ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Ноябрь—декабрь 2013. Том 20, № 6. С. 16–29

УДК 519.8

АЛГОРИТМЫ ДЛЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ О НАХОЖДЕНИИ МАКСИМУМА УНИМОДАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ В РЕЖИМЕ ONLINE

Ю. Ю. Великанова

Аннотация. Рассматривается задача, возникающая при автофокусировке различных оптических систем. Известно, что функция яркости является гладкой на отрезке и имеет единственный максимум. Значения функции априори неизвестны. Существует измерительное устройство, которое может перемещаться по отрезку в любую точку и измерять в ней значение функции яркости. На перемещение измерительного устройства и вычисление значения затрачивается энергия. Требуется локализовать в ε-интервале максимум функции яркости, затратив как можно меньше энергии. В работе исследуется поведение алгоритмов золотого сечения и дихотомии. Предложены три новых алгоритма для решения этой задачи. Для этих алгоритмов вычислены затраты энергии в лучшем и худшем случаях.

Ключевые слова: онлайн задача, онлайн алгоритм, минимизация энергии.

Введение

Невозможно представить современный фотоаппарат без функции автофокуса. Один из способов автофокусировки называется контрастным [4]. Упрощая детали, контрастный способ автофокусировки можно описать следующим образом: сначала считываются данные матрицы, полученная картинка программно разбивается на определённое количество участков. После этого микропроцессор вычисляет функцию яркости. Если объект съёмки расфокусирован, то эта величина будет небольшой. Подаётся сигнал механизму перемещения линз занять новое положение. Вся процедура повторяется до тех пор, пока функция яркости не достигнет максимального значения. Это и будет означать, что камера успешно сфокусирована. Таким образом, ни одна система автофокусировки не работает без мотора, который перемещает линзы. Для каждого перемещения линзы мотор затрачивает энергию, которая пропорциональна корню расстояния перемещения линзы. Также энергия затрачивается и на каждое измерение значения функции яркости. Для производителей фотоаппаратов важными являются и скорость автофокусировки, и расход энергии. В связи с этим возникает задача нахождения максимума функции яркости с наименьшим числом измерений и передвижений фокусировочной линзы [5].

1. Математическая постановка задачи

Рассматривается непрерывная гладкая функция $f(x)$, заданная на отрезке $[0, L]$. Функция $f(x)$ имеет единственную точку максимума x^*. Более того, $f(x)$ строго возрастает при $x \in [0, x^*)$ и $f(x)$ строго убывает при $x \in (x^*, L]$. Значения функции $f(x)$ априори неизвестны. Измерительное устройство может перемещаться в любую точку $x \in [0, L]$ и измерять значение $f(x)$. При передвижении из точки a в точку b измерительное устройство тратит энергию $S = \sqrt{|b-a|}$. Для измерения значения $f(x)$ требуется энергия $U = C$, где C — некоторая константа. В задаче требуется локализовать максимум $f(x)$ в интервале длиной ε, при этом энергия $E = S + U$, потраченная для поиска этого интервала, должна быть как можно меньше. Для локализации максимума необходимо найти последовательность точек $x_i \in [0, L]$, по значениям которых можно найти требуемый ε-интервал.

Задача, в которой функция энергии зависит только от количества измерений, т. е. $E = U$, решена с помощью известного алгоритма золотого сечения (ЗС) или методом Фибоначчи [1].

2. Алгоритм золотого сечения

Алгоритм ЗС является классическим алгоритмом поиска максимума функции на отрезке [1]. На каждой итерации алгоритма ЗС рассматриваемый отрезок $[a, b]$ делится в пропорции золотого сечения в обоих направлениях, т. е. выбираются две точки x_1, x_2 такие, что

$$\frac{b-a}{b-x_1} = \frac{b-a}{x_2-a} = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618\ldots.$$

В силу свойства ЗС точка x_1, в свою очередь, производит ЗС отрезка $[a, x_2]$, а точка x_2 — отрезка $[x_1, b]$. Таким образом, на каждом шаге алгоритма необходимо вычислять не две точки, а одну. Опираясь на это свойство ЗС, можно записать следующий алгоритм поиска максимума функции $f(x)$.

Шаг 1. Пусть задан начальный отрезок $[0, L]$. Положим $a = 0,\ b = L$.

Шаг 2. Рассчитать точки деления отрезка $[a, b]$:

$$x_1 = b - \frac{b-a}{\varphi}, \quad x_2 = a + \frac{b-a}{\varphi}.$$

Переместить измерительное устройство в эти точки и измерить значения функции. Если $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, то $a = x_1$, иначе $b = x_2$.

Шаг 3. Если $|b-a| < \varepsilon$, то STOP, иначе перейти на шаг 2.

Пусть L_i — длина отрезка на итерации i. Тогда $L_i = L_{i-1}/\varphi = L/\varphi^{i-1}$, $L_1 = L$. Количество итераций алгоритма обозначим через lt, $lt = \lceil \log_{\frac{1}{\varphi}} \frac{\varepsilon}{L} \rceil$. Количество измерений значений функции $f(x)$ в алгоритме ЗС всегда будет одинаковым, поэтому $U = 2C + C(lt-1)$.

Обозначим точки x_1, x_2 на итерации i через x_1^i, x_2^i:

$$\left|x_1^i - x_2^i\right| = \frac{L}{\varphi^{i-1}}\left(\frac{2}{\varphi} - 1\right).$$

На каждой итерации i в зависимости от значений функции в точках x_1^i, x_2^i измерительное устройство может продолжать движение в том же направлении или начать движение в противоположную сторону. В первом случае измерительное устройство находится в одной из точек x_1^{i+1} или x_2^{i+1} нового отрезка L_{i+1}. Тогда на шаге 2 алгоритма измерительному устройству необходимо переместиться на расстояние $\left|x_1^{i+1} - x_2^{i+1}\right|$ и измерить необходимое значение функции $f(x)$. Во втором случае измерительное устройство стоит на одном из концов нового отрезка L_{i+1}. На шаге 2 для вычисления значения функции в необходимой точке измерительное устройство проходит расстояние $\left|x_1^i - x_2^i\right| + \left|x_1^{i+1} - x_2^{i+1}\right|$, которое больше, чем в первом случае. Можно заключить, что худший случай алгоритма реализуется, когда измерительное устройство на каждой итерации меняет направление движения. Лучший случай реализуется, когда максимум находится у правого конца отрезка и измерительное устройство на протяжении всей работы алгоритма движется в правую сторону.

Посчитаем для алгоритма золотого сечения функцию энергии в худшем случае. На первой итерации измерительное устройство стоит в точке 0. Значит, $S_1 = \sqrt{L - \frac{L}{\varphi}} + \sqrt{x_1^1 - x_2^1}$. Далее на каждой итерации i имеем

$$\begin{aligned} S_i &= \sqrt{\left|x_1^i - x_2^i\right| + \left|x_1^{i+1} - x_2^{i+1}\right|} \\ &= \sqrt{\frac{L}{\varphi^{i-1}}\left(\frac{2}{\varphi} - 1\right) + \frac{L}{\varphi^{i-2}}\left(\frac{2}{\varphi} - 1\right)} = \sqrt{\frac{L}{\varphi^{i-2}}\left(\frac{2}{\varphi} - 1\right)}\sqrt{\left(\frac{1}{\varphi} + 1\right)}, \end{aligned}$$

$$S = \sum_{1}^{lt} S_i = \sqrt{L}\left(\sqrt{1-\frac{1}{\varphi}} + \sqrt{\frac{2}{\varphi}-1}\right) + \sum_{i=2}^{lt} \sqrt{\frac{L}{\varphi^{i-2}}\left(\frac{2}{\varphi}-1\right)}\sqrt{\frac{1}{\varphi}+1} = \sqrt{L}\left(\sqrt{1-\frac{1}{\varphi}} + \sqrt{\frac{2}{\varphi}-1}\right) + \sqrt{L}\sqrt{\frac{1}{\varphi}+1}\sqrt{\frac{2}{\varphi}-1}\sum_{i=2}^{lt}\sqrt{\frac{1}{\varphi^{i-2}}}.$$

Сумма геометрической прогрессии равна

$$\sum_{i=2}^{lt}\sqrt{\frac{1}{\varphi^{i-2}}} = \frac{1-\left(\sqrt{\frac{1}{\varphi}}\right)^{lt-1}}{1-\sqrt{\frac{1}{\varphi}}} \leqslant \frac{1}{1-\sqrt{\frac{1}{\varphi}}}.$$

Тогда

$$S \leqslant \sqrt{L}\left(\sqrt{1-\frac{1}{\varphi}} + \sqrt{\frac{2}{\varphi}-1}\right) + \sqrt{L}\sqrt{\frac{1}{\varphi}+1}\sqrt{\frac{2}{\varphi}-1}\frac{1}{1-\sqrt{\frac{1}{\varphi}}} \leqslant 1{,}104\sqrt{L} + 2,9\sqrt{L} \approx 4,1\sqrt{L}.$$

Отсюда $E = U + S \leqslant 2C + C(lt-1) + 4{,}1\sqrt{L}$.

Рассмотрим лучший случай. На каждой итерации измерительное устройство проходит расстояние $\left|x_1^i - x_2^i\right| = \frac{L}{\varphi^{i-1}}\left(\frac{2}{\varphi}-1\right)$. Тогда

$$S = S_1 + \sum_{i=2}^{lt}\sqrt{\frac{L}{\varphi^{i-1}}\left(\frac{2}{\varphi}-1\right)} = S_1 + \sqrt{L}\sqrt{\frac{2}{\varphi}-1}\sqrt{\frac{1}{\varphi}}\left(\frac{1-\left(\sqrt{\frac{1}{\varphi}}\right)^{lt-1}}{1-\sqrt{\frac{1}{\varphi}}}\right) \geqslant 2{,}86\sqrt{L} - c_1\varepsilon,$$

где константа $c_1 \in [3, 4]$ появляется в сумме геометрической прогрессии. Величиной ε можно пренебречь, поэтому

$$E = U + S \geqslant 2C + C(lt-1) + 2{,}86\sqrt{L}.$$

Таким образом доказано

Утверждение 1. *Во время работы алгоритма ЗС для локализации максимума функции $f(x)$ в ε-интервале измерительное устройство расходует энергию $E \approx 2C + C(\lceil\log_{\frac{1}{\varphi}}\frac{\varepsilon}{L}\rceil - 1) + 4{,}1\sqrt{L}$ в худшем случае и $E \approx 2C + C(\lceil\log_{\frac{1}{\varphi}}\frac{\varepsilon}{L}\rceil - 1) + 2{,}86\sqrt{L}$ в лучшем случае.*

3. Алгоритм дихотомии с ε

В классическом алгоритме дихотомии [1] на каждой итерации текущий отрезок делится пополам и относительно его центра рассматриваются две симметричные точки. В этих точках измерительное устройство вычисляет значения функции $f(x)$, которые сравниваются между собой. Функция $f(x)$ гладкая на отрезке $[0, L]$, поэтому имеет смысл проверять поведение градиента функции $f(x)$ в ε-окрестности точки x. В алгоритме дихотомии с ε измерительное устройство делает замеры в точках, симметричных относительно центра, и точках, близких к ним. Это даёт возможность определить направление градиента, что, в свою очередь, позволяет более точно определить область поиска максимума функции $f(x)$.

Шаг 1. Пусть задан начальный отрезок $[0, L]$. Положим $a = 0$, $b = L$.

Шаг 2. Пусть измерительное устройство стоит в левом конце отрезка. Переместить измерительное устройство в точку $x_1 = a + \frac{b-a}{4}$ и измерить значение $f(x_1)$. Затем переместить в точку $x_1 + \varepsilon$ и измерить значение функции $f(x_1 + \varepsilon)$. Если $f(x_1) \geqslant f(x_1 + \varepsilon)$, то $b = x_1 + \varepsilon$ и переход на шаг 3. Иначе $a = x_1$. Вычислить точку $x_2 = a + \frac{b-a}{2}$. Переместить измерительное устройство в точку $x_2 - \varepsilon$ и измерить значение $f(x_2 - \varepsilon)$. Потом переместить в точку x_2 и измерить значение $f(x_2)$. Если $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, то $b = x_2$. Если $f(x_1) < f(x_2)$ и $f(x_2) \geqslant f(x_2 - \varepsilon)$, то $a = x_2 - \varepsilon$. Если $f(x_1) < f(x_2)$ и $f(x_2) < f(x_2 - \varepsilon)$, то $b = x_2$.

Пусть измерительное устройство стоит в правом конце отрезка. Переместить устройство в точку $x_1 = b - \frac{b-a}{4}$ и измерить значение $f(x_1)$. Переместить измерительное устройство в точку $x_1 - \varepsilon$ и измерить значение $f(x_1 - \varepsilon)$. Если $f(x_1) \geqslant f(x_1 - \varepsilon)$, то $a = x_1 - \varepsilon$ и переход на шаг 3. Иначе $b = x_1$ и вычислить точку $x_2 = b - \frac{b-a}{2}$. Переместить измерительное устройство в точку $x_2 + \varepsilon$ и измерить в ней значение $f(x_2 + \varepsilon)$. Затем измерить значение $f(x_2)$. Если $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, то $a = x_2$. Если $f(x_1) < f(x_2)$ и $f(x_2) \geqslant f(x_2 + \varepsilon)$, то $b = x_2 + \varepsilon$. Если $f(x_1) < f(x_2)$ и $f(x_2) < f(x_2 + \varepsilon)$, то $a = x_2$.

Шаг 3. Если $|b - a| < \varepsilon$, то STOP, иначе переход на шаг 2.

На каждой итерации i на шаге 2 измерительное устройство может перемещаться либо на расстояние $\frac{L_i}{4} + \varepsilon$, либо $-\frac{L_i}{4} + \varepsilon + \frac{L_i}{4} - 2\varepsilon + \varepsilon$. Тогда $S_i = \sqrt{\frac{L_i}{4} + \varepsilon}$, либо $S_i = \sqrt{\frac{2L_i}{4}}$. В первом случае длина отрезка на следующей итерации равна $L_{i+1} = \frac{L_i}{4} + \varepsilon$. Во втором случае в зависимости от значений функции в точках $x_1 \pm \varepsilon$, $x_2 \pm \varepsilon$ получаем $L_{i+1} = \frac{L_i}{4}$, либо $L_{i+1} = \frac{L_i}{2} + \varepsilon$. Можно выделить лучший и худший случаи алгоритма.

Худший случай для алгоритма возникает, если после четырёх замеров в точках $x_1,\ x_1 \pm \varepsilon,\ x_2,\ x_2 \pm \varepsilon$ на шаге 2 искомый интервал оказывается в другой половине текущего отрезка, а измерительное устройство находится в крайней точке выбранного отрезка. Длина интервала равна $L_{i+1} = \frac{L_i}{2} + \varepsilon = \frac{L}{2^i} + i\varepsilon$. Пренебрегая величинами, сравнимыми с ε, получим $lt = \lceil \log_{\frac{1}{2}} \frac{\varepsilon}{L} \rceil$. Тогда

$$S = \left(\sqrt{\frac{1}{4}} + \sqrt{\frac{1}{4}}\right)\sqrt{L}\sum_{i=1}^{lt}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^{i-1} = \sqrt{L}\frac{1 - \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^{lt}}{1 - \sqrt{\frac{1}{2}}} < 3,42\sqrt{L}.$$

Следовательно, $E \approx 4Clt + 3,42\sqrt{L}$.

Для алгоритма дихотомии с ε лучший случай возникает, когда на каждом шаге 2 переход к следующему отрезку происходит по двум значениям функции $f(x)$ либо в точках $x_1,\ x_1 + \varepsilon$, либо $x_2,\ x_2 - \varepsilon$. В этом случае, пренебрегая величинами, сравнимыми с ε, получаем, что каждый раз длина отрезка уменьшается в четыре раза и измерительное устройство проходит расстояние, равное $\frac{L_i}{4}$. Таким образом,

$$S = \sqrt{\frac{1}{4}}\sqrt{L}\sum_{i=1}^{\lceil \log_{\frac{1}{4}}(\frac{\varepsilon}{L})\rceil}\left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right)^{i-1} = \sqrt{\frac{1}{4}}\sqrt{L}\frac{1 - \left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right)^{\lceil \log_{\frac{1}{4}}(\frac{\varepsilon}{L})\rceil - 1}}{1 - \sqrt{\frac{1}{4}}} > \sqrt{L}.$$

На каждой итерации измерительное устройство делает два замера. Получаем $E = U + S \approx 2C\lceil \log_{\frac{1}{4}}(\frac{\varepsilon}{L})\rceil + \sqrt{L}$.

Таким образом доказано

Утверждение 2. *Во время работы алгоритма дихотомии с ε для локализации максимума функции $f(x)$ в ε-интервале измерительное устройство расходует энергию $E \approx 4C\lceil \log_{\frac{1}{2}}(\frac{\varepsilon}{L})\rceil + 3{,}42\sqrt{L}$ в худшем случае и $E \approx 2C\lceil \log_{\frac{1}{4}}(\frac{\varepsilon}{L})\rceil + \sqrt{L}$ в лучшем случае.*

4. Гибридный алгоритм

Гибридный алгоритм (ГА) основан на алгоритмах дихотомии и ЗС. Использование свойства ЗС и измерение значения функции $f(x)$ в дополнительной точке позволяет алгоритму улучшить оценки в худшем случае.

Шаг 1. Пусть задан начальный отрезок $[0, L]$. Положим $a = 0,\ b = L$.

Шаг 2. Пусть измерительное устройство стоит на левом конце отрезка. Переместить измерительное устройство в точку $q = a + \frac{b-a}{4}$ и измерить значение функции $f(q)$. Переместить измерительное устройство в точку $x_1 = b - \frac{b-a}{\varphi}$ и измерить значение $f(x_1)$. Если $f(q) \geqslant f(x_1)$, то $b = x_1$. Если $f(q) < f(x_1)$, то переместить измерительное устройство в точку $x_2 = a + \frac{b-a}{\varphi}$ и измерить значение $f(x_2)$. Если $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, то $a = x_1$, $x_1 = x_2$ и переместить измерительное устройство в точку $x_2 = a + \frac{b-a}{\varphi}$. Пока $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ и $|b-a| > \varepsilon$, сделать $a = x_1$, $x_1 = x_2$, $x_2 = a + \frac{b-a}{\varphi}$ и переместить измерительное устройство в точку x_2. Если $f(x_1) > f(x_2)$, то $b = x_2$, $a = q$.

Если измерительное устройство находится в точке b, то действия симметричны.

Шаг 3. Если $|b - a| < \varepsilon$, то STOP, иначе переход на шаг 2.

На каждой итерации на шаге 2 алгоритма возможны три случая. Первый случай возникает, когда измерительное устройство, измерив два значения в точках q, x_1, переходит на шаг 3. Второй случай возникает, когда измерительное устройство, измерив значения в точках q, x_1, x_2, продолжает движения в том же направлении по правилу ЗС, делая необходимые измерения в новых точках x_2, до тех пор, пока не будет иметь место неравенство $f(x_1) > f(x_2)$. Третий случай возникает, когда, измерив значения в точках q, x_1, x_2, алгоритм переходит на шаг 3. Посчитаем затрачиваемую энергию в каждом случае.

Пусть на итерации i на шаге 2 имеет место первый случай. Измерительное устройство делает два замера в точках q, x_1. Тогда

$$L_{i+1} = L_i - \frac{L_i}{\varphi} = L_i\left(1 - \frac{1}{\varphi}\right),$$

$$S_i = \sqrt{\frac{1}{4}L_i} + \sqrt{L_i - \frac{L_i}{\varphi} - \frac{L_i}{4}} \leqslant 0{,}864\sqrt{L_i}.$$

Пусть на итерации i на шаге 2 имеет место второй случай. Тогда

$$L_{i+1} = L_i\left(\frac{1}{\varphi} - \frac{1}{4}\right),$$

$$S_i = \sqrt{\frac{1}{4}L_i} + \sqrt{\frac{3}{4}L_i - \frac{1}{\varphi}L_i} + \sqrt{\frac{2}{\varphi}L_i - L_i} \leqslant 1{,}35\sqrt{L_i}.$$

Пусть на итерации i на шаге 2 возникает третий случай. Тогда

$$S_i = \sqrt{L_i\left(\frac{2}{\varphi} - 1\right)}, \quad L_{i+1} = L_i\frac{1}{\varphi}.$$

Обозначим через lt общее число итераций. Оценим работу алгоритма в разных случаях.

Пусть на каждой итерации на шаге 2 имеет место первый случай. Тогда $lt = \lceil \log_{1-\frac{1}{\varphi}} \frac{\varepsilon}{L} \rceil$,

$$S = \sum_{i=1}^{lt} \sqrt{\frac{L_i}{4}} + \sqrt{L_i - \frac{L_i}{\varphi} - \frac{L_i}{4}} \leqslant 0{,}864\sqrt{L} \sum_{i=1}^{lt} \left(\sqrt{1 - \frac{1}{\varphi}}\right)^{i-1} \leqslant 2{,}27\sqrt{L}.$$

Пусть на шаге 2 имеет место второй случай, т. е. с первой итерации измерительное устройство перемещается только в правую сторону по отрезку. Текущий отрезок каждый раз делится в пропорции ЗС. Получаем лучший случай алгоритма ЗС с другой первой итерацией:

$$S_1 = \sqrt{\frac{L}{4}} + \sqrt{\frac{3}{4}L - \frac{1}{\varphi}L} + \sqrt{\frac{L}{\varphi} - L + \frac{L}{\varphi}}.$$

В алгоритме ЗС на первой итерации измерительное устройство тратит энергию

$$S_1' = \sqrt{L - \frac{1}{\varphi}} + \sqrt{\frac{2L}{\varphi} - L}.$$

Посчитаем разность:

$$S_1 - S_1' = \sqrt{\frac{L}{4}} + \sqrt{\frac{3}{4}L - \frac{1}{\varphi}L} + \sqrt{\frac{L}{\varphi} - L + \frac{L}{\varphi}} - \sqrt{L - \frac{1}{\varphi}} - \sqrt{\frac{2L}{\varphi} - L} \leqslant 0{,}245\sqrt{L}.$$

Таким образом, $S \leqslant 2{,}51\sqrt{L} + 0{,}245\sqrt{L} = 2{,}755\sqrt{L}$.

Пусть на каждой итерации на шаге 2 имеет место третий случай. Тогда $lt = \lceil \log_{(\frac{1}{\varphi} - \frac{1}{4})} \frac{\varepsilon}{L} \rceil$,

$$S = \sum_{i=1}^{lt} S_i \leqslant 1{,}35\sqrt{L} \sum_{i=1}^{lt} \left(\sqrt{\frac{1}{\varphi} - \frac{1}{4}}\right)^{i-1} \leqslant 3{,}43\sqrt{L}.$$

Во время работы алгоритма могут происходить «длинные» итерации. Это итерации, внутри которых происходит перемещение измерительного устройства по точкам ЗС. Пусть на шаге 2 на некоторой итерации i происходит $k \neq 0$ перемещений по точкам ЗС. Тогда после такой длинной итерации $L_{i+1} = \frac{L_i}{\varphi^k}$,

$$S_i = \sqrt{\frac{1}{4}L_i} + \sqrt{\frac{3}{4}L_i - \frac{1}{\varphi}L_i} + \sum_{t=0}^{k-1}\sqrt{\left(\frac{2}{\varphi} - 1\right)L_t}$$
$$= \sqrt{L_i}\left(\sqrt{\frac{1}{4}} + \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{\varphi}} + \sqrt{\frac{2}{\varphi} - 1}\sum_{t=0}^{k-1}\sqrt{\frac{1}{\varphi^t}}\right)$$
$$= \sqrt{L_i}\left(\sqrt{\frac{1}{4}} + \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{\varphi}} + \sqrt{\frac{2}{\varphi} - 1}\frac{1 - \sqrt{\frac{1}{\varphi^k}}}{1 - \sqrt{\frac{1}{\varphi}}}\right).$$

Для упрощения записи введём следующие обозначения:

$$A = \left(\sqrt{\frac{1}{4}} + \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{\varphi}} + \sqrt{\frac{2}{\varphi} - 1}\right), \quad B = \sqrt{\frac{2}{\varphi} - 1},$$

$$P = \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{1}{\varphi} - \frac{1}{4}}}, \quad T = \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{1}{\varphi}}}, \quad X = \sqrt{\frac{1}{\varphi} - \frac{1}{4}}, \quad Y = \sqrt{\frac{1}{\varphi}}.$$

Пусть во время алгоритма после итерации i следуют подряд m итераций, внутри которых нет дополнительных перемещений по точкам ЗС. Назовём такие итерации «короткими». Тогда $L_i = L_{i-m}\left(\frac{1}{\varphi} - \frac{1}{4}\right)^m$.

За m коротких итераций измерительное устройство тратит энергию, равную $\sum_{k=1}^{m}\sqrt{L_{i-k}}A = \sqrt{L_{i-1}}A\frac{1-\left(\sqrt{\frac{1}{\varphi}-\frac{1}{4}}\right)^m}{1-\sqrt{\frac{1}{\varphi}-\frac{1}{4}}} = \sqrt{L_{i-1}}A(1 - X^m)P$.

Обозначим через k_z число перемещений по точкам золотого сечения, через m_t — число коротких итераций. Порядок итераций таков: m_1 коротких итераций, k_1 перемещений по точкам ЗС, потом m_2 коротких итераций, k_2 перемещений по точкам ЗС и так далее, пока алгоритм не остановится. Посчитаем энергию, израсходованную на передвижение измерительного устройства:

$$\begin{aligned}S &= \sqrt{L}A(1 - X^{m_1})P + \sqrt{L}B(1 - Y^{k_1})X^{m_1}T \\ &+ \sqrt{L}AX^{m_1}Y^{k_1}(1 - X^{m_2})P + \sqrt{L}B(1 - Y^{k_2})X^{m_1+m_2}TY^{k_1} \\ &+ \ldots + \sqrt{L}AX^{m_1+\ldots+m_{i-1}}Y^{k_1+\ldots+k_{i-1}}(1 - X^{m_i})P \\ &+ \sqrt{L}B(1 - Y^{k_i})X^{m_1+\ldots+m_i}TY^{k_1+\ldots k_{i-1}} + \ldots.\end{aligned}$$

В этой сумме слагаемое $\sqrt{L}A(1 - X^{m_1})P$ является суммой потраченной энергии на первых m_1 итерациях, $\sqrt{L}B(1-Y^{k_1})X^{m_1}T$ — энергия, потраченная за k_1 перемещений по точкам ЗС. Другие слагаемые аналогичны.

Рассмотрим сумму i-го и $(i+1)$-го слагаемых:

$$\sqrt{L}AX^{m_1+\ldots+m_{i-1}}Y^{k_1+\ldots+k_{i-1}}(1-X^{m_i})P+\sqrt{L}B(1-Y^{k_i})X^{m_1+\ldots+m_i}T$$
$$\times Y^{k_1+\ldots+k_{i-1}}+\sqrt{L}AX^{m_1+\ldots+m_i}Y^{k_1+\ldots+k_i}(1-X^{m_{i+1}})P$$
$$+\sqrt{L}B(1-Y^{k_{i+1}})X^{m_1+\ldots+m_{i+1}}TY^{k_1+\ldots+k_i}$$
$$=\sqrt{L}APX^{m_1+\ldots+m_{i-1}}Y^{k_1+\ldots+k_{i-1}}-\sqrt{L}APX^{m_1+\ldots+m_i}Y^{k_1+\ldots+k_{i-1}}$$
$$+\sqrt{L}BTX^{m_1+\ldots+m_i}Y^{k_1+\ldots+k_{i-1}}-\sqrt{L}BTX^{m_1+\ldots+m_i}Y^{k_1+\ldots+k_i}$$
$$+\sqrt{L}APX^{m_1+\ldots+m_i}Y^{k_1+\ldots+k_i}-\sqrt{L}APX^{m_1+\ldots+m_{i+1}}Y^{k_1+\ldots+k_i}$$
$$+\sqrt{L}BTX^{m_1+\ldots+m_{i+1}}Y^{k_1+\ldots+k_i}-\sqrt{L}BTX^{m_1+\ldots+m_{i+1}}Y^{k_1+\ldots+k_{i+1}}$$
$$=\sqrt{L}AX^{m_1+\ldots+m_{i-1}}Y^{k_1+\ldots+k_{i-1}}P$$
$$+\sqrt{L}X^{m_1+\ldots+m_i}Y^{k_1+\ldots+k_{i-1}}(-AP+BT)$$
$$+\sqrt{L}X^{m_1+\ldots+m_i}Y^{k_1+\ldots+k_i}(-BT+AP)$$
$$+\sqrt{L}X^{m_1+\ldots+m_{i+1}}Y^{k_1+\ldots+k_i}(-AP+BT)-\sqrt{L}BTX^{m_1+\ldots+m_{i+1}}Y^{k_1+\ldots+k_{i+1}}.$$

Сгруппировав слагаемые, получаем

$$S=\sqrt{L}AP-\sqrt{L}X^{m_1}(-BT+AP)+\sqrt{L}X^{m_1}Y^{k_1}(AP-BT)$$
$$-\sqrt{L}X^{m_1+m_2}Y^{k_1}(-BT+AP)+\sqrt{L}X^{m_1+m_2}Y^{k_1+k_2}(AP-BT)$$
$$-\ldots-\sqrt{L}X^{m_1+\ldots+m_i}Y^{k_1+\ldots+k_{i-1}}(-BT+AP)$$
$$+\sqrt{L}X^{m_1+\ldots+m_i}Y^{k_1+\ldots+k_i}(AP-BT)+\ldots$$
$$=\sqrt{L}AP+\sqrt{L}X^{m_1}(BT-AP+Y^{k_1}(AP-BT))$$
$$+\sqrt{L}X^{m_1+m_2}Y^{k_1}(BT-AP+Y^{k_2}(AP-BT))$$
$$+\ldots+\sqrt{L}X^{m_1+\ldots+m_i}Y^{k_1+\ldots k_{i-1}}(BT-AP+Y^{k_i}(AP-BT))+\ldots.$$

Рассмотрим множитель

$$(BT-AP+Y^{k_i}(AP-BT))=(AP-BT)(Y^{k_i}-1)<0.$$

Так как $AP-BT>0,\ Y^{k_i}-1<0$, то

$$S=\sqrt{L}AP-\sqrt{L}(AP-BT)(1-Y^{k_1})X^{m_1}$$
$$-\sqrt{L}(AP-BT)(1-Y^{k_2})X^{m_1+m_2}Y^{k_1}-\ldots$$
$$<\sqrt{L}AP-\sqrt{L}(1-Y)(1+Y+\ldots+Y^{k_1-1})X^{m_1}$$
$$-\sqrt{L}(1-Y)(1+Y+\ldots+Y^{k_2})X^{m_1+m_2}Y^{k_2}-\ldots$$

$$< \sqrt{L}AP - \sqrt{L}0.21X^{m_1} - \sqrt{L}0.21X^{m_1+m_2}Y^{K_1} - \ldots$$
$$< \sqrt{L}AP - \sqrt{L}AP\sqrt{\frac{\varepsilon}{L}}.$$

Чем больше значение m_1, тем больше измерительное устройство тратит энергии. Величина $\sqrt{L}AP - \sqrt{L}AP\sqrt{\frac{\varepsilon}{L}} \approx 3{,}43$ является оценкой ГА в случае, когда на каждой итерации на шаге 2 имеет место третий случай. В случае, когда $m_i = 0$ и k_i принимают большие значения, данное выражение принимает наименьшее значение, т. е. во втором случае.

Лучшим случаем является первый случай, когда на каждой итерации измерительное устройство вычисляет значения в точках x_1, q, потом меняет направление и переходит на следующую итерацию. Независимо от итерации измерительное устройство всегда вычисляет значения в этих точках, значит, этот случай не может быть хуже, чем случай с «длинными» итерациями. Ранее показано, что в случае «длинных» итераций наилучшее значение энергии $S \approx 2{,}755\sqrt{L} > 2{,}27\sqrt{L}$. Тогда $U = 2C\lceil\log_{(1-\frac{1}{\varphi})}\frac{\varepsilon}{L}\rceil$ в лучшем случае и $U = 3C\lceil\log_{(\frac{1}{\varphi}-\frac{1}{4})}\frac{\varepsilon}{L}\rceil$ в худшем.

Таким образом доказано

Утверждение 3. *Во время работы ГА для локализации максимума функции $f(x)$ в ε-интервале измерительное устройство расходует энергию*

$$E \approx \begin{cases} 3C\lceil\log_{(\frac{1}{\varphi}-\frac{1}{4})}\frac{\varepsilon}{L}\rceil + 3,43\sqrt{L} & \text{в худшем случае,} \\ 2C\lceil\log_{(1-\frac{1}{\varphi})}\frac{\varepsilon}{L}\rceil + 2,27\sqrt{L} & \text{в лучшем случае.} \end{cases}$$

Замечание. Работу ГА можно улучшить следующим образом. Рассмотрим ГА на итерации i. Пусть на предыдущей итерации $i-1$ сделаны замеры в точках x_1, x_2. Тогда на шаге 2 после перемещения измерительного устройства в точку q сравниваются значение функции в точке q и значение $f(x_1)$ или $f(x_2)$ в зависимости от положения измерительного устройства на текущем отрезке. Так как случаи симметричны, без ограничения общности будем считать, что измерительное устройство стоит на левом конце отрезка в начале итерации i. Поскольку на предыдущей итерации сделаны замеры в точках x_1 и x_2, левый конец отрезка a равен x_1. Сравниваются значения функции $f(q), f(x_2)$. Если $f(q) < f(x_2)$, то алгоритм продолжает работу, как и раньше. Если $f(q) \geqslant f(x_2)$, то $b = x_2$. Если при этом $|b-a| > \varepsilon$, то переходим к шагу 2. Измерительное устройство перемещается из точки q влево в точку q нового отрезка. Очевидно, что данные изменения не влияют на лучший и худший случаи ГА.

5. Сравнительный анализ алгоритмов

Пусть для некоторого примера I максимум функции находится в точке L/k, где k — некоторая константа. Чтобы оценить решение, найденное он-лайн алгоритмом, рассмотрим задачу как офф-лайн, т. е. все значения функции $f(x)$ известны априори [6]. Тогда для вычисления максимума функции измерительному устройству потребуется энергии $E_{OPT}(I) = C + \sqrt{L/k}$. Это оптимальное решение офф-лайн задачи. Обозначим через $E_A(I) = U_A(I) + S_A(I)$ энергию, полученную алгоритмом A на примере I. Сравнивать функции энергии U с оптимальным значением не имеет смысла. Оценим затраты энергии всех алгоритмов следующим образом. Сравним функцию энергии S с оптимальным значением, а значения величины U, полученные разными алгоритмами, — между собой.

Для алгоритма ЗС получаем следующие неравенства для функции S:

$$2{,}573\sqrt{k} \leqslant \frac{2{,}573\sqrt{L}}{\sqrt{L/k}} \leqslant \frac{E_A(I)}{E_{OPT}(I)} \leqslant \frac{4{,}1\sqrt{L}}{\sqrt{L/k}} \leqslant 4{,}1\sqrt{k},$$

для алгоритма дихотомии с ε имеем

$$\sqrt{k} \leqslant \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{L/k}} \leqslant \frac{E_A(I)}{E_{OPT}(I)} \leqslant \frac{3{,}42\sqrt{L}}{\sqrt{L/k}} \leqslant 3{,}42\sqrt{k},$$

для ГА — $2{,}27\sqrt{k} \leqslant \frac{2{,}27\sqrt{L}}{\sqrt{L/k}} \leqslant \frac{E_A(I)}{E_{OPT}(I)} \leqslant \frac{3{,}43\sqrt{L}}{\sqrt{L/k}} \leqslant 3{,}43\sqrt{k}$.

Таким образом, при большой константе k алгоритмы могут ошибаться в сколь угодно много раз.

Сравним значения U для полученных алгоритмов. Пусть $P = \ln\left(\frac{\varepsilon}{L}\right)$. Обозначим через U^1, U^2 и U^3 функции энергии U алгоритмов ЗС, дихотомии с ε и ГА соответственно:

$$U^1 = 2C + C\left(\left\lceil \log_{\frac{1}{\varphi}} \frac{\varepsilon}{L} \right\rceil - 1\right) = 2C + C\left(\left\lceil \frac{\ln\frac{\varepsilon}{L}}{\ln\frac{1}{\varphi}} \right\rceil - 1\right) \approx C + 2{,}1CP,$$

$$U^2 = 4C\left\lceil \log_{\frac{1}{4}} \frac{\varepsilon}{L} \right\rceil = 4C\left\lceil \frac{\ln\frac{\varepsilon}{L}}{\ln\frac{1}{2}} \right\rceil \approx 6CP,$$

$$U^3 = 3C\left\lceil \log_{\left(\frac{1}{\varphi}-\frac{1}{4}\right)} \frac{\varepsilon}{L} \right\rceil = 3C\left\lceil \frac{\ln\frac{\varepsilon}{L}}{\ln\left(\frac{1}{\varphi}-\frac{1}{4}\right)} \right\rceil \approx 3{,}3CP.$$

Алгоритм ЗС выигрывает у алгоритма дихотомии и ГА по числу измерений функции $f(x)$, в то время как величина S у него больше, чем у других алгоритмов. Сравнивая алгоритм дихотомии и ГА, можно заключить, что разница в количестве измерений функции $f(x)$ отличается практически в два раза. Величины S сверху ограничены почти одинаково, а нижние оценки разные.

6. Алгоритм с константной оценкой

В этом разделе рассматривается алгоритм с константной оценкой точности. Пусть энергия U, затрачиваемая на вычисление функции $f(x)$, мала по сравнению с энергией, затрачиваемой на перемещение измерительного устройства. Будем предполагать, что $U = 0$. Идея алгоритма состоит в том, что на первых итерациях измерительное устройство перемещается по отрезкам маленькой длины. С каждой следующей итерацией длина отрезка перемещения увеличивается.

Отметим на отрезке $[0, L]$ следующие точки:

$$x_0 = \varepsilon, \quad x_1 = x_0 + 2\varepsilon, \quad x_2 = x_1 + 2^2\varepsilon, \quad x_3 = x_2 + 2^3\varepsilon, \ldots,$$

$$x_n = x_{n-1} + 2^n\varepsilon = x_{n-2} + 2^{n-1}\varepsilon + 2^n\varepsilon = \ldots = (2^{n+1} - 1)\varepsilon.$$

Точки x_n разбивают отрезок $[0, L]$ на отрезки $[0, x_0], [x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n], \ldots$. Длина отрезка равна $|x_{n-1} - x_n| = 2^n\varepsilon$.

Алгоритм работает следующим образом.

Шаг 1. Переместить измерительное устройство в точку $\frac{\varepsilon}{2}$ и измерить значение функции $f\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$. Затем переместить измерительное устройство в точку x_0 и измерить значение функции $f(x_0)$. Если $f\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \geqslant f(x_0)$, то максимум функции лежит на отрезке $[0, x_0]$. Иначе измерительное устройство переместить в точку $x_0 + \frac{\varepsilon}{2}$ и измерить значение функции $f\left(x_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Если $f(x_0) \geqslant f\left(x_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$, то максимальное значение функции лежит на отрезке $\left[\frac{\varepsilon}{2}, x_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right]$, иначе $n = 0$ и переход на шаг 2.

Шаг 2. Измерительное устройство переместить в точку x_{n+1} и измерить значение функции $f(x_{n+1})$. Если $f(x_n) < f(x_{n+1})$, то положить $n = n + 1$ и переход на начало шага 2. Если $f(x_n) > f(x_{n+1})$, то положить $a = x_{n-1}, b = x_{n+1}$ и переход к шагу 3. Если $f(x_n) = f(x_{n+1})$, то $a = x_n,\ b = x_{n+1}$ и переход на шаг 3.

Шаг 3. Применить ГА дихотомии для отрезка $[a, b]$.

Пусть максимальное значение функции лежит на отрезке $[x_{n-1}, x_n]$. Тогда $E_{OPT} \geqslant \sqrt{2^{n-1}\varepsilon}$. Посчитаем функцию энергии, получаемую алгоритмом:

$$S \leqslant 3\sqrt{\varepsilon/2} + \sum_{i=1}^{n} \sqrt{2^i\varepsilon} + 3{,}42\sqrt{(2^n + 2^{n-1})\varepsilon}$$

$$
\begin{aligned}
&= 3{,}42\sqrt{3/2}\sqrt{\varepsilon}2^{\frac{n}{2}} + \frac{2^{\frac{n}{2}}-1}{\sqrt{2}-1}\sqrt{\varepsilon} + 3\sqrt{\varepsilon/2} \\
&= 3{,}42\sqrt{3/2}\sqrt{2^n}\sqrt{\varepsilon} + (2^{\frac{n}{2}}-1)(\sqrt{2}+1)\sqrt{\varepsilon} + 3\sqrt{\varepsilon/2} \\
&= \left(\sqrt{2^n}(3{,}42\sqrt{3/2}+\sqrt{2}+1) - \sqrt{2} - 1 + 3/\sqrt{2}\right)\sqrt{\varepsilon} \\
&\qquad < 6{,}61\sqrt{2^n}\sqrt{\varepsilon} - 0{,}29\sqrt{\varepsilon} < 6{,}61\sqrt{2^n}\sqrt{\varepsilon},
\end{aligned}
$$

$$
\frac{E_A(I)}{E_{OPT}(I)} \leqslant \frac{6{,}61\sqrt{\varepsilon}2^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{\varepsilon}} = 6{,}61\sqrt{2} < 9{,}4.
$$

7. Заключение

В статье рассмотрена постановка задачи, в которой функция яркости $f(x)$ является унимодальной и имеет единственный локальный оптимум. На практике такие измерения часто сопровождаются шумами (см., например, [2, 3]). В этом случае появляются дополнительные локальные оптимумы и рассматриваемые алгоритмы уже не могут гарантировать нахождения глобального максимума. Представляется интересным построение алгоритмов для этого более сложного случая.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Васильев Ф. П.** Методы оптимизации. — М.: Факториал Пресс, 2002. — 824 с.
2. **Кельманов А. В., Пяткин А. В.** О сложности некоторых задач кластерного анализа векторных последовательностей // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2013. — Т. 20, № 2. — С. 47–57.
3. **Кельманов А. В., Романченко С. М., Хамидуллин С. А.** Приближённые алгоритмы для некоторых труднорешаемых задач поиска подпоследовательности векторов // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2012. — Т. 19, № 3. — С. 27–38.
4. **Krotkov E.** Focusing // Int. J. Comput. Vision. — 1987. — N 1. — P. 223–237.
5. **Shen Ch.-H. , Chen H. H.** Robust focus measure for low-contrast images // DOI: 10.1109/ICCE.2006.1598314.
6. **Fiat A., Woeginger G. J.** Online algorithms. The state of the art. — Berlin: Springer-Verl., 1998. — P. 13–16. (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 1442.)

Великанова Юлия Юрьевна,
e-mail: julia.velikanova@gmail.com

Статья поступила
20 декабря 2012 г.

Переработанный вариант —
18 мая 2013 г.