ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Ноябрь—декабрь 2013. Том 20, № 6. С. 77–94

УДК 519.714.7

О МЕРАХ СЛОЖНОСТИ КОМПЛЕКСОВ ГРАНЕЙ В ЕДИНИЧНОМ КУБЕ *)

И. П. Чухров

Аннотация. Рассматривается проблема доказательства минимальности комплексов граней в единичном кубе. Сформулированы достаточные условия, которые позволяют доказывать минимальность комплексов граней на основе порядковых свойств функционала меры сложности и структурных свойств булевых функций. Это позволило расширить множество комплексов граней, для которых доказана минимальность относительно мер сложности, удовлетворяющих определённым свойствам. Доказано строгое включение для множеств комплексов граней: ядровых, минимальных для любой меры сложности и минимальных для любой меры сложности, инвариантной относительно замены граней изоморфными гранями.

Ключевые слова: грань, комплекс граней в единичном кубе, булева функция, мера сложности, минимальный комплекс граней.

Введение

Исследование мер сложности комплексов граней в единичном кубе непосредственно связано с задачей минимизации булевых функций в классе дизъюнктивных нормальных форм (далее ДНФ), т. е. построения для булевой функции её минимальной ДНФ относительно некоторой меры сложности [1, 4, 6]. Известные алгоритмы минимизации функций в качестве одного из этапов содержат перебор по определённой стратегии некоторого множества ДНФ и выбор ДНФ с минимальной сложностью из него. Приемлемое по трудоёмкости точное решение задачи минимизации возможно в тех случаях, когда удаётся обосновать минимальность выбранной ДНФ, т. е. доказать, что сложность любой эквивалентной ДНФ не может быть меньше. Эффективно проверяемый критерий минимальности ДНФ позволяет сократить перебор при поиске минимальной ДНФ булевой функции.

*) Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 13–01–00958).

При изложении будем использовать понятия и обозначения, связанные с гранями и множествами вершин единичного n-мерного куба B^n, в следующей геометрической интерпретации.

Гранью единичного куба B^n называется множество вершин

$$B^{n,\sigma_1,\ldots,\sigma_k}_{i_1,\ldots,i_k} = \bigl\{\widetilde{x} = (x_1,\ldots,x_n) \in B^n \mid x_{i_1} = \sigma_1,\ldots,x_{i_k} = \sigma_k\bigr\},$$

где $\sigma_s \in \{0,1\}$ для $s = 1,\ldots,k$. Множество индексов $\{i_1,\ldots,i_k\}$ называется *направлением*, число k — *рангом* и число $n-k$ — *размерностью грани*.

Комплексом граней называется неупорядоченный набор граней единичного куба. Множество вершин куба, содержащихся в гранях комплекса M, обозначается через N_M. Комплексу граней M однозначно соответствует функция $f \in P_n$ такая, что $N_M = N_f$, где N_f — множество вершин x куба B^n, в которых $f(x) = 1$. Любой комплекс граней M, для которого $N_M = N_f$, называется *комплексом граней функции* f.

Два комплекса граней называются *эквивалентными*, если они содержат одно подмножество вершин единичного куба B^n, т. е. являются комплексами граней одной функции.

Представление комплекса граней M в виде $M = \bigcup\limits_{j=1}^{J} M_j$ называется *прямым объединением комплексов граней*, если любая грань $g \in M$ содержится в единственном комплексе M_j для некоторого $j \in \{1,\ldots,J\}$.

Для множества вершин $Q \subseteq B^n$ любая грань $I \subseteq Q$ называется *допустимой*. Допустимая грань I для множества $Q \subseteq B^n$ называется *максимальной*, если не существует грани I' такой, что $I \subset I' \subseteq Q$.

Комплекс граней M называется *неприводимым*, если после удаления из него любой грани получается комплекс граней, не эквивалентный M. В неприводимом комплексе каждая грань содержит хотя бы одну вершину, которая не содержится в других гранях комплекса. Такая вершина называется *собственной вершиной грани* в неприводимом комплексе.

Комплекс граней M называется *тупиковым*, если он неприводимый и все грани максимальны для множества N_M.

Грань I называется *ядровой* для множества вершин $Q \subset B^n$, если она максимальна для множества Q и существует вершина $\widetilde{\alpha} \in I$, не принадлежащая никакой другой максимальной для Q грани. Вершины ядровой грани I, которые не покрываются никакими другими максимальными для множества Q гранями, называются *собственными вершинами ядровой грани* I. Вершины ядровой грани, которые не являются собственными для ядровой грани, называются *регулярными*.

Комплекс граней M называется *ядровым*, если любая грань комплекса M ядровая для множества N_M.

Обозначим через π^n множество перестановок координат в единичном кубе B^n. Для перестановки $\pi \in \pi^n$ и грани $I = B^{n,\sigma_1,\ldots,\sigma_k}_{i_1,\ldots,i_k}$ обозначим через $\pi(I) = B^{n,\sigma_1,\ldots,\sigma_k}_{\pi(i_1),\ldots,\pi(i_k)}$ грань, которая получается из грани I перестановкой координат π, а через $\pi(M) = \{\pi(I_s),\ s = 1,\ldots,l\}$ — комплекс граней, который получается из комплекса $M = \{I_s,\ s = 1,\ldots,l\}$ перестановкой координат π во всех гранях комплекса.

Комплексы граней называются *изоморфными* в кубе B^n, если один комплекс может быть получен из другого перестановкой координат. При этом грани изоморфны только тогда, когда они имеют одинаковые размерность и число координат направления, для которых в вершинах грани значение равно 0 (равно 1).

Изоморфизм аналитической и геометрической моделей основан на изоморфизме элементарных конъюнкций и граней единичного куба B^n. Конъюнкция $K = x^{\sigma_1}_{i_1} \cdot \ldots \cdot x^{\sigma_r}_{i_r}$ изоморфна грани $B^n_K = B^{n,\sigma_1,\ldots,\sigma_r}_{i_1,\ldots,i_r}$, ДНФ $K_1 \vee \ldots \vee K_s$ — комплексу граней $\left\{B^n_{K_j},\ j = 1,\ldots,s\right\}$ соответственно.

Определение 1. Функционал $\mathcal{L}$, определённый на множестве всех комплексов граней (ДНФ), является *мерой сложности*, если он удовлетворяет аксиомам [10, с. 298]

(i) неотрицательности: $\mathcal{L}(M) \geqslant 0$ для любого комплекса M;

(ii) монотонности: $\mathcal{L}(M \cup \{I\}) \geqslant \mathcal{L}(M \cup \{I'\})$ для любых комплекса M и грани I при условии $I \subset I'$;

(iii) выпуклости: $\mathcal{L}(M) \geqslant \mathcal{L}(M_1) + \mathcal{L}(M_2)$ для любого представления комплекса M в виде прямого объединения комплексов M_1 и M_2;

(iv) инвариантности относительно изоморфизма: $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(\pi(M))$ для любого комплекса M и любой перестановки координат π.

В силу аксиом выпуклости и неотрицательности мера сложности комплекса граней не увеличивается при удалении из него грани.

Примерами мер сложности могут служить следующие функционалы (в терминах ДНФ): $\mathcal{L}_\vee$ — число дизъюнкций, $\mathcal{L}_\&$ — число конъюнкций или $\mathcal{L}_\neg$ — число отрицаний в ДНФ. Мера сложности, равная числу граней в комплексе M, т. е. число импликант в ДНФ (функционал $\mathcal{L}_\vee + 1$), называется *длиной* и обозначается через $l(M)$. Мера сложности, равная сумме рангов граней в комплексе M, т. е. число переменных в ДНФ (функционал $\mathcal{L}_\vee + \mathcal{L}_\& + 1$), называется *сложностью* и обозначается через $L(M)$. *Линейной сложностью* называется мера сложности, которая соответствует функционалу $L_{\alpha,\beta} = \alpha \cdot \mathcal{L}_\& + \beta \cdot \mathcal{L}_\vee$, где $\alpha + \beta > 0$, $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$.

Определение 2. Комплекс граней называется $\mathcal{L}$-*минимальным*, если он имеет наименьшую меру сложности $\mathcal{L}$ среди всех эквивалентных комплексов граней. *Кратчайшим* называется l-минимальный комплекс, а *минимальным* — L-минимальный комплекс.

Определение 3. Комплекс граней M для произвольного класса мер сложности $\mathbb{C}$ называется $\mathbb{C}$-*минимальным комплексом* (минимальным относительно класса мер сложности $\mathbb{C}$), если он является $\mathcal{L}$-минимальным для любой меры сложности из класса $\mathbb{C}$.

Определение 4. Величина $\mathcal{L}(Q) = \min\limits_{M|N_M=Q} \mathcal{L}(M)$ называется $\mathcal{L}$-*сложностью множества* $Q \subset B^n$ при покрытии его комплексом граней. Для булевой функции f такой, что $N_f = Q$, эта величина называется $\mathcal{L}$-*сложностью функции* f при реализации в классе ДНФ и обозначается через $\mathcal{L}(f)$.

Множества $\mathcal{L}$- и $\mathbb{C}$-минимальных комплексов граней для меры сложности $\mathcal{L}$ и класса мер сложности $\mathbb{C}$ булевой функции f обозначим через $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}(f)$ и $\mathcal{M}_{\cap\mathbb{C}}(f)$ соответственно. Число функций в этих множествах обозначим через $\mu_{\mathcal{L}}(f) = |\mathcal{M}_{\mathcal{L}}(f)|$ и $\mu_{\cap\mathbb{C}}(f) = |\mathcal{M}_{\cap\mathbb{C}}(f)|$. Максимальные значения этих параметров на множестве булевых функций n переменных обозначим через $\mu_{\mathcal{L}}(n)$ и $\mu_{\cap\mathbb{C}}(n)$.

Кратчайшие и минимальные комплексы граней известны для следующих случаев: любые ядровые комплексы, не ядровые комплексы для симметрических, цепных и циклических функций [4, с. 95–97], не ядровые комплексы, получаемые конструированием из ядровых и не ядровых минимальных комплексов. Существенным при таких построениях является использование суммирования кратчайших и минимальных комплексов для компонент связности.

Будем говорить, что $\mathcal{L}$-минимальные комплексы граней M_1 и M_2, для которых подмножества N_{M_1} и N_{M_2} являются компонентами связности в единичном кубе, обладают *свойством суммируемости для компонент связности*, если $M_1 \cup M_2$ является $\mathcal{L}$-минимальным комплексом.

Кратчайшие и минимальные комплексы обладают свойством суммируемости для компонент связности в силу аддитивности функционалов сложности l и L.

Соотношения между множествами минимальных ДНФ булевой функции для мер сложности l, L, $L_{\alpha,\beta}$ изучались в работах [2, 3, 5]. Показано, что для множеств минимальных ДНФ булевой функции относительно этих мер сложности осуществимы все логические возможности: пересечение множеств может быть пустым, совпадать с одним из множеств или обоими или не совпадать ни с одним из них.

Обзор известных оценок для числа минимальных комплексов в единичном кубе представлен в [8, 9]. Отметим, что улучшение нижних оценок достигнуто за счёт использования для сравнения сложности комплексов граней свойств функционала меры сложности, определяемых дополнительно к аксиомам. Это позволило расширить множество комплексов граней, для которых доказана минимальность относительно меры сложности, удовлетворяющей определённым свойствам.

1. Специальные классы мер сложности

Определение 5. Комплексы граней называются *π-изоморфными* в кубе B^n, если один комплекс может быть получен из другого заменой граней изоморфными.

Обозначим через $\mathcal{G}^n_{m-k,m}$ множество всех k-мерных граней с минимальной вершиной в слое B^n_{m-k} и максимальной вершиной в слое B^n_m единичного куба B^n, где $0 \leqslant m-k \leqslant m \leqslant n$.

Если для изоморфных комплексов граней M_1 и M_2 в кубе B^n существует перестановка координат $\pi \in \pi^n$ такая, что $M_2 = \pi(M_1)$, то для π-изоморфных комплексов граней M_1 и M_2 в кубе B^n существует набор перестановок координат $\{\pi_j \in \pi^n,\ j = 1, \ldots, J\}$, где $J = |M_1| = |M_2|$ такой, что $M_2 = \{\pi_j(I_j),\ I_j \in M_1,\ j = 1, \ldots, J\}$.

Очевидно, что два комплекса π-изоморфны тогда и только тогда, когда они содержат одинаковое число граней из множества $\mathcal{G}^n_{m-k,m}$ для любых m и k, где $0 \leqslant k \leqslant m \leqslant n$.

Определение 6. Мера сложности $\mathcal{L}$ удовлетворяет *усиленному свойству инвариантности относительно изоморфизма*, если π-изоморфные комплексы граней имеют одинаковую $\mathcal{L}$-сложность.

Определение 7. Мера сложности $\mathcal{L}$ удовлетворяет *свойству строгой монотонности относительно длины*, если $\mathcal{L}$-сложность комплекса граней уменьшается при удалении произвольной грани.

Определение 8. Мера сложности $\mathcal{L}$ удовлетворяет *свойству строгой монотонности относительно сложности*, если $\mathcal{L}$-сложность комплекса граней уменьшается при уменьшении ранга или удалении произвольной грани.

Определение 9. Мера сложности $\mathcal{L}$ удовлетворяет *свойству аддитивности*, если условие в аксиоме выпуклости имеет вид $\mathcal{L}(M_1 \cup M_2) = \mathcal{L}(M_1) + \mathcal{L}(M_2)$ для любого представления комплекса граней M в виде прямого объединения комплексов $M = M_1 \cup M_2$.

Множество всех функционалов, которые являются мерами сложности на множестве комплексов граней, обозначим через Λ. Для классов мер сложности, т. е. подмножеств Λ, удовлетворяющих определённым свойствам, введём следующие обозначения: Λ_π — класс мер сложности, удовлетворяющий усиленному свойству инвариантности относительно изоморфизма, Λ_l — свойству строгой монотонности относительно длины, Λ_L — свойству строгой монотонности относительно сложности, Λ_+ — свойству аддитивности.

Используемые при минимизации функционалы принадлежат классам $\Lambda_\pi \cap \Lambda_l$ или $\Lambda_\pi \cap \Lambda_L$, при этом $l \in \Lambda_l \cap \Lambda_\pi \cap \Lambda_+$ и $L \in \Lambda_L \cap \Lambda_\pi \cap \Lambda_+$.

Непосредственно из приведённых определений классов мер сложности вытекают следующие свойства.

Любой $\mathcal{L}$-минимальный комплекс граней для меры сложности $\mathcal{L}$ является (a) неприводимым, если $\mathcal{L} \in \Lambda_l$, (b) тупиковым, если $\mathcal{L} \in \Lambda_L$.

(c) Для меры сложности $\mathcal{L} \in \Lambda_+$ любые $\mathcal{L}$-минимальные комплексы граней обладают свойством суммируемости для компонент связности, так как $\mathcal{L}$-сложность комплекса равна сумме $\mathcal{L}$-сложностей граней.

Предположение, что $\mathcal{L}$-минимальный комплекс граней M может не являться неприводимым, приводит к существованию комплексов и граней нулевой $\mathcal{L}$-сложности. Пусть $\mathcal{L}$-минимальный комплекс M не является неприводимым, т. е. $M = M_1 \cup M_0$, где комплекс M_1 эквивалентен M. В силу аксиом неотрицательности и выпуклости имеем

$$\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(M_1 \cup M_0) \geqslant \mathcal{L}(M_1) + \mathcal{L}(M_0) \geqslant 0.$$

Так как M и M_1 — эквивалентные $\mathcal{L}$-минимальные комплексы, имеем $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(M_1)$, следовательно, $\mathcal{L}(M_0) = 0$.

Все комплексы и грани, которые могут быть получены из комплекса нулевой $\mathcal{L}$-сложности уменьшением ранга граней, удалением граней и перестановкой координат, т. е. изоморфные, имеют нулевую $\mathcal{L}$-сложность. При этом для меры сложности $\mathcal{L} \in \Lambda_\pi$ все π-изоморфные комплексы для комплекса нулевой $\mathcal{L}$-сложности также будут иметь нулевую $\mathcal{L}$-сложность.

Существование комплекса из двух и более граней нулевой $\mathcal{L}$-сложности означает, что $\mathcal{L} \notin \Lambda_l$, так как при удалении грани из комплекса сложность не изменяется и остаётся равной нулю.

С другой стороны, если $\mathcal{L}$-сложность любой грани больше нуля, то $\mathcal{L} \in \Lambda_l$ и $\mathcal{L}$-минимальный комплекс неприводим. Действительно, если $M = M_1 \cup \{I\}$ и M эквивалентен M_1, то

$$\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(M_1 \cup \{I\}) \geqslant \mathcal{L}(M_1) + \mathcal{L}(\{I\}) > \mathcal{L}(M_1)$$

при $\mathcal{L}(\{I\}) > 0$, т. е. комплекс M не может быть $\mathcal{L}$-минимальным.

Любой комплекс граней нулевой $\mathcal{L}$-сложности является $\mathcal{L}$-минимальным в силу аксиомы неотрицательности. Существование комплексов нулевой $\mathcal{L}$-сложности порождает класс функций нулевой $\mathcal{L}$-сложности. Например, класс монотонных функций относительно меры сложности $\mathcal{L}_\neg$ является классом функций нулевой $\mathcal{L}_\neg$-сложности.

Отметим, что сравнение комплексов граней с использование порядковых свойств меры сложности выполняется в терминах неразличимости и строгого предпочтения, т. е. сложность одинаковая или меньше. При этом числовое значение функционала сложности сравниваемых комплексов (насколько меньше) является не существенным для обоснования минимальности или не минимальности комплекса граней.

Например, комплекс граней $M = \left\{B^3_{x_1\bar{x}_3}, B^3_{x_1x_2}, B^3_{\bar{x}_1x_3}, B^3_{\bar{x}_1\bar{x}_2}\right\}$ в кубе B^3, где $N_M = B^3 \setminus \{(0,1,0), (1,0,1)\}$, имеет эквивалентный π-изоморфный $M_1 = \left\{B^3_{x_1\bar{x}_3}, B^3_{x_2x_3}, B^3_{\bar{x}_1x_3}, B^3_{\bar{x}_1\bar{x}_2}\right\}$, который получается заменой грани $B^3_{x_1x_2}$ на изоморфную $B^3_{x_2x_3}$. Из M_1 удалением грани $B^3_{\bar{x}_1x_3}$ можно получить эквивалентный комплекс граней $M_2 = \left\{B^3_{x_1\bar{x}_3}, B^3_{x_2x_3}, B^3_{\bar{x}_1\bar{x}_2}\right\}$. Поэтому для меры сложности $\mathcal{L} \in \Lambda_\pi \cap \Lambda_l$ справедливо строгое неравенство $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(M_1) > \mathcal{L}(M_2)$, т. е. комплекс M не $\mathcal{L}$-минимален.

Локальные алгоритмы, использующие информацию окрестности произвольного фиксированного порядка, не могут решить задачу минимизации булевых функций в классе ДНФ в силу отсутствия локального критерия вхождения конъюнкции в ДНФ типа «сумма минимальных» [4, с. 95]. Поэтому для обоснования минимальности комплекса граней требуется использование не локальных, а глобальных структурных свойств комплексов граней.

Определение 10. Подмножество вершин называется *протыкающим для комплекса граней*, если в каждой грани комплекса содержится хотя бы одна вершина этого подмножества.

Пусть M — неприводимый комплекс граней. Введём следующие обозначения:

C_M — подмножество собственных вершин граней M, которое содержит по одной произвольной, если их несколько, собственной вершине для каждой грани комплекса,

$I_{M,\widetilde{x}}$ — грань M, содержащая собственную вершину $\widetilde{x} \in C_M$.

Подмножество вершин C_M является протыкающим для граней неприводимого (тупикового, ядрового) комплекса граней M.

Определение 11. Для множества вершин $Q \subseteq B^n$ подмножество вершин $X \subseteq Q$ называется *интервально независимым* для Q множеством вершин, если любая допустимая для множества Q грань содержит не более одной вершины из X. Для комплекса граней M множество вершин называется *интервально независимым*, если оно является интервально независимым для множества N_M.

Для соседних вершин $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in Q$ одномерная грань, содержащая $\widetilde{x}$ и $\widetilde{y}$, допустима для множества Q. Поэтому, во-первых, для произвольного множества $Q \subset B^n$ интервально независимое множество вершин состоит из изолированных вершин, т. е. в нём нет пар соседних вершин, во-вторых, мощность интервально независимого множества вершин для любого множества вершин куба B^n не превосходит 2^{n-1}.

Отметим, что для тупикового комплекса M подмножество собственных вершин C_M может не быть интервально независимым, так как максимальная длина тупикового комплекса асимптотически равна 2^n [1, с. 119], т. е. больше 2^{n-1}. При этом для ядрового комплекса граней M множество собственных вершин C_M — интервально независимое множество вершин.

В единичном кубе B^n для $0 \leqslant k \leqslant m \leqslant n$ обозначим через

$B_m^n = \{\widetilde{x} \in B^n \mid \rho(\widetilde{0}, \widetilde{x}) = \|\widetilde{x}\| = m\}$ — m-й слой куба B^n;

$S_{m-k,m}^n = \{\widetilde{x} \in B^n \mid m-k \leqslant \|\widetilde{x}\| \leqslant m\}$ — пояс ширины k в кубе B^n, состоящий из слоёв с номерами $m-k, \ldots, m$;

$S_{m-k,m}^n(x_1, \ldots, x_n)$ — поясковая функция n переменных, для которой множество единичных вершин совпадает с множеством $S_{m-k,m}^n$.

Функция называется *симметрической*, если она не меняет значения при любой перестановке переменных [1, с. 110]. Симметрическая функция однозначно представляется в виде набора поясковых функций, которые являются компонентами связности симметрической функции.

Определим пучки k-мерных максимальных граней множества $S_{m-k,m}^n$ для вершин, которые принадлежат «крайним» слоям B_m^n или B_{m-k}^n множества $S_{m-k,m}^n$ (рис. 1):

$$P_0(\widetilde{x}) = \bigl\{I \mid \widetilde{\delta}_{\min}(I) \in B_{m-k}^n \cap I(\widetilde{0}, \widetilde{x}),\ \widetilde{\delta}_{\max}(I) = \widetilde{x} \in B_m^n\bigr\},$$

$$P_1(\widetilde{x}) = \bigl\{I \mid \widetilde{\delta}_{\min}(I) = \widetilde{x} \in B_{m-k}^n,\ \widetilde{\delta}_{\max}(I) \in B_m^n \cap I(\widetilde{x}, \widetilde{1})\bigr\},$$

где $\widetilde{\delta}_{\min}(I)$ и $\widetilde{\delta}_{\max}(I)$ — минимальная и максимальная вершины грани I, $I(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta})$ — наименьшая грань, содержащая вершины $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$.

Обозначим через $\Omega_{m-k,m}^n(\mathcal{B})$ множество таких комплексов k-мерных граней в поясе $S^n_{m-k,m}$ единичного куба B^n, которые имеют вид

$$\Omega^n_{m-k,m}(\mathcal{B}) = \begin{cases} \{I_j \mid I_j \in P_0(\widetilde{x}_j),\ \widetilde{x}_j \in \mathcal{B},\ j = 1, \ldots, |\mathcal{B}|\} & \text{для } \mathcal{B} \subseteq B^n_m, \\ \{I_j \mid I_j \in P_1(\widetilde{x}_j),\ \widetilde{x}_j \in \mathcal{B},\ j = 1, \ldots, |\mathcal{B}|\} & \text{для } \mathcal{B} \subseteq B^n_{m-k}, \end{cases}$$

т. е. для каждой вершины $\widetilde{x} \in \mathcal{B}$ в комплекс граней входит одна грань из пучка $P_\sigma(\widetilde{x})$, где $\sigma = 0$ для $\mathcal{B} \subseteq B^n_m$ и $\sigma = 1$ для $\mathcal{B} \subseteq B^n_{m-k}$.

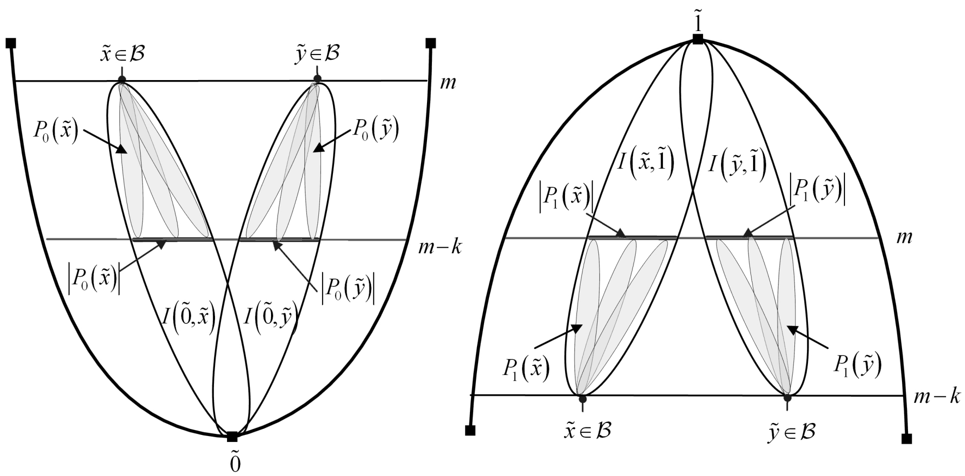

Рис. 1. Пучки k–мерных граней в поясе $S^n_{m-k,m}$

Понятия интервально независимого и протыкающего множеств вершин позволяют сформулировать достаточные условия минимальности неприводимого комплекса граней относительно мер сложности l, L и класса мер сложности Λ_π. $\mathcal{L}$-минимальные комплексы для меры сложности $\mathcal{L} \in \Lambda_\pi$, удовлетворяющие условиям минимальности, также обладают свойством суммируемости для компонент связности. Это позволяет для комплексов граней вида $\Omega^n_{m-k,m}(\mathcal{B})$ и L-минимальных комплексов граней симметрических функций доказать их минимальность для любой меры сложности из класса Λ_π.

2. Основные результаты

Будем говорить, что грань I *доминирует* грань I', если существует перестановка координат π такая, что $\pi(I') \subset I$.

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{B}_M$ — подмножество собственных вершин для граней неприводимого комплекса M и удовлетворяет условиям*

(i) $\mathfrak{B}_M$ *является интервально независимым и протыкающим для комплекса граней;*

(ii) *для каждой вершины* $\widetilde{x} \in \mathfrak{B}_M$ *ранг грани* $I_{M,\widetilde{x}}$ *не больше ранга любой допустимой грани комплекса, содержащей* $\widetilde{x}$*;*

(iii) *для каждой вершины* $\widetilde{x} \in \mathfrak{B}_M$ *грань* $I_{M,\widetilde{x}}$ *изоморфна или доминирует любую допустимую грань комплекса, содержащую* $\widetilde{x}$.

Тогда комплекс M *является кратчайшим, если выполнено* (i), *минимальным и кратчайшим, если выполнены* (i) *и* (ii), Λ_π*-минимальным, если выполнены* (i) *и* (iii).

Доказательство. Пусть выполнено условие (i). Тогда $l\,(M) = |\mathfrak{B}_M|$, так как в каждой грани комплекса M содержится ровно одна вершина из $\mathfrak{B}_M$. Действительно, подмножество собственных вершин $\mathfrak{B}_M$ для M, во-первых, интервально независимое, т. е. в каждой грани комплекса содержится не более одной вершины из $\mathfrak{B}_M$, во-вторых, протыкающее, т. е. в каждой грани комплекса содержится хотя бы одна собственная вершина из $\mathfrak{B}_M$.

Для любого комплекса v, эквивалентного M, $\mathfrak{B}_M$ содержится в гранях комплекса v и является интервально независимым для v, так как $N_v = N_M$. Поэтому для каждой вершины $\widetilde{x} \in \mathfrak{B}_M$ в комплексе v есть хотя бы одна грань, содержащая $\widetilde{x}$ и не содержащая ни одной другой вершины из $\mathfrak{B}_M$. Комплекс v имеет представление $v = \big\{I_{v,\widetilde{x}},\ \widetilde{x} \in \mathfrak{B}_M\big\} \cup v_0$, где $I_{v,\widetilde{x}}$ — грань комплекса v, содержащая $\widetilde{x} \in \mathfrak{B}_M$, v_0 — некоторый комплекс, возможно, пустой. Следовательно, $l\,(v) \geqslant |\mathfrak{B}_M| = l\,(M)$ и комплекс M кратчайший.

Пусть выполнено условие (ii). Тогда для меры сложности L имеем $L(\{I_{v,\widetilde{x}}\}) \geqslant L(\{I_{M,\widetilde{x}}\})$, т. е. в M все грани максимальные. Мера сложности L удовлетворяет свойству аддитивности, следовательно,

$$\begin{aligned} L(v) = L(\{I_{v,\widetilde{x}},\ \widetilde{x} \in \mathfrak{B}_M\} \cup v_0) \geqslant L(\{I_{v,\widetilde{x}},\ \widetilde{x} \in \mathfrak{B}_M\}) \\ = \sum_{\widetilde{x} \in \mathfrak{B}_M} L(\{I_{v,\widetilde{x}}\}) \geqslant \sum_{\widetilde{x} \in \mathfrak{B}_M} L(\{I_{M,\widetilde{x}}\}) = L(M), \end{aligned}$$

т. е. M является минимальным.

Условие «грань I изоморфна или доминирует грань I'» означает существование перестановки координат π, для которой $\pi\,(I') \subseteq I$, и если $\pi\,(I') \subset I$, то грань I может быть получена уменьшением ранга грани $\pi\,(I')$. Поэтому если выполнено условие (iii), то в M все грани максимальные и для каждой вершины $\widetilde{x} \in \mathfrak{B}_M$ существует перестановка $\pi_{\widetilde{x}}$ такая, что $\pi_{\widetilde{x}}(I_{v,\widetilde{x}}) \subseteq I_{M,\widetilde{x}}$.

Удаляя из комплекса v все грани, которые содержатся в v_0, получаем

$$\mathcal{L}(v) = \mathcal{L}(\{I_{v,\widetilde{x}},\ \widetilde{x} \in \mathfrak{B}_M\} \cup v_0) \geqslant \mathcal{L}(\{I_{v,\widetilde{x}},\ \widetilde{x} \in \mathfrak{B}_M\}).$$

Для любой меры сложности $\mathcal{L}$ из класса Λ_π имеем

$$\mathcal{L}(\{I_{v,\widetilde{x}},\ \widetilde{x} \in \mathfrak{B}_M\}) = \mathcal{L}(\{\pi_{\widetilde{x}}(I_{v,\widetilde{x}}),\ \widetilde{x} \in \mathfrak{B}_M\}).$$

Так как $\pi_{\widetilde{x}}(I_{v,\widetilde{x}}) \subseteq I_{M,\widetilde{x}}$, из аксиомы монотонности следует, что

$$\mathcal{L}(\{\pi_{\widetilde{x}}(I_{v,\widetilde{x}}),\ \widetilde{x} \in \mathfrak{B}_M\}) \geqslant \mathcal{L}(\{I_{M,\widetilde{x}},\ \widetilde{x} \in \mathfrak{B}_M\}) = \mathcal{L}(M).$$

Таким образом, для любого комплекса граней v, эквивалентного M, имеем $\mathcal{L}(v) \geqslant \mathcal{L}(M)$. Тогда M имеет среди эквивалентных ему комплексов минимальную $\mathcal{L}$-сложность для любой меры сложности $\mathcal{L} \in \Lambda_\pi$, т. е. является Λ_π-минимальным. Лемма 1 доказана.

Замечание 1. В единичном кубе B^n (рис. 2) комплексы граней M_1 и M_2 [4, с. 92, 93], где $M_1 = M_0 \cup \left\{B^n_{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3}, B^n_{x_1x_2\bar{x}_3}\right\}$, $M_2 = M_0 \cup \left\{B^n_{\bar{x}_3\ldots\bar{x}_n}\right\}$, $M_0 = \left\{B^n_{\bar{x}_1\bar{x}_2x_i}\right\}_{i=4}^n \cup \left\{B^n_{x_1x_2x_i}\right\}_{i=4}^n \cup \left\{B^n_{x_1\bar{x}_2\bar{x}_4\ldots\bar{x}_n}, B^n_{\bar{x}_1x_2\bar{x}_4\ldots\bar{x}_n}\right\}$, эквивалентные и грани из M_0 ядровые.

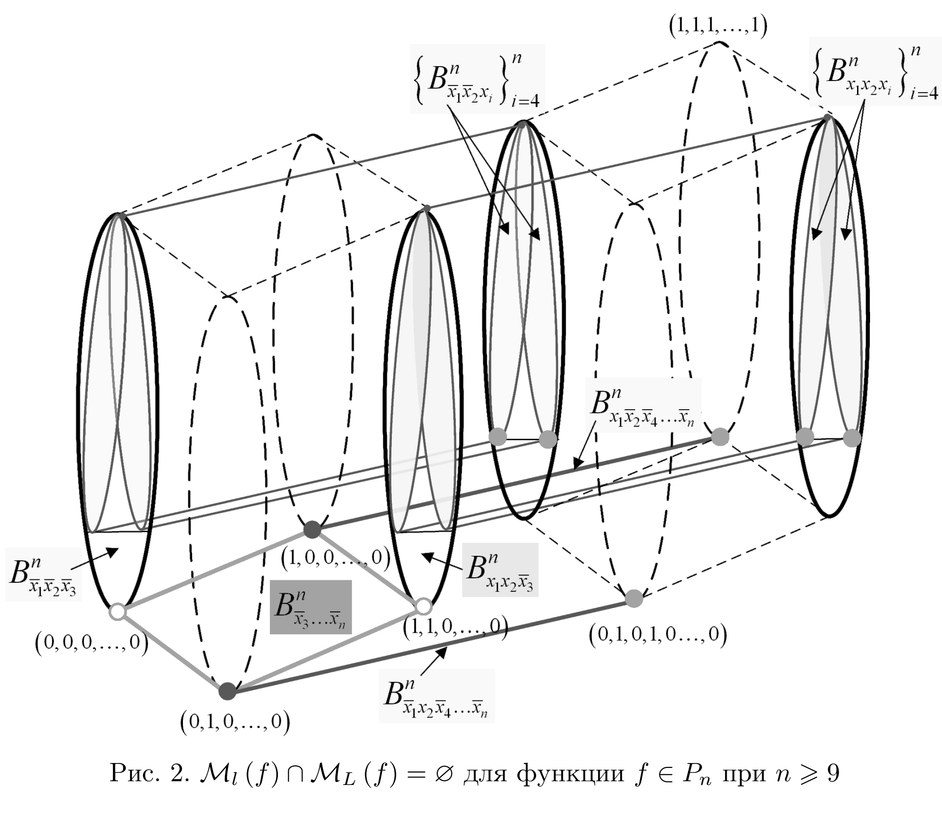

Рис. 2. $\mathcal{M}_l(f) \cap \mathcal{M}_L(f) = \varnothing$ для функции $f \in P_n$ при $n \geqslant 9$

При $n \geqslant 9$ имеем

$$L(M_1) = L(M_0) + 6 < L(M_0) + n - 2 = L(M_2)$$

$$l(M_1) = l(M_0) + 2 > l(M_0) + 1 = l(M_2),$$

т. е. M_1 является минимальным, но не кратчайшим, а M_2 — кратчайшим, но не минимальным.

Для минимального комплекса граней M_1 в множество собственных вершин входят собственные вершины ядровых граней и вершины $(0,0,0,\ldots,0)$ и $(1,1,0,\ldots,0)$ для граней $B^n_{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3}$ и $B^n_{x_1x_2\bar{x}_3}$ ранга 3, которые также содержатся в грани $B^n_{\bar{x}_3\ldots\bar{x}_n}$. Это множество является протыкающим, но не интервально независимым, а при удалении одной из вершин $(0,0,0,\ldots,0)$ или $(1,1,0,\ldots,0)$ множество становится интервально независимым, но не протыкающим для M_1.

Для кратчайшего комплекса граней M_2 в $\mathfrak{B}_{M_2}$ входят собственные вершины ядровых граней и одна из вершин $(0,\ldots,0)$ или $(1,1,0,\ldots,0)$ грани $B^n_{\bar{x}_3\ldots\bar{x}_n}$ ранга $n-2$. В любом случае она содержится в грани $B^n_{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3}$ или $B^n_{x_1x_2\bar{x}_3}$, имеющей ранг 3, т. е. для комплекса граней M_2 в лемме 1 условие (i) выполняется, а (ii) не выполняется.

Отметим, что в случае, когда неприводимый комплекс минимальный и не кратчайший, может не выполняться условие (i), т. е. нельзя выделить подмножество собственных вершин $\mathfrak{B}_M$, которое является интервально независимым и протыкающим. В случае, когда кратчайший комплекс не минимальный, может выполняться условие (i) и не выполняться (ii) для максимальной грани $I_{M,\widetilde{x}}$ некоторой вершины $\widetilde{x} \in \mathfrak{B}_M$ (см. замечание 1).

Λ_π-минимальные комплексы, удовлетворяющие условиям (i) и (iii) леммы 1, также обладают свойством суммируемости для компонент связности.

Лемма 2. *Если неприводимые комплексы граней M_1 и M_2 удовлетворяют условиям* (i) *и* (iii) *леммы* 1 *и множества вершин, содержащиеся в комплексах, являются компонентами связности в единичном кубе, то комплекс $M_1 \cup M_2$ минимальный для любой меры сложности из класса Λ_π.*

Доказательство. В неприводимых комплексах M_1 и M_2 есть подмножества вершин $\mathfrak{B}_{M_1} \subset N_{M_1}$ и $\mathfrak{B}_{M_2} \subset N_{M_2}$, которые удовлетворяют условиям (i) и (iii) леммы 1. Так как N_{M_1} и N_{M_2} являются компонентами связности в единичном кубе, при объединении комплексов M_1 и M_2 имеем

(a) множество вершин $\mathfrak{B}_{M_1} \cup \mathfrak{B}_{M_2}$ интервально независимое и протыкающее для комплекса граней $M_1 \cup M_2$;

(b) множество допустимых (максимальных) граней для любой вершины $\widetilde{x} \in \mathfrak{B}_{M_1} \cup \mathfrak{B}_{M_2}$ не изменяется, т.е. для $\widetilde{x} \in \mathfrak{B}_{M_j} \subset N_{M_j}$, где $j \in \{1, 2\}$, оно совпадает с множеством допустимых (максимальных) граней для множества N_{M_j}, содержащих вершину $\widetilde{x}$.

Следовательно, для $M_1 \cup M_2$ также выполняются условия (i) и (iii) леммы 1 и комплекс минимальный для любой меры сложности из класса Λ_π. Лемма 2 доказана.

Множества ядровых, Λ_π-минимальных и минимальных комплексов граней для любой меры сложности в единичном кубе B^n обозначим через $\mathcal{M}^n_{\ker}$, $\mathcal{M}^n_{\cap\Lambda_\pi}$ и $\mathcal{M}^n_{\cap\Lambda}$ соответственно.

Следствие 1. *Для любого непустого подмножества $\mathcal{B} \subseteq B^n_m$ или $\mathcal{B} \subseteq B^n_{m-k}$ имеет место $\Omega^n_{m-k,m}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{M}^n_{\cap\Lambda_\pi}$.*

Комплексы граней из $\Omega^n_{m-k,m}(\mathcal{B}_1)$, $\Omega^n_{m-k,m}(\mathcal{B}_2)$ и $\Omega^n_{m-k,m}(\mathcal{B}_3)$, где $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \subseteq B^n_m$, $\mathcal{B}_3 \subseteq B^n_{m-k}$ и $|\mathcal{B}_1| = |\mathcal{B}_2| = |\mathcal{B}_3|$, являются π-изоморфными, так как содержат одинаковое число изоморфных граней. Для любой меры сложности $\mathcal{L} \in \Lambda_\pi$ они имеют одинаковую $\mathcal{L}$-сложность, что не зависит от эквивалентности комплексов.

Прямым объединением множеств комплексов граней $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ в кубе B^n, для которых не существует граней, одновременно принадлежащих комплексам из множеств $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$, называется множество комплексов $\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2 = \{M \mid M = M_1 \cup M_2,\ M_1 \in \mathcal{G}_1,\ M_2 \in \mathcal{G}_2\}$.

Справедливо утверждение о суммируемости Λ_π-минимальных комплексов граней из множеств вида $\Omega^n_{m-k,m}(\mathcal{B})$, которые являются компонентами связности в кубе B^n.

Следствие 2. *Если в единичном кубе B^n подмножества $S^n_{m_1-k_1,m_1}$ и $S^n_{m_2-k_2,m_2}$ являются компонентами связности, то*

$$\Omega^n_{m_1-k_1,m_1}(\mathcal{B}_1) \cup \Omega^n_{m_2-k_2,m_2}(\mathcal{B}_2) \subseteq \mathcal{M}^n_{\cap\Lambda_\pi}$$

для любых подмножеств $\mathcal{B}_1 \subseteq B^n_{m_1-k_1}$ или $\mathcal{B}_1 \subseteq B^n_{m_1}$ и $\mathcal{B}_2 \subseteq B^n_{m_2-k_2}$ или $\mathcal{B}_2 \subseteq B^n_{k_2}$.

Следствие 3. *Любой L-минимальный комплекс для симметрической функции является Λ_π–минимальным.*

Доказательство. Для поясковой функции $S^n_{k,n-k}$, где $0 < k \leqslant \frac{n}{2}$, известно [1, с. 123], что $\mathcal{M}_L\big(S^n_{k,n-k}\big) \in \Omega^n_{k,n-k}(B^n_k) \cap \Omega^n_{k,n-k}\big(B^n_{n-k}\big) \neq \varnothing$ и $\big|B^n_k\big| = \big|B^n_{n-k}\big|$. Для поясковой функции $S^n_{m-k,m}$, где $0 \leqslant k \leqslant m \leqslant n$

и $2m \neq n+k$, известно [7], что

$$\mathcal{M}_L\bigl(S^n_{m-k,m}\bigr) \subset \begin{cases} \Omega^n_{m-k,m}\bigl(B^n_m\bigr) \text{ при } \bigl|B^n_{m-k}\bigr| < \bigl|B^n_m\bigr|, \\ \Omega^n_{m-k,m}\bigl(B^n_{m-k}\bigr) \text{ при } \bigl|B^n_{m-k}\bigr| > \bigl|B^n_m\bigr|. \end{cases}$$

Тогда в силу следствия 2 любой L-минимальный комплекс для симметрической функции является Λ_π–минимальным. Следствие 3 доказано.

Следствие 4. *Имеет место соотношение*

$$\log \mu_{\cap\Lambda_\pi}(n) \gtrsim \log M_{\cap\Lambda_\pi}(n) \gtrsim \sqrt{2/\pi}\cdot\sqrt{n}\cdot 2^n \quad \textit{при } n\to\infty.$$

Доказательство. Очевидно, что при $0<k<m\leqslant \frac{n}{2}-1$ выполняются соотношения

$$\bigl|\Omega^n_{m-k,m}\bigl(B^n_m\bigr)\bigr| = \tbinom{m}{k}\binom{n}{m}, \quad \bigl|\Omega^n_{n-m,n-m+k}\bigl(B^n_{n-m}\bigr)\bigr| = \tbinom{m}{k}\binom{n}{n-m},$$

$$\Omega^n_{m-k,m}\bigl(B^n_{m-k,m}\bigr)\cup\Omega^n_{n-m,n-m+k}\bigl(B^n_{n-m,n-m+k}\bigr) \subseteq \mathcal{M}^n_{\cap\Lambda_\pi}.$$

Тогда при $m=\lfloor\frac{n}{2}\rfloor-1$, $k=\lfloor\frac{m}{4}\rfloor$ и $n\to\infty$

$$\log M_{\cap\Lambda_\pi}(n) \geqslant \max_{0<k<m\leqslant\frac{n}{2}-1}\bigl\{\tbinom{n}{m}\log\tbinom{m}{k}+\tbinom{n}{n-m}\log\tbinom{m}{k}\bigr\}$$
$$\sim 2\tbinom{n}{\lfloor n/2\rfloor-1}\log\tbinom{\lfloor n/2\rfloor-1}{\lfloor n/4\rfloor}.$$

Так как $\mu_{\cap\Lambda_\pi}(n) \geqslant 2^{-2^n}\cdot M_{\cap\Lambda_\pi}(n)$, при $n\to\infty$ справедливо

$$\log \mu_{\cap\Lambda_\pi}(n) \gtrsim \log M_{\cap\Lambda_\pi}(n) \gtrsim \sqrt{2/\pi}\cdot\sqrt{n}\cdot 2^n.$$

Следствие 4 доказано.

Ядровой комплекс граней является единственным тупиковым для функции, задаваемой этим комплексом граней. Для такой функции любой не тупиковый $\mathcal{L}$-минимальный комплекс может быть преобразован операциями уменьшения ранга и удаления граней в ядровой комплекс. При таких преобразованиях сложность не увеличивается, т. е. ядровой комплекс является минимальным для любой меры сложности. Поэтому $\mathcal{M}^n_{\ker}\subseteq\mathcal{M}^n_{\cap\Lambda}\subseteq\mathcal{M}^n_{\cap\Lambda_\pi}$. Справедлива

Теорема 1. *При* $n\geqslant 4$

$$\mathcal{M}^n_{\ker}\subset\mathcal{M}^n_{\cap\Lambda}\subset\mathcal{M}^n_{\cap\Lambda_\pi}, \quad \mu_{\cap\Lambda}(n)\geqslant\tbinom{n-2}{\lfloor(n-2)/2\rfloor}.$$

Доказательство. Для доказательства соотношения $\mathcal{M}^n_{\mathrm{ker}} \subset \mathcal{M}^n_{\cap\Lambda}$ покажем, что для функции

$$\begin{aligned} F(x_1,\ldots,x_n) = {} & x_{n-1}x_n \cdot S^{n-2}_{k-2,n-2}(x_1,\ldots,x_{n-2}) \\ & \vee x_{n-1}\bar{x}_n \cdot S^{n-2}_{k-2,n-3}(x_1,\ldots,x_{n-2}) \cdot (x_1 \oplus \ldots \oplus x_{n-2} \oplus c) \\ & \vee \bar{x}_{n-1}x_n \cdot S^{n-2}_{k-2,n-3}(x_1,\ldots,x_{n-2}) \cdot (x_1 \oplus \ldots \oplus x_{n-2} \oplus c \oplus 1), \end{aligned}$$

где $3 \leqslant k \leqslant n-1$ и $c = k \bmod 2$, существуют не ядровые комплексы граней, минимальные для любой меры сложности.

Функция F обладает следующими свойствами:

(i) её подфункции в гранях $B^n_{x_{n-1},x_n}$, $B^n_{x_{n-1},\bar{x}_n}$ и $B^n_{\bar{x}_{n-1},x_n}$ являются симметрическими, т. е. сохраняют значения при любой перестановке координат $\{i_1,\ldots,i_{n-2},n-1,n\}$ в кубе B^n;

(ii) множество вершин $C_F = N_F \cap \left(B^n_{x_{n-1}\bar{x}_n} \cup B^n_{\bar{x}_{n-1}x_n}\right)$ состоит из собственных вершин одномерных ядровых граней;

(iii) множество вершин $C_F \cup \{\widetilde{1}\}$, где $\widetilde{1} = (1,\ldots,1) \in B^n$, является интервально независимым подмножеством для N_F;

(iv) вершины из $\left(N_F \cap B^n_{x_{n-1}x_n}\right) \setminus \{\widetilde{1}\}$ регулярные, т. е. покрываются ядровыми гранями и не являются собственными для ядровых граней.

Обозначим через $G^{n,k}(F)$ множество всех максимальных k-мерных граней функции F, содержащих вершину $\widetilde{1}$. Все грани из $G^{n,k}(F)$ изоморфные, содержатся в грани $B^n_{x_{n-1}x_n}$ и $\left|G^{n,k}(F)\right| = \binom{n-2}{k}$.

Обозначим через Ω^n_F множество комплексов граней функции F, которые состоят из всех одномерных ядровых граней и одной грани из множества $G^{n,k}(F)$.

Покажем, что любой комплекс граней из Ω^n_F является минимальным для любой меры сложности.

Все комплексы из Ω^n_F изоморфны, так как произвольную грань из множества $G^{n,k}(F)$ перестановкой первых $n-2$ координат можно преобразовать в любую другую грань из этого множества и при этом не изменяется набор 1-мерных ядровых граней. Следовательно, все комплексы из Ω^n_F имеют одинаковую сложность для любой меры сложности.

Для произвольного комплекса граней M функции F и каждой вершины из $C_F \cup \{\widetilde{1}\}$ есть собственная грань, содержащая эту вершину, так как это множество вершин является интервально независимым для N_F. Уменьшая ранг этих граней до минимального и удаляя остальные грани, получим некоторый комплекс из Ω^n_F, который для любой меры сложности имеет сложность не больше, чем сложность M.

Следовательно, все комплексы граней из Ω^n_F для любой меры сложности имеют одинаковую минимальную сложность среди эквивалентных им комплексов. Тогда $\Omega_F^n \subseteq \mathcal{M}_{\cap\Lambda}(F) \subseteq \mathcal{M}_{\cap\Lambda}^n \setminus \mathcal{M}_{\ker}^n$ и $\mu_{\cap\Lambda}(F) \geqslant \left|\Omega_F^n\right| = \left|G^{n,k}(F)\right|$. Поэтому при $n \geqslant 4$

$$\mu_{\cap\Lambda}(n) \geqslant \max_k \tbinom{n-2}{k} = \tbinom{n-2}{\lfloor (n-2)/2 \rfloor}.$$

Для доказательства соотношения $\mathcal{M}_{\cap\Lambda}^n \subset \mathcal{M}_{\cap\Lambda_\pi}^n$ рассмотрим функционал

$$L_\nu(M) = \sum_{i=1}^n N^\nu(i, M),$$

где $N(i, M)$ — число граней в комплексе M, i-я координата которых входит в направление грани, $\nu \geqslant 1$ — вещественное число. Отметим, что $L_1(M) = L(M)$, т.е. при $\nu = 1$ функционал совпадает с обычной сложностью комплекса.

Покажем, что, во-первых, L_ν при $\nu > 1$ является мерой сложности, во-вторых, есть Λ_π-минимальный комплекс, который не является L_ν-минимальным, т.е. $L_\nu \notin \Lambda_\pi$.

Очевидно, что аксиомы неотрицательности, монотонности и инвариантности выполняются для L_ν при $\nu > 1$.

Так как $(a+b)^\nu \geqslant a^\nu + b^\nu$ при $\nu > 1$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, для любого представления комплекса граней $M = M_1 \cup M_2$ в виде прямого объединения комплексов M_1 и M_2 справедливо неравенство

$$\begin{aligned} L_\nu(M_1 \cup M_2) &= \sum_{i=1}^n N^\nu(i, M_1 \cup M_2) = \sum_{i=1}^n \left(N(i, M_1) + N(i, M_2)\right)^\nu \\ &\geqslant \sum_{i=1}^n N^\nu(i, M_1) + \sum_{i=1}^n N^\nu(i, M_2) = L_\nu(M_1) + L_\nu(M_2). \end{aligned}$$

Поэтому выполняется аксиома выпуклости и L_ν является мерой сложностью.

Рассмотрим в кубе B^n, $n \geqslant 4$, комплексы граней

$$M_1 = M_0 \cup \left\{B^n_{\bar{x}_1\bar{x}_3x_4}, B^n_{\bar{x}_2\bar{x}_3x_4}\right\}, \quad M_2 = M_0 \cup \left\{B^n_{x_1\bar{x}_2\bar{x}_3}, B^n_{\bar{x}_1x_2\bar{x}_3}\right\},$$

где $M_0 = \left\{B^n_{x_1\bar{x}_3\bar{x}_4}, B^n_{\bar{x}_1x_2\bar{x}_4}, B^n_{\bar{x}_2x_3\bar{x}_4}, B^n_{\bar{x}_1\bar{x}_2x_4}\right\}$.

Комплексы граней M_1 и M_2 эквивалентны, так как

$$N_{M_1} = N_{M_2} = \left\{\widetilde{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in B^n \mid (x_1, x_2, x_3, x_4) \in S^4_{1,2}\right\},$$

и Λ_π-минимальны, поскольку удовлетворяют условиям (i) и (iii) леммы 1 для подмножества собственных вершин граней

$$\mathfrak{B} = \left\{\widetilde{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, 0, \ldots, 0) \in B^n \mid (x_1, x_2, x_3, x_4) \in B^4_2\right\}.$$

Действительно, вершины из $\mathfrak{B}$ являются собственными для граней комплексов M_1 и M_2, т. е. эти комплексы неприводимы. Для каждой вершины из множества $\mathfrak{B}$ есть ровно две изоморфные максимальные грани ранга 3 (размерности $n-3$). Множество вершин $\mathfrak{B}$ является протыкающим и интервально независимым для комплексов граней M_1 и M_2.

Тогда для любой меры сложности $\mathcal{L} \in \Lambda_\pi$ эквивалентные и Λ_π-минимальные комплексы граней M_1 и M_2 имеют одинаковую $\mathcal{L}$-сложность и $L_\nu(M_1) = 4^\nu + 4^\nu + 4^\nu + 6^\nu > 5^\nu + 5^\nu + 4^\nu + 4^\nu = L_\nu(M_2)$ при $\nu > 1$.

Различие L_ν-сложности этих комплексов означает, что $L_\nu \notin \Lambda_\pi$ и Λ_π–минимальный комплекс M_1 не является L_ν–минимальным. Следовательно, не все Λ_π-минимальные комплексы являются Λ-минимальными комплексами. Теорема 1 доказана.

Соотношение $\mathcal{M}^n_{\ker} \subset \mathcal{M}^n_{\cap\Lambda}$ означает существование не ядровых комплексов граней, минимальных для любой меры сложности, а соотношение $\mathcal{M}^n_{\cap\Lambda} \subset \mathcal{M}^n_{\cap\Lambda_\pi}$ — существование (i) меры сложности, которая не входит в класс Λ_π, (ii) Λ_π-минимального комплекса, который не является минимальным для такой меры сложности.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Васильев Ю. Л., Глаголев В. В.** Метрические свойства дизъюнктивных нормальных форм // Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. Т. 1. — М.: Наука, 1974. — С. 99–148.
2. **Вебер К.** О различных понятиях минимальности дизъюнктивных нормальных форм // Пробл. кибернетики. — 1979. — № 36. — С. 129–158.
3. **Журавлев Ю. И.** О различных понятиях минимальности д.н.ф. // Сиб. мат. журн. — 1960. — Т. 1, № 4. — С. 609–611.
4. **Журавлев Ю. И.** Алгоритмы построения минимальных дизъюнктивных нормальных форм для функций алгебры логики // Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. Т. 1. — М.: Наука, 1974. — С. 67–98.
5. **Лин Син-Лян.** О сравнении сложностей минимальных и кратчайших дизъюнктивных нормальных форм для функций алгебры логики // Пробл. кибернетики. — 1967. — № 18. — С. 11–44.
6. **Сапоженко А. А., Чухров И. П.** Минимизация булевых функций в классе дизъюнктивных нормальных форм // Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятности. Мат. статистика. Теорет. кибернетика. — 1987. — Т. 25. — С. 68–116.
7. **Чухров И. П.** Оценки числа минимальных дизъюнктивных нормальных форм для поясковой функции // Методы дискретного анализа в исследованиях функциональных систем. — Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1981. — № 36. — С. 74–92.

8. **Чухров И. П.** О ядровых и кратчайших комплексах граней в единичном кубе // Дискрет. анализ и исслед. операций — 2011. — Т. 18, № 2. — С. 75–94.
9. **Чухров И. П.** О минимальных комплексах граней в единичном кубе // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2012. — Т. 19, № 3. — С. 79–99.
10. **Яблонский С. В.** Введение в дискретную математику. — М.: Высш. шк., 2003. — 384 с.

Чухров Игорь Петрович,
e-mail: chip@icad.org.ru,
chukhrov@gmail.com

Статья поступила
9 ноября 2012 г.