langle 1\rangle, \tag{32}$$

$$\langle 1\rangle_{F,\Omega} = O\left(\langle 1\rangle\right), \tag{33}$$

$$\left\langle\theta_k^4\right\rangle_{F,\Omega} = \frac{3}{4}\langle 1\rangle_{F,\Omega} + O(n^{-1+7\varepsilon})\langle 1\rangle \tag{34}$$

и для $k \neq l$

$$\left\langle\theta_k\theta_l^3\right\rangle_{F,\Omega} = O(n^{-1+7\varepsilon})\langle 1\rangle, \tag{35}$$

$$\left\langle\theta_k^2\theta_l^2\right\rangle_{F,\Omega} = \frac{1}{4}\langle 1\rangle_{F,\Omega} + O(n^{-1+7\varepsilon})\langle 1\rangle, \tag{36}$$

где F *определена в* (30) *и* $c_3 = c_3(r_1,r_2,c_1,c_2,a,b,\varepsilon) > 0$.

Доказательство предложения 1 приведено в разд. 5.

4. Доказательство теоремы 1

Для матрицы Лапласа Q вектор $[1,1,\ldots,1]^T$ является собственным, соответствующим собственному значению $\lambda_1 = 0$. Пусть $\widehat{Q} = Q + J$, где J — матрица, все элементы которой равны 1. Заметим, что Q и $\widehat{Q}$ имеют одинаковый набор собственных значений и векторов, за исключением собственного значения, соответствующего вектору $[1,1,\ldots,1]^T$, которое равно 0 для Q и n для $\widehat{Q}$. Используя (4), находим

$$t(G) = \frac{1}{n}\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_n = \frac{\det\widehat{Q}}{n^2}. \tag{37}$$

Из (24) получаем $\lambda_n = ||Q||_2 \leqslant ||\widehat{Q}||_2 \leqslant ||\widehat{Q}||_1 = \max\limits_j \sum\limits_{k=1}^{n} |\widehat{Q}_{jk}| = n$. По условию теоремы 1 имеем

$$||\widehat{Q}^{-1}||_2 = \frac{1}{\lambda_2} \leqslant \frac{1}{\gamma n}. \tag{38}$$

Используя (3), получаем

$$n - 1 \geqslant d_j \geqslant \lambda_2 \frac{n-1}{n} \geqslant \gamma(n-1). \tag{39}$$

Напомним [1, предложение 6.1], что при выполненных предположениях теоремы 1 имеет место равенство

$$\mathrm{EO}(G) = (1 + O(n^{-1+6\varepsilon}))2^{|E(G)|-1/2}\pi^{-n+1/2} n \,\mathrm{Int}, \tag{40}$$

$$\mathrm{Int} = \int\limits_{U_n(n^{-1/2+\varepsilon})} \exp\left(-\frac{1}{2}\,\vec{\xi}^T \widehat{Q}\vec{\xi} - \frac{1}{12} \sum_{\{v_j,v_k\}\in E(G)} \Delta_{jk}^4 \right) d\vec{\xi}, \tag{41}$$

где $\Delta_{jk} = \xi_j - \xi_k$. Пусть $\theta_k = \sqrt{(d_k+1)/2}\,\xi_k$. Тогда

$$-\frac{1}{2}\,\vec{\xi}^T \widehat{Q}\vec{\xi} = -\vec{\theta}^T A\vec{\theta}, \quad A_{jk} = \frac{1}{\sqrt{(d_j+1)(d_k+1)}}\widehat{Q}_{jk}, \tag{42}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{jk}^4 = \frac{4\theta_j^4}{(d_j+1)^2} - 4\frac{4\theta_j^3\theta_k}{(d_j+1)^{3/2}(d_k+1)^{1/2}} + 6\frac{4\theta_j^2\theta_k^2}{(d_j+1)(d_k+1)} \\ - 4\frac{4\theta_k^3\theta_j}{(d_k+1)^{3/2}(d_j+1)^{1/2}} + \frac{4\theta_k^4}{(d_k+1)^2}.\end{aligned} \tag{43}$$

Для подмножества Θ множества рёбер $E(G)$ определим

$$R_\Theta(\vec{\theta}) = -\frac{1}{12} \sum_{\{v_j,v_k\}\in\Theta\subset E(G)} \Delta_{jk}^4. \tag{44}$$

Используя (38), (39) и (43), находим, что условия предложения 1 для

$$\Omega = \{\vec{\theta} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{\xi} \in U_n(n^{-1/2+\varepsilon})\}, \quad F(\vec{\theta}) = F_\Theta(\vec{\theta}) = -\vec{\theta}^T A\vec{\theta} + R_\Theta(\vec{\theta})$$

выполнены при константах r_1, r_2, c_1, c_2, a, b, зависящих только от γ.

В силу (34)–(36) и (43) получаем

$$\langle \Delta_{jk}^4 \rangle_{F_\Theta,\Omega} = \left(\frac{3}{4}\frac{4}{(d_j+1)^2} + \frac{6}{4}\frac{4}{(d_j+1)(d_k+1)} + \frac{3}{4}\frac{4}{(d_k+1)^2}\right)\langle 1 \rangle_{F_\Theta,\Omega} + O(n^{-3+7\varepsilon})\langle 1 \rangle.$$

Используя (33), находим

$$\langle e^{-\frac{1}{12}\Delta_{jk}^4} \rangle_{F_\Theta,\Omega} = P_{jk}\langle 1 \rangle_{F_\Theta,\Omega} + O(n^{-3+7\varepsilon})\langle 1 \rangle, \tag{45}$$

где $P_{jk} = 1 - \frac{1}{4(d_j+1)^2} - \frac{1}{2(d_j+1)(d_k+1)} - \frac{1}{4(d_k+1)^2}$.

Отметим, что $1 - \frac{1}{n^2} \leqslant P_{jk} \leqslant 1$. С помощью (33) и (45) постепенно избавляемся от всех рёбер в $R_{E(G)}(\vec{\theta})$ и получаем

$$\langle 1 \rangle_{F_{E(G)},\Omega} = \prod_{\{v_j,v_k\}\in E(G)} P_{jk}\langle 1 \rangle_\Omega + O(n^{-1+7\varepsilon})\langle 1 \rangle. \tag{46}$$

Комбинируя (32) и (46), имеем

$$\langle 1 \rangle_{F_{E(G)},\Omega} = \Big(\prod_{\{v_j,v_k\}\in E(G)} P_{jk} + O(n^{-1+7\varepsilon})\Big)\langle 1 \rangle. \tag{47}$$

Используя (41), (42), (44) и (47), убеждаемся, что

$$\begin{aligned}\mathrm{Int} &= \int\limits_{U_n(n^{-1/2+\varepsilon})} \exp\Big(-\frac{1}{2}\,\vec{\xi}^T\widehat{Q}\vec{\xi} - \frac{1}{12}\sum_{\{v_j,v_k\}\in E(G)} \Delta_{jk}^4\Big)d\vec{\xi} \\ &= \Big(\prod_{(v_j,v_k)\in E(G)} P_{jk} + O(n^{-1+7\varepsilon})\Big)\int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\Big(-\frac{1}{2}\,\vec{\xi}^T\widehat{Q}\vec{\xi}\Big)\,d\vec{\xi} \\ &= (1 + O(n^{-1+7\varepsilon}))\frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det \widehat{Q}}}\prod_{\{v_j,v_k\}\in E(G)} P_{jk}.\end{aligned} \tag{48}$$

Комбинируя (37), (40) и (48), получаем (6).

5. Доказательство предложения 1

Используем обозначение $f = O(g)$, подразумевая, что $|f| \leqslant c|g|$ для некоторого $c > 0$, зависящего только от $r_1, r_2, c_1, c_2, a, b, \varepsilon$.

Пусть

$$\vec{\varphi}(\vec{\theta}) = (\varphi_1(\vec{\theta}), \varphi_2(\vec{\theta}), \ldots, \varphi_n(\vec{\theta})) = A\vec{\theta}. \tag{49}$$

Согласно (25) $A = I + X$, $X_{jj} = 0$, поэтому для некоторой функции

$$g_1(\vec{\theta}) = g_1(\theta_2, \ldots, \theta_n) \tag{50}$$

имеет место равенство

$$\vec{\theta}^T A\vec{\theta} = \varphi_1^2(\vec{\theta}) + g_1(\vec{\theta}). \tag{51}$$

Используя (25), (51) и оценивая незначительные части гауссовского интеграла типа $\int (\max\{|x|, k_1\})^s \, e^{-(x-k_2)^2} dx$, находим, что для любых $r > 0$, $s \geqslant 0$

$$\begin{aligned}\big\langle \|\vec{\theta}\|_\infty^s \big\rangle &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \|\vec{\theta}\|_\infty^s e^{-\vec{\theta}^T A\vec{\theta}} d\,\vec{\theta} \\ &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\,g_1(\theta_2,\ldots,\theta_n)} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|\vec{\theta}\|_\infty^s e^{-\varphi_1(\vec{\theta})^2} d\theta_1 \right) d\theta_2 \ldots d\theta_n \\ &= (1 + O(\exp(-c_4 n^{2\varepsilon}))) \int\limits_{|\varphi_1(\vec{\theta})| \leqslant rn^\varepsilon} \|\vec{\theta}\|_\infty^s e^{-\,\vec{\theta}^T A\vec{\theta}} \, d\vec{\theta},\end{aligned} \tag{52}$$

где $c_4 = c_4(r, \varepsilon, s) > 0$. Комбинируя выражения, аналогичные (52) для φ_1, $\varphi_2, \ldots, \varphi_n$, имеем

$$\int\limits_{||\vec{\varphi}(\vec{\theta})||_\infty \leqslant rn^\varepsilon} \|\vec{\theta}\|_\infty^s e^{-\vec{\theta}^T A\vec{\theta}} \, d\vec{\theta} = (1 + O(\exp(-c_5 n^{2\varepsilon}))) \big\langle \|\vec{\theta}\|_\infty^s \big\rangle, \tag{53}$$

где $c_5 = c_5(r, \varepsilon, s) > 0$. С помощью (28), (49) и (53) при $s = 0$ получаем (32).

Используя (31), находим

$$|\langle 1 \rangle_{F,\Omega}| \leqslant \int\limits_\Omega |e^{F(\vec{\theta})}| \, d\vec{\theta} \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\vec{\theta}^T A\vec{\theta} + \frac{c_1}{n}\vec{\theta}^T A\vec{\theta}} \, d\vec{\theta} = O(\langle 1 \rangle). \tag{54}$$

Для доказательства (34)–(36) используются следующие две леммы. Их доказательства приведены в разд. 6.

Лемма 3. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *такая, что* $U_n(r_1 n^\varepsilon) \subset \Omega \subset U_n(r_2 n^\varepsilon)$ *для некоторых* $r_2 > r_1 > 0$. *Пусть* A *удовлетворяет* (25) *и предположения* (31) *выполнены для некоторых констант* $c_1, c_2 > 0$. *Пусть* $P =$

$P(x) = O(|x|^s)$ *для некоторого фиксированного* $s \geqslant 0$. *Тогда для любых функций* $T(\vec{\theta})$, $|T(\vec{\theta})| \leqslant P(\|\vec{\theta}\|_\infty)$, $\langle T(\vec{\theta})\rangle_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} = O(\exp(-c_6 n^{2\varepsilon}))\langle 1\rangle$, *и* $\widetilde{T}(\vec{\theta}) = \widetilde{T}(\theta_1, \ldots, \theta_{k-1}, \theta_{k+1}, \ldots, \theta_n)$, $\widetilde{T}(\vec{\theta}) \leqslant P(\|\vec{\theta}\|_\infty)$, *имеют место соотношения*

$$\big\langle \varphi_k^2(\vec{\theta})\widetilde{T}(\vec{\theta})\big\rangle_{F,\Omega} = \frac{1}{2}\langle \widetilde{T}(\vec{\theta})\rangle_{F,\Omega} + O(n^{-1+4\varepsilon})\langle|\widetilde{T}(\vec{\theta})|\rangle_{F,\Omega} + O(\exp(-c_6 n^{2\varepsilon}))\langle 1\rangle, \quad (55)$$

$$\big\langle \varphi_k^4(\vec{\theta})\widetilde{T}(\vec{\theta})\big\rangle_{F,\Omega} = \frac{3}{4}\langle \widetilde{T}(\vec{\theta})\rangle_{F,\Omega} + O(n^{-1+4\varepsilon})\langle|\widetilde{T}(\vec{\theta})|\rangle_{F,\Omega} + O(\exp(-c_6 n^{2\varepsilon}))\langle 1\rangle, \quad (56)$$

$$\langle \varphi_k(\vec{\theta})\widetilde{T}(\vec{\theta})\rangle_{F,\Omega} = O(n^{-1+4\varepsilon})\langle|\widetilde{T}(\vec{\theta})|\rangle_{F,\Omega} + O(\exp(-c_6 n^{2\varepsilon}))\langle 1\rangle, \quad (57)$$

$$\big\langle \varphi_k^3(\vec{\theta})\widetilde{T}(\vec{\theta})\big\rangle_{F,\Omega} = O(n^{-1+6\varepsilon})\langle|\widetilde{T}(\vec{\theta})|\rangle_{F,\Omega} + O(\exp(-c_6 n^{2\varepsilon}))\langle 1\rangle, \quad (58)$$

где функция F *определена согласно* (30), *вектор* $\vec{\varphi}(\vec{\theta})$ *определён согласно* (49) *и* $c_6 = c_6(r_1, r_2, c_1, c_2, a, b, \varepsilon, P) > 0$.

Лемма 4. *Пусть предположения леммы* 3 *выполнены и*

$$M(\vec{x}) = x_1^{s_1}\cdots x_n^{s_n}, \quad s = s_1 + \ldots + s_n > 0,$$

для неотрицательных целых чисел $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. *Пусть* $s_k = 0$ *и* $|\{j \mid s_j \neq 0\}| \leqslant 3$. *Тогда*

$$\langle \varphi_k(\vec{\theta})M(\vec{\varphi}(\vec{\theta}))\rangle_{F,\Omega} = O(sn^{-1+(s+4)\varepsilon})\langle 1\rangle. \quad (59)$$

Используя (29), находим

$$\theta_k = \varphi_k + \vec{\alpha}_k^T\vec{\varphi}, \quad \|\vec{\alpha}_k\|_\infty = O(n^{-1}). \quad (60)$$

Комбинируя (54), леммы 3 и 4, получаем

$$\begin{aligned}\langle \delta_k(\vec{\theta})^2\rangle_{F,\Omega} &= \big\langle \big(\vec{\alpha}_k^T\vec{\varphi}\big)^2 \big\rangle_{F,\Omega} \\ &= O(n^{-2})\Big(\sum_j \langle \varphi_j(\vec{\theta})^2\rangle_{F,\Omega} + \sum_{j_1\neq j_2} |\langle \varphi_{j_1}(\vec{\theta})\varphi_{j_2}(\vec{\theta})\rangle_{F,\Omega}|\Big) \\ &= (O(n^{-1}) + O(n^{-1+5\varepsilon}))\langle 1\rangle = O(n^{-1+5\varepsilon})\langle 1\rangle, \quad (61)\end{aligned}$$

$$\langle \delta_k(\vec{\theta})^4\rangle_{F,\Omega} = \big\langle \big(\vec{\alpha}_k^T\vec{\varphi}\big)^4 \big\rangle_{F,\Omega} = O(n^{-4})\sum_j \langle \varphi_j(\vec{\theta})^4\rangle_{F,\Omega}$$

$$
\begin{aligned}
&+ O(n^{-4}) \sum_{j_1 \neq j_2} \langle \varphi_{j_1}(\vec{\theta})^2 \varphi_{j_2}(\vec{\theta})^2 \rangle_{F,\Omega} + O(n^{-4}) \sum_{j_1 \neq j_2} |\langle \varphi_{j_1}(\vec{\theta}) \varphi_{j_2}(\vec{\theta})^3 \rangle_{F,\Omega}| \\
&+ O(n^{-4}) \sum_{j_1 \neq j_2 \neq j_3} |\langle \varphi_{j_1}(\vec{\theta}) \varphi_{j_2}(\vec{\theta}) \varphi_{j_3}(\vec{\theta})^2 \rangle_{F,\Omega}| \\
&+ O(n^{-4}) \sum_{j_1 \neq j_2 \neq j_3 \neq j_4} |\langle \varphi_{j_1}(\vec{\theta}) \varphi_{j_2}(\vec{\theta}) \varphi_{j_3}(\vec{\theta}) \varphi_{j_4}(\vec{\theta}) \rangle_{F,\Omega}| \\
&= (O(n^{-3}) + O(n^{-2+4\varepsilon}) + O(n^{-3+7\varepsilon}) + O(n^{-2+7\varepsilon}) + O(n^{-1+7\varepsilon}))\langle 1 \rangle \\
&= O(n^{-1+7\varepsilon})\langle 1 \rangle, \qquad (62)
\end{aligned}
$$

где $\delta_k(\vec{\theta}) = \theta_k - \varphi_k(\vec{\theta})$.

Согласно (25) имеем

$$
\delta_k(\vec{\theta}) = \delta_k(\theta_1, \ldots, \theta_{k-1}, \theta_{k+1}, \ldots, \theta_n). \qquad (63)
$$

Используя (54), (61)–(63) и лемму 3, получаем

$$
\begin{aligned}
\langle \varphi_k(\vec{\theta}) \delta_k(\vec{\theta})^3 \rangle_{F,\Omega} &= O(n^{-1+4\varepsilon}) \langle |\delta_k(\vec{\theta})|^3 \rangle_{F,\Omega} \\
&+ O(\exp(-c_6 n^{2\varepsilon}))\langle 1 \rangle = O(n^{-1+7\varepsilon})\langle 1 \rangle, \qquad (64)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle \varphi_k(\vec{\theta})^2 \delta_k(\vec{\theta})^2 \rangle_{F,\Omega} &= \left(\frac{1}{2} + O(n^{-1+4\varepsilon}) \right) \langle \delta_k(\vec{\theta})^2 \rangle_{F,\Omega} \\
&+ O(\exp(-c_6 n^{2\varepsilon}))\langle 1 \rangle = O(n^{-1+5\varepsilon})\langle 1 \rangle, \qquad (65)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle \varphi_k(\vec{\theta})^3 \delta_k(\vec{\theta}) \rangle_{F,\Omega} &= O(n^{-1+6\varepsilon}) \langle |\delta_k(\vec{\theta})| \rangle_{F,\Omega} \\
&+ O(\exp(-c_6 n^{2\varepsilon}))\langle 1 \rangle = O(n^{-1+7\varepsilon})\langle 1 \rangle, \qquad (66)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle \theta_k^4 \rangle_{F,\Omega} &= \langle (\varphi_k(\vec{\theta}) + \delta_k(\vec{\theta}))^4 \rangle_{F,\Omega} = \langle \varphi_k(\vec{\theta})^4 \rangle_{F,\Omega} \\
&+ O(n^{-1+7\varepsilon})\langle 1 \rangle = \frac{3}{4} \langle 1 \rangle_{F,\Omega} + O(n^{-1+7\varepsilon})\langle 1 \rangle. \qquad (67)
\end{aligned}
$$

Аналогично (61), (62), используя (64)–(67), находим

$$
\begin{aligned}
\langle \delta_k(\vec{\theta})^2 \theta_l^2 \rangle_{F,\Omega} &= O(n^{-2}) \Big(\sum_j \langle \varphi_j(\vec{\theta})^2 \theta_l^2 \rangle_{F,\Omega} + \sum_{j_1 \neq j_2} \big| \langle \varphi_{j_1}(\vec{\theta}) \varphi_{j_2}(\vec{\theta}) \theta_l^2 \rangle_{F,\Omega} \big| \Big) \\
&= (O(n^{-1+2\varepsilon}) + O(n^{-1+7\varepsilon}))\langle 1 \rangle = O(n^{-1+7\varepsilon})\langle 1 \rangle, \qquad (68)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\big\langle \delta_k(\vec\theta)\theta_l^3\big\rangle_{F,\Omega} &= O(n^{-1})\sum_{j\neq l}\big\langle \varphi_j(\vec\theta)\theta_l^3\big\rangle_{F,\Omega} + O(n^{-1})\big\langle \varphi_l(\vec\theta)\theta_l^3\big\rangle_{F,\Omega}\\ &= (O(n^{-1+7\varepsilon}) + O(n^{-1+4\varepsilon}))\langle 1\rangle = O(n^{-1+7\varepsilon})\langle 1\rangle. \quad (69)\end{aligned}$$

Используя (54), (63), (68), (69) и лемму 3, получаем

$$\begin{aligned}\big\langle \varphi_k(\vec\theta)\delta_k(\vec\theta)\theta_l^2\big\rangle_{F,\Omega} &= O(n^{-1+4\varepsilon})\big\langle \big|\delta_k(\vec\theta)\theta_l^2\big|\big\rangle_{F,\Omega}\\ &\quad + O(\exp(-c_6 n^{2\varepsilon}))\langle 1\rangle = O(n^{-1+7\varepsilon})\langle 1\rangle,\end{aligned}$$

$$\big\langle \theta_k\theta_l^3\big\rangle_{F,\Omega} = \big\langle (\varphi_k(\vec\theta) + \delta_k(\vec\theta))\theta_l^3\big\rangle_{F,\Omega} = O(n^{-1+7\varepsilon})\langle 1\rangle,$$

$$\begin{aligned}\big\langle \theta_k^2\theta_l^2\big\rangle_{F,\Omega} &= \big\langle (\varphi_k(\vec\theta) + \delta_k(\vec\theta))^2\theta_l^2\big\rangle_{F,\Omega} = \big\langle \varphi_k(\vec\theta)^2\theta_l^2\big\rangle_{F,\Omega}\\ &+ O(n^{-1+7\varepsilon})\langle 1\rangle = \frac12\langle \varphi_l(\vec\theta) + \delta_l(\vec\theta))^2\rangle_{F,\Omega} + O(n^{-1+7\varepsilon})\langle 1\rangle\\ &= \frac14\langle 1\rangle_{F,\Omega} + O(n^{-1+7\varepsilon})\langle 1\rangle.\end{aligned}$$

6. Доказательства лемм 3 и 4

Пусть $\vec\theta^{(k)} = (\theta_1,\dots,\theta_{k-1},0,\theta_{k+1},\dots,\theta_n)$.

Доказательство леммы 3. Используя (28), (49) и (53), находим

$$|\langle T\rangle_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega}| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} P\big(\|\vec\theta\|_\infty^s\big)e^{-\vec\theta^T A\vec\theta}\,d\vec\theta = O(\exp(-c_6n^{2\varepsilon}))\langle 1\rangle. \quad (70)$$

Для простоты пусть $k=1$. Ввиду (70) получаем

$$\begin{aligned}\big\langle \varphi_1^p(\vec\theta)\widetilde T(\vec\theta)\big\rangle_{F,\Omega} &= \int\limits_{\Omega}\varphi_1^p(\vec\theta)\widetilde T(\theta_2,\dots,\theta_n)e^{-\vec\theta^T A\vec\theta + R(\vec\theta)}\,d\vec\theta\\ = \int\limits_{U_n(r_2n^\varepsilon)}&\varphi_1^p(\vec\theta)\widetilde T(\theta_2,\dots,\theta_n)e^{-\vec\theta^T A\vec\theta+R(\vec\theta)}\,d\vec\theta + O(\exp(-c_6n^{2\varepsilon}))\langle 1\rangle,\ p=1,2,3,4.\end{aligned}$$

Комбинируя (50) и теорему Лагранжа о среднем значении, находим

$$R(\vec\theta) - R(\vec\theta^{(1)}) = O(n^{-1+4\varepsilon}),\quad \vec\theta\in U_n(r_2n^\varepsilon). \quad (71)$$

Используя (51), имеем

$$\int\limits_{U_n(r_2n^{\varepsilon})} \varphi_1^p(\vec\theta)\widetilde{T}(\theta_2,\ldots,\theta_n)e^{-\vec\theta^TA\vec\theta+R(\vec\theta)}\,d\vec\theta + O(\exp(-c_6n^{2\varepsilon}))\langle 1\rangle$$

$$= \int\limits_{-r_2n^{\varepsilon}}^{r_2n^{\varepsilon}}\cdots\int\limits_{-r_2n^{\varepsilon}}^{r_2n^{\varepsilon}} \widetilde{T}e^{-\,g_1(\theta_2,\ldots,\theta_n)+R(\vec\theta^{(1)})}$$

$$\times\left(\int\limits_{-r_2n^{\varepsilon}}^{r_2n^{\varepsilon}} \varphi_1^p e^{-\varphi_1^2(\vec\theta)+R(\vec\theta)-R(\vec\theta^{(1)})}d\theta_1\right)d\theta_2\ldots d\theta_n,\quad p=0,1,2,3,4. \qquad (72)$$

Комбинируя (28) и (71), получаем для $\vec\theta^{(1)}\in U_n(r_2n^{\varepsilon})$

$$\int\limits_{-r_2n^{\varepsilon}}^{r_2n^{\varepsilon}} \varphi_1^p e^{-\varphi_1^2(\vec\theta)+R(\vec\theta)-R(\vec\theta^{(1)})}\,d\theta_1$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1^p e^{-\varphi_1^2(\vec\theta)}\,d\theta_1 + O(\exp(-c_7n^{2\varepsilon}))\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varphi_1^2(\vec\theta)}\,d\theta_1$$

$$+ \int\limits_{|\varphi_1(\vec\theta)|\leqslant r_3n^{\varepsilon}} \varphi_1^p e^{-\varphi_1^2(\vec\theta)}(e^{R(\vec\theta)-R(\vec\theta^{(1)})}-1)\,d\theta_1,\quad p=0,1,2,3,4, \qquad (73)$$

где $c_7=c_7(r_2,c_1,c_2,a,b,\varepsilon)>0$, $r_3=r_3(r_2,c_1,c_2,a,b,\varepsilon)>0$.

Имеем

$$\begin{aligned}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1^2e^{-\varphi_1^2(\vec\theta)}d\theta_1 &= \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varphi_1^2(\vec\theta)}\,d\theta_1,\\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1^4e^{-\varphi_1^2(\vec\theta)}d\theta_1 &= \frac{3}{4}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varphi_1^2(\vec\theta)}\,d\theta_1\end{aligned} \qquad (74)$$

при $p=2,4$,

$$\int\limits_{|\varphi_1(\vec\theta)|\langle r_3n^{\varepsilon}} \varphi_1^p e^{-\varphi_1^2(\vec\theta)}(e^{R(\vec\theta)-R(\vec\theta^{(1)})}-1)\,d\theta_1 = O(n^{-1+4\varepsilon})\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1^p e^{-\varphi_1^2(\vec\theta)}\,d\theta_1$$

$$= O(n^{-1+4\varepsilon})\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varphi_1^2(\vec\theta)}\,d\theta_1 \quad \text{при } \vec\theta^{(1)}\in U_n(r_2n^{\varepsilon}),\ p=0,2,4. \qquad (75)$$

Комбинируя (70)–(75), получаем (55) и (56).

При $p = 1, 3$ имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1^p e^{-\varphi_1^2(\vec{\theta})}\, d\theta_1 = 0, \tag{76}$$

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{|\varphi_1(\vec{\theta})|\leqslant r_3 n^{\varepsilon}} \varphi_1^p e^{-\varphi_1^2(\vec{\theta})} (e^{R(\vec{\theta}) - R(\vec{\theta}^{(1)})} - 1)\, d\theta_1 \\
&\qquad = \int\limits_{0\leqslant\varphi_1(\vec{\theta})\leqslant r_3 n^{\varepsilon}} |\varphi_1|^p e^{-\varphi_1^2(\vec{\theta})} (e^{R(\vec{\theta}) - R(\vec{\theta}^{(1)})} - 1)\, d\theta_1 \\
&\qquad - \int\limits_{r_3 n^{\varepsilon}\leqslant\varphi_1(\vec{\theta})\leqslant 0} |\varphi_1|^p e^{-\varphi_1^2(\vec{\theta})} (e^{R(\vec{\theta}) - R(\vec{\theta}^{(1)})} - 1)\, d\theta_1 \\
&= O(n^{-1+4\varepsilon}) \int\limits_{\varphi_1 \geqslant 0} |\varphi_1|^p e^{-\varphi_1^2(\vec{\theta})}\, d\theta_1 = O(n^{-1+4\varepsilon}) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varphi_1^2(\vec{\theta})}\, d\theta_1
\end{aligned} \tag{77}$$

при $\vec{\theta}^{(1)} \in U_n(r_2 n^{\varepsilon})$.

Комбинируя (70)–(73), (75)–(77), получаем (57) и (58). Лемма 3 доказана.

Доказательство леммы 4. Пусть $T(\vec{\theta})$ таково, что

$$|T(\vec{\theta})| = O\big(\|\vec{\theta}\|_{\infty}^{s}\big), \quad \frac{\partial T(\vec{\theta})}{\partial \theta_k} = O(sn^{-1-\varepsilon}) \sup_{\vec{\theta}\in\Omega} |T(\vec{\theta})|, \quad \vec{\theta} \in \Omega. \tag{78}$$

В силу (57) и (78) имеем

$$\begin{aligned}
\langle \varphi_k(\vec{\theta}) T(\vec{\theta}) \rangle_{F,\Omega} &= \langle \varphi_k(\vec{\theta}) T(\vec{\theta}^{(k)}) \rangle_{F,\Omega} + \langle \varphi_k(\vec{\theta}) (T(\vec{\theta}) - T(\vec{\theta}^{(k)})) \rangle_{F,\Omega} \\
&= \langle \varphi_k(\vec{\theta}) T(\vec{\theta}^{(k)}) \rangle_{F,\Omega} + O(sn^{-1-\varepsilon}) \big\langle \sup_{\vec{\theta}\in\Omega} |\varphi_k \theta_k T(\vec{\theta})| \big\rangle_{F,\Omega} \\
&= O(sn^{-1+4\varepsilon}) \big\langle \sup_{\vec{\theta}\in\Omega} |T(\vec{\theta})| \big\rangle_{F,\Omega} + O(\exp(-c_6 n^{2\varepsilon})) \langle 1 \rangle.
\end{aligned} \tag{79}$$

Используя (25), находим, что для $\vec{\theta} \in \Omega$

$$\frac{\partial M(\vec{\varphi}(\vec{\theta}))}{\partial \theta_k} = O(sn^{(s-1)\varepsilon}) \sum_{j: s_j \neq 0} \frac{\partial \vec{\varphi}_j(\vec{\theta})}{\partial \theta_k} = O(sn^{-1-\varepsilon}) \sup_{\vec{\theta}\in\Omega} |M(\vec{\varphi}(\vec{\theta}))|.$$

Комбинируя (54) и (79) для $T = M$, получаем (59). Лемма 4 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Исаев М. И.** Асимптотическое поведение числа эйлеровых ориентаций в графах // Мат. заметки. — 2013. — Т. 93, вып. 6. — С. 828–843.
2. **Biggs N. L., Lloyd E. K., Wilson R. J.** Graph theory. — Oxford: Clarendon Press, 1976. — P. 1736–1936.
3. **Brightwell G., Winkler P.** Note on counting Eulerian circuits // Proc. 7th ALENEX and 2nd ANALCO 2005. — P. 259–262. arXiv:cs/0405067v1.
4. **Chung F.** Spectral graph theory // CBMS Regional Conf. Ser. Math. — Vol. 92. — New York: AMS, 1997. — P. 207.
5. **Fiedler M.** Algebraic connectivity of graphs // Czech. Math. J. — 1973. — Vol. 23. — P. 298–305.
6. **Kirchhoff G.** Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung galvanischer Ströme geführt wird // Ann. Phys. Chem. — 1847. — Vol. 72. — P. 497–508. *Engl. Transl in* I.R.E. Trans. Circuit Theory, CT-5. — 1958. — Vol. 4. — P. 4–7.
7. **Las Vergnas M.** Le polynôme de Martin d'un graphe Eulérien // Ann. Discrete Math. —1983. — Vol. 17. — P. 397–411.
8. **Las Vergnas M.** An upper bound for the number of Eulerian orientations of a regular graph // Combinatorica. — 1990. — Vol. 10. — P. 61–65.
9. **Lovasz L.** Random walks on graphs: a survey // Combinatorics: Paul Erdös is eighty. — Budapest: Janos Bolyai Math. Soc., 1996. — Vol. 2, — P. 353–397.
10. **Mihail M., Winkler P.** On the number of Eulerian orientations of a graph // Algorithmica. — 1996. — Vol. 16. — P. 402—414.
11. **McKay B. D.** The asymptotic numbers of regular tournaments, Eulerian digraphs and Eulerian oriented graphs // Combinatorica. — 1990. — Vol. 10, N 4. — P. 367–377.
12. **Mohar B.** Isoperimetric numbers of graphs // J. Comb. Theory. Ser. B. — 1989. — Vol. 47, N 3. — P. 274–291.
13. **Mohar B.** The Laplacian spectrum of graphs // Graph theory, combinatorics, and applications. Vol. 2. — 1991. — P. 871–898.
14. **Schrijver A.** Bounds on the number of Eulerian orientations // Combinatorica. — 1983. — Vol. 3. — P. 375–380.

Исаев Михаил Исмаилович,
e-mail: Isaev.M.I@gmail.com
Исаева Ксения Валерьевна,
e-mail: Isaeva.K.V@gmail.com

Статья поступила
17 октября 2012 г.
Переработанный вариант —
29 марта 2013 г.