ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Ноябрь—декабрь 2013. Том 20, № 6. С. 30–39

УДК 519.1

О ФАКТОРИАЛЬНЫХ ПОДКЛАССАХ КЛАССА ГРАФОВ БЕЗ $K_{1,3}$ *)

В. А. Замараев

Аннотация. Для множества помеченных графов X через X_n обозначается множество n-вершинных графов из X. Наследственный класс X называется *не более чем факториальным*, если существуют положительные константы c и n_0 такие, что $|X_n| \leqslant n^{cn}$ для всех $n > n_0$. Гипотеза Лозина говорит о том, что наследственный класс X не более чем факториальный тогда и только тогда, когда каждый из классов $X \cap B$, $X \cap \widetilde{B}$ и $X \cap S$ не более чем факториальный, где B, $\widetilde{B}$ и S — классы двудольных, дополнительных к двудольным и расщепляемых графов соответственно. В работе данная гипотеза доказывается для подклассов класса $\mathrm{Free}(\{K_{1,3}\})$, определяемых двумя запрещёнными графами.

Ключевые слова: факториальный класс, наследственный класс графов.

Введение

В работе рассматриваются обыкновенные графы, вершины которых помечены натуральными числами. Через X_n обозначается подмножество n-вершинных графов из X. Множество графов называется *наследственным классом*, если оно замкнуто относительно изоморфизма и удаления вершины. Наследственный класс может быть задан множеством запрещённых порождённых подграфов. Пусть $\mathcal{M}$ — множество графов, тогда через $\mathrm{Free}(\mathcal{M})$ принято обозначать множество всех графов, не содержащих порождённых подграфов, изоморфных графам из $\mathcal{M}$. Общеизвестно, что множество графов X является наследственным классом тогда и только тогда, когда $X = \mathrm{Free}(\mathcal{M})$ для некоторого $\mathcal{M}$.

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 12–01–00749–а), гранта Президента РФ МК–1148.2013.1, и лаборатории алгоритмов и технологий анализа сетевых структур НИУ ВШЭ (грант правительства РФ, дог. 11.G34.31.0057).

В [1] доказано, что для любого бесконечного наследственного класса X обыкновенных графов, отличного от класса всех графов, имеет место

$$\log_2 |X_n| = \left(1 - \frac{1}{k(X)}\right)\frac{n^2}{2} + o(n^2). \tag{1}$$

где $k(X)$ — натуральное число, называемое *индексом* класса X. Множество классов с определённым значением индекса называется *слоем*. Видно, что соотношение (1) не даёт асимптотической оценки функции $\log_2 |X_n|$ для классов из *унитарного* слоя, т. е. слоя с индексом, равным 1. Вместе с тем, этому слою принадлежат многие важные с практической и теоретической точек зрения классы, например, леса, планарные графы, рёберные графы, интервальные графы, кографы (графы из класса $\mathrm{Free}(\{P_4\})$), хордальные двудольные графы (графы из класса $\mathrm{Free}(\{C_3, C_5, C_6, C_7, \ldots\})$) и др.

Для исследования асимптотического поведения функции $\log_2 |X_n|$ для классов из унитарного слоя введено понятие равновеликости [2]. Множества графов X и Y называются *равновеликими*, если существуют положительные константы c_1, c_2 и n_0 такие, что $|Y_n|^{c_1} \leqslant |X_n| \leqslant |Y_n|^{c_2}$ для всех $n > n_0$. Множество X называется *не более чем факториальным*, если существуют положительные константы c и n_0 такие, что $|X_n| \leqslant n^{cn}$ для всех $n > n_0$, и *факториальным*, если существуют положительные константы c_1, c_2 и n_0 такие, что $n^{c_1 n} \leqslant |X_n| \leqslant n^{c_2 n}$ для всех $n > n_0$. *Сверхфакториальным* называют множество графов X такое, что для любых положительных c и n_0 существует $n > n_0$, при котором $|X_n| > n^{cn}$. Нетрудно видеть, что равновеликость является отношением эквивалентности. Классы эквивалентности по отношению равновеликости на множестве наследственных классов графов называются *ярусами*.

В [9] выделены четыре самых нижних яруса унитарного слоя:

константный, состоящий из классов X таких, что $\log_2 |X_n| = \Theta(1)$ (например, класс Co полных графов константный, поскольку $|Co_n| = 1$);

полиномиальный, состоящий из классов X таких, что $\log_2 |X_n| = \Theta(\log n)$ (пример полиномиального класса — класс $E1$ графов с не более чем одним ребром, $|E1_n| = \binom{n}{2} + 1$);

экспоненциальный, состоящий из классов X таких, что $\log_2 |X_n| = \Theta(n)$ (класс CC графов с не более чем двумя компонентами, являющимися полными графами, принадлежит экспоненциальному ярусу, так как $|CC_n| = 2^{n-1}$);

факториальный, состоящий из классов X таких, что

$$\log_2 |X_n| = \Theta(n \log n).$$

(Примером факториального класса является класс лесов F. Используя формулу Кэли для числа помеченных n-вершинных деревьев [5], можно показать, что $n^{n-2} < |F_n| < n^{2n}$.)

В [9] показано, что для наследственных классов никаких промежуточных типов поведения не существует. Такой же результат независимо получен в [2]. Более того, для первых трёх ярусов в [2] получены структурные описания и в каждом из четырёх найдены все минимальные элементы. Позже аналогичные результаты получены в [4].

Факториальный ярус существенно богаче предыдущих трёх, а классы из этого яруса имеют более разнообразную структуру. Значимость факториального яруса заключается в том, что он содержит многие классы, представляющие большой интерес с теоретической и практической точек зрения. Например, он содержит все упомянутые выше классы из унитарного слоя, за исключением класса хордальных двудольных графов. При этом факториальный ярус до сих пор не имеет какой-либо полной структурной характеризации.

В качестве одного из шагов на пути к получению такой характеризации в [7] предложена следующая

Гипотеза Лозина. *Наследственный класс X не более чем факториальный тогда и только тогда, когда каждый из классов $X \cap B$, $X \cap \widetilde{B}$ и $X \cap S$ не более чем факториальный.*

Здесь B — класс двудольных графов, $\widetilde{B}$ — класс дополнительных к двудольным (кодвудольных) графов и S — класс расщепляемых графов, т. е. графов, множество вершин которых можно разбить на клику и независимое множество. Все эти три класса принадлежат слою с индексом 2, т. е. число n-вершинных графов в каждом из них равно $2^{n^2/4+o(n^2)}$ [1].

Истинность гипотезы Лозина и знание всех факториальных подклассов класса двудольных, кодвудольных и расщепляемых графов может оказать существенную помощь при ответе на вопрос, является ли заданный наследственный класс X факториальным. В [7] гипотеза Лозина доказана для классов, у которых запрещённые графы содержат не больше четырёх вершин.

Граф называется *квазирёберным*, если окрестность каждой его вершины можно разбить на две клики или, что то же самое, окрестность

каждой вершины порождает кодвудольный граф. Нетрудно видеть, что класс квазирёберных графов содержит в себе класс кодвудольных графов и поэтому является сверхфакториальным. В [10] получен следующий результат, из которого, в частности, следует справедливость гипотезы Лозина для подклассов класса Q квазирёберных графов.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{M}$ — множество графов. Класс* $\mathrm{Free}(\mathcal{M}) \cap Q$ *не более чем факториальный тогда и только тогда, когда класс* $\mathrm{Free}(\mathcal{M}) \cap \widetilde{B}$ *не более чем факториальный.*

Из результатов [8] похожая теорема следует для подклассов класса $\mathrm{Free}(\{O_r\})$, определяемых двумя запрещёнными графами.

Теорема 2. *Класс* $\mathrm{Free}(\{O_r, H\})$, $r \in \mathbb{N}$, *не более чем факториальный тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Free}(\{H\}) \cap \widetilde{B}$ *не более чем факториальный.*

В настоящей работе аналогичный результат доказывается для надкласса класса квазирёберных графов — $\mathrm{Free}(\{K_{1,3}\})$, где $K_{1,p}$ — звезда с p листьями. Как следствие доказывается справедливость гипотезы Лозина для наследственных подклассов класса $\mathrm{Free}(\{K_{1,3}\})$, определяемых двумя запрещёнными графами.

В статье используются следующие обозначения. Граф с множествами вершин V и рёбер E обозначается через $G = G(V, E)$. Через $V(G)$ и $E(G)$ обозначим множества вершин и рёбер графа G соответственно, через $\overline{G}$ — граф, дополнительный к G, через $\alpha(G)$ — число независимости графа G, т. е. число вершин в наибольшем независимом множестве. Если $U \subseteq V$, то через $G[U]$ обозначается подграф графа G, порождаемый множеством U, через $N(v)$ — множество вершин, смежных с $v \in V$, а через $N_j(v)$ — множество вершин, отстоящих от v на расстояние j. В частности, $N_1(v) = N(v)$. Пусть $N(S) = \bigcup\limits_{v \in S} N(v) \setminus S$ для множества $S \subseteq V$. Через $N_j(S)$ обозначим множество вершин, находящихся на расстоянии j от множества S, при этом по определению $N_0(S) = S$. Два непересекающихся множества вершин U и U' графа G будем называть *вполне несвязными*, если для любых вершин $x \in U$ и $y \in U'$ выполняется условие $(x, y) \notin E(G)$.

1. Предварительные сведения

1.1. Лемма о локально ограниченных покрытиях. При доказательстве основного результата используется лемма о локально ограниченных покрытиях, которая предложена в [8] как одно из средств исследования факториального яруса. Для того чтобы сформулировать эту лемму, предварительно введём некоторые определения.

Под *объединением* двух графов $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ будем понимать граф $H(V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$. Пусть G — граф. Множество графов $\{H_1, \ldots, H_k\}$, объединение которых совпадает с G, будем называть *покрытием* графа G. Наибольшее число графов покрытия, которым одновременно принадлежит некоторая вершина покрываемого графа, назовём *толщиной покрытия*.

Лемма 1 (о локально ограниченных покрытиях)**.** *Пусть X — множество графов и $m \in \mathbb{N}$ — некоторая константа. Если всякий граф $G \in X$ можно покрыть графами из не более чем факториального множества Y так, что толщина покрытия не превосходит m, то X — не более чем факториальное множество.*

Следствие 1. *Пусть X — множество графов, а X' — множество связных графов из X. Если X' не более чем факториальное, то X также не более чем факториальное.*

1.2. Структура графов без $K_{1,3}$. Доказательство главного результата работы основано на структурной характеризации графов из класса $\mathrm{Free}(\{K_{1,3}\})$ [6]. Чтобы сформулировать теорему, описывающую данную характеризацию, приведём несколько определений. Клика K связного графа G называется *дистанционно симплициальной*, если $\alpha(N_j(K)) \leqslant 1$ для любого j. При этом сам граф G называется *дистанционно симплициальным относительно K*. Связный граф G будем называть *дистанционно симплициальным*, если в нём существует дистанционно симплициальная клика. Граф G, в котором выделена одна или две, необязательно различные, клики, называется *полосой* и обозначается через $(G, \mathcal{A})$, где $\mathcal{A}$ — мультимножество выделенных клик. Полоса $(G, \mathcal{A})$ называется 1-*полосой*, если $\mathcal{A}$ состоит из одной клики, и 2-*полосой*, если из двух клик, которые, вообще говоря, могут совпадать. *Концами* полосы $(G, \mathcal{A})$ называются элементы мультимножества $\mathcal{A}$, а *ядром* $C(G, \mathcal{A})$ этой полосы — множество вершин графа G, которые не принадлежат ни одному из её концов.

Пусть $\mathcal{F} = \{(G^1, \mathcal{A}^1), \ldots, (G^k, \mathcal{A}^k)\}$ — семейство вершинно непересекающихся полос, а $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_m\}$ — разбиение мультимножества $\bigcup\limits_{j=1}^{k} \mathcal{A}^j$. *Композицией семейства полос $\mathcal{F}$ относительно разбиения $\mathcal{P}$* называется граф G такой, что

(i) $V(G) = \bigcup\limits_{j=1}^{k} V(G^j)$;

(ii) две вершины $u, v \in V(G)$ смежны тогда и только тогда, когда

либо $u, v \in V(G^j)$ и $(u, v) \in E(G^j)$ для некоторого $j \in \{1, \ldots, k\}$, либо существуют концы полос $A \in \mathcal{A}^i$ и $A' \in \mathcal{A}^j$ для некоторых $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$ такие, что $u \in A$, $v \in A'$ и A, A' принадлежат одному классу разбиения $\mathcal{P}$.

Для любого класса $P \in \mathcal{P}$ множество $\bigcup\limits_{A \in P} A$ является кликой графа и называется *кликой разбиения*.

Для лучшего понимания композиции G семейства полос $\{(G^1, \mathcal{A}^1), \ldots, (G^k, \mathcal{A}^k)\}$ относительно разбиения $\mathcal{P}$ отметим некоторые очевидные свойства.

Свойство 1. *Ядро $C(G^j, \mathcal{A}^j)$ полосы $(G^j, \mathcal{A}^j)$ вполне несвязно с $V(G) \setminus V(G^j)$ и $G[C(G^j, \mathcal{A}^j) \cup A] = G^j[C(G^j, \mathcal{A}^j) \cup A]$ для каждого конца $A \in \mathcal{A}^j$, $j \in \{1, \ldots, k\}$.*

Свойство 2. *Для любого $j \in \{1, \ldots, k\}$, если $(G^j, \mathcal{A}^j)$ — 1-полоса или 2-полоса с концами в различных классах разбиения $\mathcal{P}$, то $G[V(G^j)] = G^j$, в противном случае $G[V(G^j)]$ получается из G^j добавлением всевозможных рёбер, соединяющих вершины из разных концов полосы $(G^j, \mathcal{A}^j)$.*

Свойство 3. *Любое ребро между вершинами полос $(G^i, \mathcal{A}^i)$ и $(G^j, \mathcal{A}^j)$, $i \neq j$, соединяет вершины из их концов и порождается некоторой кликой разбиения.*

Следующая теорема описывает структуру связных неквазирёберных графов из класса $\mathrm{Free}(\{K_{1,3}\})$ [6].

Теорема 3. *Пусть $G(V, E)$ — связный неквазирёберный граф из класса $\mathrm{Free}(\{K_{1,3}\})$. Тогда*

(a) *либо $\alpha(G) \leqslant 3$;*

(b) *либо G является композицией семейства $k+t \leqslant |V|$ полос $\{(H^1, \mathcal{A}^1), \ldots, (H^k, \mathcal{A}^k), (F^1, \mathcal{B}^1), \ldots, (F^t, \mathcal{B}^t)\}$ относительно разбиения $\mathcal{P}$, причём полосы делятся на два типа*

(b1) *граф $H^i \in \mathrm{Free}(\{K_{1,3}\})$ и $\alpha(H^i) \leqslant 3$, $i \in \{1, \ldots, k\}$;*

(b2) *граф F^j — квазирёберный и дистанционно симплициальный относительно каждого из концов $B \in \mathcal{B}^j$, $j \in \{1, \ldots, t\}$. При этом если $\mathcal{B}^j = \{B_1, B_2\}$, то либо $B_1 = B_2 = V(F^j)$, либо $B_1 \cap B_2 = \varnothing$ и существует l такое, что $B_2 \subseteq N_{l-1}(B_1) \cup N_l(B_1)$ и $N_{l+1}(B_1) = \varnothing$.*

Не уменьшая общности, будем считать, что число независимости каждого из графов $F^1, \ldots, F^t$ в теореме 3 не меньше 4. Действительно, если для какого-либо графа F^i это не так, т. е. $\alpha(F^i) \leqslant 3$, то полосу $(F^i, \mathcal{A}^i)$ можно отнести к первому типу, поскольку $F^i \in Q \subset \mathrm{Free}(\{K_{1,3}\})$. Поэтому для полосы второго типа $(F, \mathcal{B})$, где $\mathcal{B} = \{B_1, B_2\}$ и $B_1 \cap B_2 \neq \varnothing$,

множество $N_1(B_1)$ не пересекается с B_2, иначе согласно теореме 3

$$B_2 \subseteq N_1(B_1) \cup N_2(B_1), \quad N_3(B_1) = \varnothing$$

и $V(F)$ разбивается на 3 клики B_1, $N_1(B_1)$, $N_2(B_1)$, что противоречит условию $\alpha(F) \geqslant 4$. Отсюда следует, что $G[N_m(B_1) \cup N_{m+1}(B_1)] = F[N_m(B_1) \cup N_{m+1}(B_1)]$ для любого $m \in \{0, \dots, s-1\}$, где s — максимальный индекс, при котором $N_s(B_1)$ в графе F непусто.

2. Основной результат

Обозначим через $DS(\mathcal{M})$ множество таких дистанционно симплициальных графов G, что для некоторой дистанционно симплициальной клики K граф $G[N_i(K) \cup N_{i+1}(K)]$ не содержит порождённых подграфов из $\mathcal{M}$ для любого $i \in \{0, \dots, s-1\}$, где s — максимальный индекс, при котором $N_s(K) \neq \varnothing$.

Лемма 2. *Пусть $\mathcal{M}$ — множество графов такое, что* $\mathrm{Free}(\mathcal{M}) \cap \widetilde{B}$ *— не более чем факториальный класс. Тогда $DS(\mathcal{M})$ не более чем факториально.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный n-вершинный граф G из множества $DS(\mathcal{M})$. Выберем симплициальную клику K графа G такую, что графы из множества

$$\{G[N_i(K) \cup N_{i+1}(K)] \mid i = \overline{0, s-1},\ N_s(K) \neq \varnothing,\ N_{s+1}(K) = \varnothing\}, \qquad (2)$$

не содержат порождённых подграфов из $\mathcal{M}$. Из определения дистанционно симплициального графа следует, что множество (2) является покрытием графа G и толщина этого покрытия не превосходит двух. При этом очевидно, что каждый граф из (2) кодвудольный и поэтому принадлежит не более чем факториальному классу $\mathrm{Free}(\mathcal{M}) \cap \widetilde{B}$.

Из леммы о локально ограниченных покрытиях и произвольности выбора G следует утверждение леммы. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть X — не более чем факториальное множество графов. Множество Y всевозможных композиций полос $(G, \mathcal{A})$ таких, что $G[C(G, \mathcal{A}) \cup A] \in X$ для каждого конца $A \in \mathcal{A}$, не более чем факториально.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную композицию $H \in Y$ семейства полос $\{(G^1, \mathcal{A}^1), \dots, (G^k, \mathcal{A}^k)\}$ (удовлетворяющих условиям леммы) относительно разбиения $\{P_1, \dots, P_m\}$. Множество

$$\{K^j \mid j = 1, \dots, m\} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k} \{H[C(G^i, \mathcal{A}^i) \cup A] \mid A \in \mathcal{A}^i\} \right),$$

где K^j — клика разбиения, соответствующая классу P_j, является покрытием графа H, и толщина этого покрытия не превосходит 3. Из свойства 1 следует, что каждый граф покрытия принадлежит не более чем факториальному множеству $X \cup Co$.

Утверждение леммы следует из произвольности выбора H и леммы о локально ограниченных покрытиях. Лемма 3 доказана.

Перейдём теперь к формулировке и доказательству основного результата.

Теорема 4. *Класс* $\mathrm{Free}(\{K_{1,3}, H\})$ *не более чем факториальный тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Free}(\{H\}) \cap \widetilde{B}$ *не более чем факториальный.*

Доказательство. Необходимость непосредственно вытекает из включения $\widetilde{B} \subset \mathrm{Free}(\{K_{1,3}\})$. Для доказательства достаточности предположим, что $\mathrm{Free}(\{H\}) \cap \widetilde{B}$ не более чем факториальный. Следствие 1 позволяет ограничиться рассмотрением только связных графов из класса $\mathrm{Free}(\{K_{1,3}, H\})$, каждый из которых согласно теореме 3 находится в одном из множеств $\mathrm{Free}(\{H\}) \cap Q$, $\mathrm{Free}(\{K_{1,3}, H, O_4\})$ или множестве композиций полос из $\mathrm{Free}(\{K_{1,3}, O_4\}) \cup DS(\{H\})$. Все эти множества, а следовательно, и их объединение, являются не более чем факториальными: первое — по теореме 1, факториальная оценка для второго следует из факториальности класса $\mathrm{Free}(\{H, O_4\})$ (теорема 2). Для оценки третьего множества заметим, что согласно свойству 1 для каждой полосы $(G^j, \mathcal{A}^j)$ композиции $G \in \mathrm{Free}(\{K_{1,3}, H\})$ граф $G^j[C(G^j, \mathcal{A}^j) \cup A]$ не содержит H в качестве порождённого подграфа, следовательно, принадлежит множеству $\mathrm{Free}(\{K_{1,3}, H, O_4\}) \cup DS(\{H\})$. Из теоремы 2 и леммы 2 следует, что последнее множество не более чем факториально. Этот факт вместе с леммой 3 обеспечивает верхнюю факториальную оценку для третьего множества.

Таким образом, класс $\mathrm{Free}(\{K_{1,3}\}, H)$ не более чем факториальный. Теорема 4 доказана.

Следствие 2 (гипотеза Лозина для классов $\mathrm{Free}(\{K_{1,3}, H\})$). *Пусть H — некоторый граф. Класс $X = \mathrm{Free}(\{K_{1,3}, H\})$ не более чем факториальный тогда и только тогда, когда каждый из классов $X \cap B$, $X \cap \widetilde{B}$ и $X \cap S$ не более чем факториальный.*

Доказательство. Если X — не более чем факториальный класс, то, очевидно, каждый его подкласс $X \cap B$, $X \cap \widetilde{B}$ и $X \cap S$ не более чем факториальный.

Доказательство утверждения в обратную сторону следует из теоремы 4, если заметить, что $\mathrm{Free}(\{K_{1,3}, H\}) \cap \widetilde{B} = \mathrm{Free}(\{H\}) \cap \widetilde{B}$, поскольку $K_{1,3}$ — некодвудольный. Следствие 2 доказано.

Помимо этого следствия теорема 4 в совокупности с результатом из [8] позволяет охарактеризовать почти все факториальные классы с двумя запрещёнными графами, один из которых $K_{1,3}$.

Обозначим через $\Phi_{p,q}$ граф, получаемый из двух звёзд $K_{1,p}$ и $K_{1,q}$ соединением их центральных вершин простым путём длины 2, через $T_{1,2,3}$ — граф, получаемый из звезды $K_{1,3}$ одиночным подразбиением одного из её рёбер и двойным подразбиением другого. Через P_7, как обычно, обозначается семивершинный путь.

Теорема 5 [8]. *Если H не является порождённым подграфом какого-либо из графов $T_{1,2,3}, \Phi_{p,q} + K_1$ или P_7, то класс $\mathrm{Free}(\{H\}) \cap B$ сверхфакториальный. Если H — порождённый подграф графа $T_{1,2,3}$ или $\Phi_{p,q} + K_1$ для некоторых натуральных p, q, то $\mathrm{Free}(\{H\}) \cap B$ не более чем факториальный.*

Если X — наследственный класс, то через $\widetilde{X}$ будем обозначать множество, состоящее из всех графов, дополнительных к графам из X. Отметим два очевидных факта: (i) $|\widetilde{X}_n| = |X_n|$ для любого натурального n; (ii) если $X = \mathrm{Free}(\mathcal{M})$, то $\widetilde{X} = \mathrm{Free}(\widetilde{\mathcal{M}})$, где $\widetilde{\mathcal{M}}$ — множество графов, дополнительных к графам из $\mathcal{M}$.

С учётом этих замечаний из теоремы 4 и теоремы 5 следует

Теорема 6. *Если H — непорождённый подграф какого-либо из графов $\overline{T_{1,2,3}}, \overline{\Phi_{p,q} + K_1}$ и $\overline{P_7}$, то класс $\mathrm{Free}(\{K_{1,3}, H\})$ сверхфакториальный. Если H — порождённый подграф графа $\overline{T_{1,2,3}}$ или $\overline{\Phi_{p,q} + K_1}$ для некоторых натуральных p, q, то $\mathrm{Free}(\{K_{1,3}, H\})$ не более чем факториальный.*

Единственным подклассом класса $\mathrm{Free}(\{K_{1,3}\})$ с двумя запрещёнными графами, для которого вопрос о принадлежности факториальному ярусу остаётся открытым, является класс $\mathrm{Free}(\{K_{1,3}, \overline{P_7}\})$. Согласно теореме 4 для решения этого вопроса достаточно ограничиться рассмотрением более узкого класса $\mathrm{Free}(\{\overline{P_7}\}) \cap \widetilde{B}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алексеев В. Е.** Область значений энтропии наследственных классов графов // Дискрет. математика. — 1992. — Т. 4, № 2. — С. 148–157.
2. **Алексеев В. Е.** О нижних ярусах решётки наследственных классов графов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 1997. — Т. 4, № 1. — С. 3–12.

3. **Замараев В. А.** Оценка числа графов в некоторых наследственных классах // Дискрет. математика. — 2011. — Т. 23, № 3. — С. 57–62.
4. **Balogh J., Bollobás B., Weinreich D.** The speed of hereditary properties of graphs // J. Comb. Theory. Ser. B. — 2000. — Vol. 79. — P. 131–156.
5. **Cayley A.** A theorem on trees // Quart. J. Math. — 1889. — Vol. 23. — P. 376–378.
6. **Faenza Y., Oriolo G., Stauffer G.** An algorithmic decomposition of claw-free graphs leading to an $O(n^3)$-algorithm for the weighted stable set problem // Proc. 22nd ACM-SIAM Symp. Discrete Algorithms, 2011 (San Francisco, January 23–25, 2011). — Philadelphia: SIAM, 2011. — P. 630–646.
7. **Lozin V. V., Mayhill C., Zamaraev V.** A note on the speed of hereditary graph properties // Electron. J. Comb. — 2011. — Vol. 18, N 1. — P. 1–14.
8. **Lozin V. V., Mayhill C., Zamaraev V.** Locally bounded coverings and factorial properties of graphs // Eur. J. Comb. — 2012. — Vol. 33, N 4. — P. 534–543.
9. **Scheinerman E. R., Zito J.** On the size of hereditary classes of graphs // J. Comb. Theory. Ser. B. — 1994. — Vol. 61. — P. 16–39.
10. **Zamaraev V.** Almost all factorial subclasses of quasi-line graphs with respect to one forbidden subgraph // Moscow J. Comb. Number Theory. — 2011. — Vol. 1, N 3. — P. 277–286.

Замараев Виктор Андреевич,
e-mail: viktor.zamaraev@gmail.com

Статья поступила
23 октября 2012 г.

Переработанный вариант —
9 марта 2013 г.