ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—февраль 2014. Том 21, № 1. С. 15–29

УДК 519.8

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ АНАЛИЗ АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ ТРЁХИНДЕКСНОЙ m-СЛОЙНОЙ ПЛАНАРНОЙ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ НА ОДНОЦИКЛИЧЕСКИХ ПОДСТАНОВКАХ *)

Э. Х. Гимади, Ю. В. Глазков, О. Ю. Цидулко

Аннотация. Рассматривается трёхиндексная планарная m-слойная задача о назначениях на одноциклических подстановках, являющаяся в общем случае задачей m коммивояжёров с различными весовыми функциями их маршрутов. Задача NP-трудна при $m \geqslant 1$. Представлен приближённый полиномиальный алгоритм решения задачи при $1 < m < n/4$. Алгоритм имеет временну́ю сложность $O(mn^2)$. Получены оценки качества его работы в случае, когда входные данные (элементы $(m \times n \times n)$-матрицы) являются независимыми случайными величинами с общей функцией равномерного распределения на отрезке $[a_n, b_n]$, где $0 < a_n < b_n$. Получены условия асимптотической точности алгоритма, верные также в случае функции распределения мажорирующего типа.

Ключевые слова: трёхиндексная планарная задача о назначениях, m-слойная задача на одноциклических подстановках, m-PSP с различными весовыми функциями, полиномиальный алгоритм, асимптотическая точность.

Введение

Классическая двухиндексная задача о назначении (ЗН) хорошо изучена [17]: известны эффективные алгоритмы для нахождения её точного решения, а также известны многие свойства, касающиеся существования целочисленного оптимального решения релаксации задачи, математического ожидания оптимального значения целевой функции на случайных входах и других аспектов.

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 12–01–00093–а, 13–07–00070–а, 12–01–33028–а и 13–01–91370СТ–а), целевых программ СО РАН (интеграционный проект № 7Б) и Президиума РАН (проект № 227).

Одним из естественных обобщений ЗН является многоиндексная задача о назначении (МЗН), имеющая много практических приложений. С обзором по МЗН можно ознакомиться в [25].

Сформулируем общую МЗН с параметрами m, n, r [11]:

$$\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\dots\sum_{i_m=1}^{n} c_{i_1 i_2 \dots i_m} x_{i_1 i_2 \dots i_m} \to \min_{x_{i_1 i_2 \dots i_m}\in\{0,1\}},$$

где $c_{i_1 i_2 \dots i_m}$ — заданные числа, при условиях

$$\sum_{i_{k_1}=1}^{n}\sum_{i_{k_2}=1}^{n}\dots\sum_{i_{k_r}=1}^{n} x_{i_1 i_2 \dots i_m} = 1$$

для любых $i_s = \overline{1,n}$, $s = \overline{1,m}$, $s \neq k_1, k_2, \dots, k_r$.

Случай $m = 2$ соответствует классической (двухиндексной) задаче о назначении (2-ЗН), которая решается точно за время $O(n^3)$ [10].

При $r = m - 1$ задача называется *аксиальной* (МАЗН):

$$\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\dots\sum_{i_m=1}^{n} c_{i_1 i_2 \dots i_m} x_{i_1 i_2 \dots i_m} \to \min_{x_{i_1 i_2 \dots i_m}\in\{0,1\}}$$

при ограничениях

$$\sum_{i_1=1}^{n}\dots\sum_{i_{s-1}=1}^{n}\sum_{i_{s+1}=1}^{n}\dots\sum_{i_m=1}^{n} x_{i_1 i_2 \dots i_m} = 1 \quad \text{для любых } \ i_s = \overline{1,n},\ s = \overline{1,m}.$$

В случае $r = 1$ задача называется *планарной* (МПЗН). Далее понадобится трёхиндексная планарная задача (3-ПЗН), сформулированная в виде задачи линейного целочисленного программирования:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_{ijk} x_{ijk} \to \min_{x_{ijk}\in\{0,1\}}$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ijk} = 1,\ j,k = \overline{1,n},\ \sum_{j=1}^{n} x_{ijk} = 1,\ i,k = \overline{1,n},\ \sum_{k=1}^{n} x_{ijk} = 1,\ i,j = \overline{1,n},$$

или в алгебраической форме:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij\pi^{(i)}(j)} \to \min_{\pi}$$

при условиях

$$\pi^{(i)}(k) \neq \pi^{(s)}(k),\ i,s = \overline{1,n},\ i \neq s,\ k = \overline{1,n};\ \ \pi^{(i)} \in S_n,\ i = \overline{1,n},$$

где S_n — симметрическая группа подстановок порядка n.

Содержательно 3-ПЗН состоит в выборе n^2 элементов трёхиндексной $(n{\times}n{\times}n)$-матрицы (c_{ijk}) таком, что в каждом её сечении выбрано ровно n элементов и сумма всех выбранных элементов минимальна. Под *сечением матрицы* понимается множество n^2 её элементов с фиксированным значением одного из индексов i, j или k, $1 \leqslant i,j,k \leqslant n$.

При числе индексов 3 и более аксиальная и планарная задачи NP-трудны [18, 19]. Это стимулирует разработку приближённых алгоритмов для МЗН с оценками качества получаемых решений. Хорошо изучены МЗН с числом индексов, равным три (3-ЗН). Для аксиальных и планарных 3-ЗН изучались свойства многогранника ограничений, которые используются для построения алгоритмов локального поиска и частичного перебора типа метода ветвей и границ [11, 15, 16, 24, 26].

В [3, 21] представлен асимптотически точный подход к построению алгоритмов решения МАЗН большой размерности на случайных входах. В [5] предложен приближённый алгоритм для решения МАЗН на одноциклических подстановках и получены условия, при которых этот алгоритм позволяет находить асимптотически точные решения МАЗН на случайно задаваемых входах.

Меньше результатов получено для МПЗН. Попытка построения приближённого асимптотически точного алгоритма решения 3-ПЗН на случайных входах предпринята в [12]. Однако приведённые там обоснования основаны на ошибочном утверждении [13, лемма 1] (см. замечание 3 из [2]).

В [4, 22] рассмотрена m-слойная (при $m < n/2$) 3-ПЗН, являющаяся модификацией классической 3-ПЗН. Данная задача NP-трудна при $m \geqslant 2$ [18, 19]. Для случая, когда элементы $(m \times n \times n)$-матрицы (c_{ijk}) являются случайными независимыми величинами, принимающими значения из отрезка $[a_n, b_n]$, где $b_n > a_n > 0$, с общей функцией распределения $\mathcal{F}_\xi(x) \geqslant x$ (мажорирующего типа), в [4] предложен приближённый алгоритм с временнóй сложностью $O(mn^2 + m^{7/2})$ и получены условия его асимптотической точности: $m \leqslant \ln n$ при $b_n/a_n = o(n/\ln n)$ [22] и $m = \Theta(n^{1-\theta})$ при $b_n/a_n = o(n^\theta)$ для любой константы θ, $0 < \theta < 1$ [4].

В [23] поставлена задача о m бродячих торговцах (m-peripatetic salesman problem, или m-PSP). Эта задача является m-слойной 3-ПЗНО, когда все слои трёхиндексной матрицы представлены одной и той же двухиндексной матрицей. Для задачи m-PSP на максимум с детерминированными исходными данными в многомерном евклидовом пространстве в [1] представлен асимптотически точный полиномиальный алгоритм. Там же проведено обоснование ограничения сверху (в терминах числа вершин графа) на число m рёберно не пересекающихся маршрутов коммивояжёра, при котором алгоритм имеет временну́ю сложность $O(n^3)$. В [6–9] представлены приближённые полиномиальные алгоритмы с гарантированными оценками точности для решения задач 2-PSP на минимум и на максимум при различных предположениях на весовые функции маршрутов коммивояжёра.

В настоящей статье построен приближённый алгоритм $\widetilde{A}$ решения m-слойной 3-ПЗНО для числа слоёв $m < n/4$ с временно́й сложностью $O(mn^2)$ и проведён его вероятностный анализ. Результатом анализа является обоснование условий асимптотической точности данного алгоритма на случайных входах с функцией равномерного распределения. Полученные условия верны и для функций распределения мажорирующего типа (мажорирующих равномерное распределение).

1. Постановка m-слойной 3-ПЗНО

Трёхиндексная m-слойная 3-ПЗНО в алгебраической форме формулируется следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij\pi^{(i)}(j)} \to \min_{\pi^{(i)},\, 1\leqslant i\leqslant m} \tag{1}$$

при условиях

$$\pi^{(i)}(k) \neq \pi^{(s)}(k), \quad 1 \leqslant i, s \leqslant m,\ i \neq s,\ 1 \leqslant k \leqslant n, \tag{2}$$

$$\pi^{(i)} \in P_n, \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \tag{3}$$

В формулировке задачи m целое, $2 \leqslant m < n$, c_{ijk} — заданные вещественные числа, $1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j,k \leqslant n$, P_n — множество одноциклических подстановок порядка n.

Под слоем матрицы $C = (c_{ijk})$ понимается подматрица исходных данных размера $n \times n$, которая получается при фиксированном значении индекса $i,\ 1 \leqslant i \leqslant m$.

2. Алгоритм приближённого решения задачи

Для решения задачи (1)–(3) при числе слоёв $m < n/4$ предлагается алгоритм $\widetilde{A}$, последовательно обрабатывающий слои матрицы (c_{ijk})

и строящий гамильтонов цикл в каждом слое i, $1 \leqslant i \leqslant m$. Для слоя i, применяя принцип «иди в ближайший непройденный город» $n - 4i$ раза, алгоритм находит частичный путь (цепь). Затем с помощью процедуры P_H частичный путь достраивается до гамильтонова цикла, при этом увеличивается множество запрещенных элементов для последующих слоев матрицы так, чтобы получаемые алгоритмом $\widetilde{A}$ гамильтоновы циклы реберно не пересекались.

2.1. Вспомогательная процедура P_H построения гамильтоновой цепи. Процедура P_H отыскивает в заданном n-вершинном неориентированном графе $G = (V, E)$ с минимальной степенью вершины больше $n/2$ гамильтонову цепь P с заданными концами u и v или гамильтонов цикл при $u = v$. Согласно известной теореме Дирака гамильтонов цикл в таком графе существует.

Описание процедуры P_H.

Этап 1. Пусть построена цепь $P = \{u = u_1, \ldots, u_k\}$, $k > 1$. Если $k = n$, то процедура заканчивает работу. В противном случае переходим на этап 2.

Этап 2. Ищем ребро вида $\{u_k, w\}$, где $w \notin P$, при этом $w = v$ только в случае $k = n - 1$. Если находим, то полагаем $P = \{u = u_1, \ldots, u_k, u_{k+1} = w\}$ и возвращаемся на этап 1. В противном случае переходим на этап 3.

Этап 3. Выбираем произвольную вершину $w \notin P$, при этом берём v, только когда $k = n - 1$. Находим $i \in \{1, \ldots, k - 2\}$, для которого существуют рёбра $\{u_k, u_i\}$ и $\{w, u_{i+1}\}$. Добавляем их к цепи и удаляем ребро $\{u_i, u_{i+1}\}$ (рис. 1). Возвращаемся на этап 1.

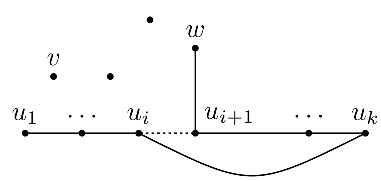

Рис. 1. Этап 3

Теорема 1. *Для заданного n-вершинного неориентированного графа $G = (V, E)$ с минимальной степенью вершины больше $n/2$ процедура P_H работает корректно. Временна́я сложность процедуры $O(n^2)$.*

Доказательство. Процедура корректна, если при $k < n$ на одном из этапов 2 или 3 может быть найдено ребро, удлиняющее цепь. Хотя бы один из более $n/2$ соседей u_k при $k \leqslant n/2$ находится вне P и отличен от v, поэтому такое ребро будет найдено на этапе 2. Допустим, что при $k > n/2$ ребро не найдено на этапе 2. Тогда более $n/2 - 2$ ($n/2 - 1$ при $k = n - 1$)

соседей u_k находятся среди вершин $\{u_1, \ldots, u_{k-2}\}$. У вершины w не более $n-1-k$ соседей вне P и оставшиеся более $k+1-n/2$ соседей находятся среди вершин $\{u_1, \ldots, u_{k-1}\}$. Согласно принципу Дирихле найдётся пара рёбер, указанных на этапе 3.

Заметим, что этап 1 выполняется не более n раз, так как после каждого выполнения к цепи добавляется одно ребро. Время его работы $O(\ln n)$ (сравнение k и n). На этапе 2 просматриваются все соседи u_k, а на этапе 3 — все соседи u_k и все соседи w, поэтому время работы каждого из них $O(n)$. Итоговое время работы процедуры $O(n^2)$. Теорема 1 доказана.

2.2. Описание алгоритма $\widetilde{A}$ решения задачи.

Этап 0. Запрещаем элементы c_{ijj}, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$. Полагаем $i=0$. Переходим на этап 1.

Этап 1. Полагаем $i=i+1$. При $i=m+1$ алгоритм заканчивает работу. Рассматриваем матрицу (c_{ijk}), $j,k=\overline{1,n}$. Полагаем $j=1$, $s=1$. Переходим на этап 2.

Этап 2. Если $s=n-4i$, то переходим на этап 3. Выбираем минимальный незапрещённый элемент в строке $\{c_{ijk} \mid k=\overline{1,n}\}$. Пусть это c_{ijk^*}. Полагаем $\pi_i(j)=k^*$. Запрещаем элементы c_{ikj}, $k=\overline{1,n}$. Полагаем $j=k^*$, $s=s+1$. Возвращаемся на начало этапа 2.

Этап 3. Рассматриваем неориентированный граф $G=(V,E)$,

$$V=\{1=j_1, j_2, \ldots, j_{n-s+1}, j_{n-s+2}=j\},$$

где $j_2, \ldots, j_{n-s+2}$ — номера строк матрицы (c_{ijk}), $j,k=\overline{1,n}$, которые не участвовали в этапе 2,

$$E=\{\{u,v\} \mid u,v\in V\}\backslash\big\{\{j,\pi_{i'}^{-1}(j)\},\ \{j,\pi_{i'}(j)\},\ i'=\overline{1,i};\ j=\overline{1,n}\big\}.$$

При помощи процедуры P_H строим в нём гамильтонову цепь с концами j_1 и j_{n-s+2}: $\{j_1=v_1, v_2, \ldots, v_{n-s+1}, v_{n-s+2}=j_{n-s+2}\}$. Полагаем $\pi_i(v_t)=v_{t-1}$, $t=n-s+2,\ldots,2$. Запрещаем элементы $c_{ij\pi_{i'}(j)}$, $c_{ij\pi_{i'}^{-1}(j)}$, $i<i'\leqslant m$, $j=\overline{1,n}$. Переходим на этап 1.

Теорема 2. *При $m<n/4$ алгоритм $\widetilde{A}$ корректно строит допустимое решение задачи за время $O(mn^2)$.*

Доказательство. Алгоритм последовательно обрабатывает слои входной матрицы $i=\overline{1,n}$. В конце обработки каждого слоя на этапе 3 делаются запреты, которые позволяют удовлетворить условие (2). Одноцикличность построенных подстановок гарантируется тем, что на этапе 2 осуществляется переход в строку k^*, а на этапе 3 построенная цепь гамильтонова. Рассмотрим граф G, построенный на этапе 3. Из равенства $s = n - 4i$ следует, что число его вершин равно $n - s + 2 = 4i + 2$. Из определения множества рёбер E следует, что степень каждой его вершины не менее $(4i + 2 - 1) - 2(i - 1) = 2i + 3$. Таким образом, выполняются условия теоремы 1 и процедура P_H работает корректно.

Следует отметить, что при $s = 1$ процедура строит гамильтонов цикл, но алгоритм также работает корректно. При обработке одного слоя этап 2 выполняется не более n раз, его временна́я сложность $O(n)$. Этап 3 выполняется ровно 1 раз для каждого слоя, его временна́я сложность $O(n^2)$. Таким образом, время обработки одного слоя равно $O(n^2)$, а итоговое время работы алгоритма — $O(mn^2)$. Теорема 2 доказана.

3. Общий вероятностный анализ алгоритма $\widetilde{A}$

Перейдём к вероятностному анализу точности алгоритма $\widetilde{A}$ для решения задачи на случайных входах, определяемых множеством $(m \times n \times n)$-матриц (c_{ijk}), где c_{ijk}, $1 \leqslant j,\ k \leqslant n$, $1 \leqslant i \leqslant m$, — независимые одинаково распределённые на отрезке $[a_n, b_n]$ случайные величины, $0 < a_n < b_n$. Далее такие случайные входы будем называть *лежащими в классе* $\mathcal{C}_{m,n}(a_n, b_n)$.

Через $f_A(I)$ и $\mathrm{OPT}(I)$ обозначим приближённое (полученное посредством алгоритма A) и оптимальное значение целевой функции задачи на входе I соответственно.

Будем говорить, что алгоритм A *имеет оценки* $(\varepsilon_A, \delta_A)$ на множестве вероятностных входов рассматриваемой задачи, если

$$\mathrm{Pr}\{f_A(I) > (1 + \varepsilon_A)\mathrm{OPT}(I)\} \leqslant \delta_A,$$

где ε_A — оценка относительной погрешности решения, получаемого алгоритмом A, δ_A — вероятность несрабатывания алгоритма A, т. е. δ_A равна доле случаев, когда алгоритм не гарантирует погрешности, не превосходящей ε_A. Представляется интересным поведение оценок δ_A и ε_A при увеличении размерности задачи.

Алгоритм A называется *асимптотически точным* на классе рассматриваемых задач, если существуют оценки ε_A и δ_A, стремящиеся к нулю с ростом размерности задачи.

Таким образом, оценки качества алгоритма $\widetilde{A}$ определяются неравенством

$$\mathrm{Pr}\left\{ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij\pi^{(i)}(j)} > (1 + \varepsilon_{\widetilde{A}})\mathrm{OPT}(I) \right\} \leqslant \delta_{\widetilde{A}}. \qquad (4)$$

Пусть $c'_{ijk} = (c_{ijk} - a_n)/(b_n - a_n) \in [0,1]$. Пусть $\xi_{ij} = (c_{ij\pi^{(i)}(j)} - a_n)/(b_n - a_n)$ — нормированные элементы матрицы (c'_{ijk}), выбранные алгоритмом $\widetilde{A}$.

Случайная величина ξ_{ij}, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1, n-4i-1}$, равна минимальному из незапрещённых элементов j-й обрабатываемой алгоритмом строки слоя i матрицы (c'_{ijk}). Подсчитаем количество запрещённых элементов в этой строке. Диагональный элемент запрещён на этапе 0. При обработке каждого предыдущего слоя запрещено по два элемента в каждой строке матрицы, а при обработке текущего слоя запрещено не более $j-1$ элементов в каждой его строке. Таким образом, при фиксированных i,j алгоритм выбирает элемент со случайной величиной ξ_{ij}, равной минимуму из не менее чем $n-1-2(i-1)-(j-1) = n-2i-j+2$ элементов в j-й строке слоя i. Каждую из величин ξ_{ij} оценим сверху случайной величиной η_{ij}, равной минимуму из $n-2i-j+2$ элементов в j-й строке слоя i матрицы (c'_{ijk}).

Учёт независимости этих величин и использование очевидных неравенств $\mathrm{OPT}(I) \geqslant mna_n$ и $c_{ijk} \leqslant b_n$ с наихудшим оцениванием выбранных на этапе 3 элементов $c_{ij\pi^{(i)}(j)}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{n-4i, n}$, приводит нас к достаточному условию для (4):

$$\Pr\left\{ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n-4i-1} \eta_{ij} > \varepsilon_{\widetilde{A}} \frac{mn}{b_n/a_n} - m(2m+3) \right\} \leqslant \delta_{\widetilde{A}}. \quad (5)$$

Применением следующей теоремы Петрова из [14] нахождение $\varepsilon_{\widetilde{A}}$ и $\delta_{\widetilde{A}}$ сводится к нахождению оценок для численных сумм.

Теорема 3. *Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины и $S = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Если*

$$\mathrm{E}e^{tX_k} \leqslant e^{\frac{1}{2}g_k t^2}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

при $0 \leqslant t \leqslant T$ для некоторых положительных постоянных T и $g_1, \ldots, g_n$, то

$$\Pr\{S > x\} \leqslant \begin{cases} e^{-x^2/2\mathcal{G}}, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant T\mathcal{G}, \\ e^{-Tx/2}, & \text{если } x \geqslant T\mathcal{G}, \end{cases}$$

где $\mathcal{G} = \sum\limits_{k=1}^{n} g_k$, а $\mathrm{E}X$ — математическое ожидание случайной величины X.

Лемма 1. *Пусть случайные величины* $\eta_{ij} - \mathrm{E}\eta_{ij}$ *для любых* $i = \overline{1,m}$ *и* $j = \overline{1, n-4i-1}$, *удовлетворяют условиям теоремы Петрова с постоянными* T *и* g_{ij}. *Тогда алгоритм* $\widetilde{A}$ *имеет следующие оценки качества:*

$$\varepsilon_{\widetilde{A}} = \left(2m + 3 + \frac{\overline{\mathcal{E}} + T\overline{\mathcal{G}}}{m}\right)\frac{b_n/a_n}{n}, \tag{6}$$

$$\delta_{\widetilde{A}} = e^{-\frac{T^2}{2}\overline{\mathcal{G}}}, \tag{7}$$

где $\overline{\mathcal{E}}$ *и* $\overline{\mathcal{G}}$ — *верхние оценки для сумм* $\mathcal{E} = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n-4i-1}\mathrm{E}\eta_{ij}$ *и* $\mathcal{G} = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n-4i-1} g_{ij}$ *соответственно.*

Доказательство. Продолжим неравенство (5):

$$\begin{aligned}
&\Pr\{f_{\widetilde{A}}(x) > (1+\varepsilon_{\widetilde{A}})\mathrm{OPT}(x)\} \\
&\qquad\leqslant \Pr\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n-4i-1}\eta_{ij} > \varepsilon_{\widetilde{A}}\frac{mn}{b_n/a_n} - m(2m+3)\right\} \\
&\leqslant \Pr\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n-4i-1}(\eta_{ij} - \mathrm{E}\eta_{ij}) > \varepsilon_{\widetilde{A}}\frac{mn}{b_n/a_n} - m(2m+3) - \overline{\mathcal{E}}\right\} \\
&\qquad\qquad = \Pr\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n-4i-1}(\eta_{ij} - \mathrm{E}\eta_{ij}) > T\overline{\mathcal{G}}\right\} \leqslant e^{-\frac{T^2}{2}\overline{\mathcal{G}}} = \delta_{\widetilde{A}}.
\end{aligned}$$

Здесь последние две строки получены заменой $\varepsilon_{\widetilde{A}}$ по формуле (6), применением теоремы Петрова и посредством формулы (7) для $\delta_{\widetilde{A}}$. Лемма 1 доказана.

3.1. Случай равномерного распределения.

Лемма 2 [20]. *Пусть* ζ_k, $k = \overline{1,n}$, — *независимые случайные величины, каждая из которых равна минимальному из* k *элементов матрицы, составленной из независимых случайных величин, равномерно распределённых на отрезке* $[0,1]$. *Тогда*

$$\mathrm{E}e^{t(\zeta_k - \mathrm{E}\zeta_k)} \leqslant \exp\left\{\frac{1}{2}\widetilde{g}_k t^2\right\},$$

где

$$\widetilde{g}_k = \begin{cases} 1/12\,, & \text{если } k = 1, \\ 11/36\,, & \text{если } k = 2, \\ \frac{11/5}{(k+1)^2}\,, & \text{если } 3 \leqslant k \leqslant n-1, \end{cases}$$

при любых t и k, $0 \leqslant t \leqslant 3$, $k = \overline{1,n}$.

Лемма 3. *В случае равномерного распределения элементов входной матрицы из класса $\mathcal{C}_{mn}(0,1)$ верно*

$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n-4i-1} \mathrm{E}\eta_{ij} \leqslant m \ln \frac{n}{2\sqrt{m}}.$$

Доказательство. Поскольку в рассматриваемом случае для любых $i = \overline{1,m}$ и $j = \overline{1,n}$ верно $\mathrm{E}\eta_{ij} = \frac{1}{n-2i-j+3}$, имеем

$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n-4i-1} \mathrm{E}\eta_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n-4i-1} \frac{1}{n-2i-j+3} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=2i+4}^{n-2i+2} \frac{1}{k}$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=2i+1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{2i}^{n} \frac{dx}{x} = \sum_{i=1}^{m} \ln \frac{n}{2i} = m \ln \frac{n}{2} - \ln m!$$
$$\leqslant m \ln \frac{n}{2} - \ln\left((\sqrt{m})^m\right) = m \ln \frac{n}{2\sqrt{m}}.$$

Лемма 3 доказана.

Определим величины g_{ij}, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, через величины $\tilde{g}_k$ из леммы 2 следующим образом: $g_{ij} = \tilde{g}_{n-2i-j+2}$.

Лемма 4. *Справедливо неравенство $\mathcal{G} = \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n-4i-1} g_{ij} \leqslant \frac{11}{8} \ln m$.*

Доказательство. Так как для любых $i = \overline{1,m}$ и $j = \overline{1,n}$ верно $g_{ij} \leqslant \frac{11}{4} \frac{1}{(n-2i-j+3)^2}$, получим

$$\mathcal{G} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n-4i-1} g_{ij} \leqslant \frac{11}{4} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n-4i-1} \frac{1}{(n-2i-j+3)^2}$$
$$\leqslant \frac{11}{4} \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=2i+4}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{11}{4} \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{2i+3}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{11}{4} \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2i+3} \leqslant \frac{11}{8} \ln m.$$

Лемма 4 доказана.

Далее положим верхние оценки равными $\overline{\mathcal{E}} = m \ln n$ и $\overline{\mathcal{G}} = 2 \ln n$.

Теорема 4. *При $\overline{\mathcal{G}} = 2 \ln n$ и $T = 3$ вероятность несрабатывания алгоритма $\widetilde{A}$ оценивается сверху как $\delta_{\widetilde{A}} = n^{-9}$.*

Доказательство. Утверждение теоремы непосредственно следует из формулы (7).

Теорема 5. *В случае равномерного распределения элементов входной матрицы из класса* $\mathcal{C}_{mn}(a_n, b_n)$, $2 \leqslant m < \ln n$, *и условия*

$$\frac{b_n}{a_n} = o(n/\ln n) \tag{8}$$

алгоритм $\widetilde{A}$ *асимптотически точен с оценкой относительной погрешности*

$$\varepsilon_{\widetilde{A}} = O\left(\frac{b_n/a_n}{n/\ln n}\right).$$

Доказательство. С использованием леммы 1 и оценок $\overline{\mathcal{E}} = m \ln n$ и $\overline{\mathcal{G}} = 2\ln n$ получим

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\widetilde{A}} &= \left(2m + 3 + \frac{\overline{\mathcal{E}} + T\overline{\mathcal{G}}}{m}\right)\frac{b_n/a_n}{n} \\ &= \left(2m + 3 + \ln n + \frac{2T}{m}\ln n\right)\frac{b_n/a_n}{n} \leqslant ((1+T)\ln n + 7)\frac{b_n/a_n}{n}.\end{aligned}$$

Последнее неравенство имеет место, поскольку максимум в рассматриваемой области достигается при $m = 2$, откуда $\varepsilon_{\widetilde{A}} = O\left(\frac{b_n/a_n}{n/\ln n}\right)$. Поскольку $\varepsilon_{\widetilde{A}} \to 0$ (с учётом (9)) и $\delta_{\widetilde{A}} = n^{-9} \to 0$ (по теореме 4) при $n \to \infty$, алгоритм $\widetilde{A}$ асимптотически точен. Теорема 5 доказана.

Теорема 6. *В случае равномерного распределения элементов входной матрицы из класса* $\mathcal{C}_{mn}(a_n, b_n)$, $\ln n \leqslant m \leqslant n^{1-\theta}$, *и условия*

$$\frac{b_n}{a_n} = o(n^{\theta}), \tag{9}$$

где θ *— некоторая постоянная такая, что* $2\frac{\ln 2}{\ln n} < \theta \leqslant 1 - \frac{\ln(\ln n)}{\ln n}$, *алгоритм* $\widetilde{A}$ *асимптотически точен с оценкой относительной погрешности*

$$\varepsilon_{\widetilde{A}} = O\left(\frac{b_n/a_n}{n^{\theta}}\right).$$

Доказательство. Ограничения на значения $\theta \in (0, 1)$ берутся из следующих соображений. С одной стороны, поскольку рассматриваемый интервал для m должен существовать, необходимо, чтобы $\ln n \leqslant n^{1-\theta}$.

С другой стороны, алгоритм $\widetilde{A}$ корректно работает только при $m < n/4$, поэтому добавляется условие $n^{1-\theta} < n/4$.

С использованием леммы 1 и оценок $\overline{\mathcal{E}} = m\ln n$ и $\overline{\mathcal{G}} = 2\ln n$ имеем

$$\varepsilon_{\widetilde{A}} = \left(2m + 3 + \frac{\overline{\mathcal{E}} + T\overline{\mathcal{G}}}{m}\right)\frac{b_n/a_n}{n} = \left(2m + 3 + \ln n + \frac{2T}{m}\ln n\right)\frac{b_n/a_n}{n}$$

$$\leqslant (3m + 3 + 2T)\,\frac{b_n/a_n}{n} \leqslant (3n^{1-\theta} + 3 + 2T)\,\frac{b_n/a_n}{n}.$$

В последних двух неравенствах использовано $\ln n \leqslant m \leqslant n^{1-\theta}$, откуда

$$\varepsilon_{\widetilde{A}} = O\!\left(\frac{b_n/a_n}{n^{\theta}}\right).$$

В силу (9) относительная погрешность алгоритма $\widetilde{A}$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Поскольку и $\delta_{\widetilde{A}} = n^{-9} \to 0$ (по теореме 4), алгоритм асимптотически точен. Теорема 6 доказана.

Замечание. Используя аргументы из [4], можно показать правомерность полученных результатов для любой функции распределения мажорирующего типа: $\mathcal{F}_{\xi}(x) \geqslant x$ для всякого $x \in [a_n, b_n]$.

Заключение

В настоящей статье рассмотрена m-слойная планарная 3-индексная задача о назначениях на одноциклических подстановках, иначе говоря, задача m-PSP с различными весовыми функциями. Для приближённого решения задачи с $m < n/4$ построен алгоритм $\widetilde{A}$ с временно́й сложностью $O(mn^2)$.

Результатом вероятностного анализа алгоритма $\widetilde{A}$ на случайных независимых входах мажорирующего типа является получение условий его асимптотической точности. В случае $2 \leqslant m < \ln n$ асимптотическая точность имеет место при выполнении условия $b_n/a_n = o(n/\ln n)$, а для $\ln n \leqslant m \leqslant n^{1-\theta}$ — условия $b_n/a_n = o(n^{\theta})$, где $0 < \theta < 1$ — любая константа такая, что рассматриваемый интервал для m существует.

Интересно отметить следующее. В [4] рассматривалась 3-m-ПЗН — та же задача, но без требования одноцикличности подстановок. Предложенный в [4] алгоритм приближённо решал её за время $O(mn^2 + m^{7/2})$, а полученные условия асимптотической точности были более узкими по сравнению с результатами данной статьи. Задача m-3-ПЗНО является частным случаем задачи m-3-ПЗН, а значит, алгоритм для решения первой задачи даст допустимое решение второй. Поскольку при проведении вероятностного анализа алгоритма $\widetilde{A}$ оптимум целевой функции $\mathrm{OPT}(I)$ заменён его нижней оценкой mna_n, все утверждения об асимптотической точности алгоритма будут верны и для задачи m-3-ПЗН. Тем самым при решении задачи m-3-ПЗНО дополнительно получен хороший алгоритм и для задачи m-3-ПЗН, имеющей более широкое множество допустимых решений.

Для дальнейших исследований представляет интерес построение алгоритма и проведение вероятностного анализа для частного случая рассматриваемой в данной статье задачи, когда все слои матрицы (c_{ijk}) одинаковы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бабурин А. Е., Гимади Э. Х.** Об асимптотической точности эффективного алгоритма решения задачи m-PSP на максимум в многомерном евклидовом пространстве // Тр. ИММ УрО РАН. — 2010. — Т. 16, № 3. — С. 12–24.
   Baburin A. E., Gimadi E. Kh. On the asymptotic optimality of an algorithm for solving the maximum m-PSP in a multidimensional Euclidean space // Proc. Steklov Inst. Math. — 2011. — Vol. 272, N 1 Suppl. — P. 1–13.
2. **Вознюк И. П., Гимади Э. Х., Филатов М. Ю.** Асимптотически точный алгоритм для решения задачи размещения с ограниченными объёмами производства // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. — 2001. — Т. 8, № 2. — С. 3–16.
3. **Гимади Э. Х.** Асимптотически точный подход к решению многоиндексной аксиальной задачи о назначении // Тр. XI Междунар. Байкальской школы-семинара. Пленарные доклады. — Иркутск: Изд. СЭИ СО РАН, 1998. — С. 62–65.
4. **Гимади Э. Х., Глазков Ю. В.** Об асимптотически точном алгоритме решения одной модификации планарной трёхиндексной задачи о назначениях // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. — 2006. — Т. 13, № 1. — С. 10–26.
   Gimadi E. Kh., Glazkov Yu. V. An asymptotically exact algorithm for one modification of planar three-index assignment problem // J. Appl. Industr. Math. — 2007. — Vol. 1, N 4. — P. 442–452.
5. **Гимади Э. Х., Коркишко Н. М.** Об одном алгоритме решения трёхиндексной аксиальной задачи о назначениях на одноциклических подстановках // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 2003. — Т. 10, № 2. — С. 35–45.
6. **Гимади Э. Х., Ивонина Е. В.** Приближённые алгоритмы решения задачи о двух коммивояжёрах на максимум // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2012. — Т. 19, № 1. — С. 17–32.
   Gimadi E. Kh., Ivonina E. V. Approximation algorithms for the maximum

2-peripatetic salesman problem // J. Appl. Industr. Math. — 2012. — Vol. 6, N 3. — P. 295–305.

7. **Глебов А. Н., Гордеева А. В., Замбалаева Д. Ж.** Алгоритм с оценкой 7/5 для задачи о двух коммивояжёрах на минимум с различными весовыми функциями // Сиб. электрон. мат. изв. — 2011. — Т. 8. — С. 296–309.
8. **Глебов А. Н., Замбалаева Д. Ж.** Полиномиальный алгоритм с оценкой точности 7/9 для задачи о двух коммивояжёрах на максимум // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2011. — Т. 18, № 4. — С. 17–48.
   Glebov A. N., Zambalaeva D. Zh. A polynomial algorithm with approximation ratio 7/9 for the maximum two peripatetic salesmen problem // J. Appl. Industr. Math. — 2012. — Vol. 6, N 3. — P. 69–89.
9. **Глебов А. Н., Замбалаева Д. Ж.** Приближённый алгоритм решения задачи о двух коммивояжёрах на минимум с различными весовыми функциями // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2011. — Т. 18, № 5. — С. 11–37.
10. **Диниц Е. А., Кронрод М. А.** Один алгоритм решения задачи о назначениях // Докл. АН СССР.— 1969. — Т. 189, № 1. — С. 23–25.
11. **Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. М.** Многогранники, графы, оптимизация. — М: Наука, 1981. — 342 с.
12. **Кравцов М. К., Крачковский А. П.** О полиномиальном алгоритме нахождения асимптотически оптимального решения трёхиндексной планарной проблемы выбора // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 2001. — Т. 41, № 2. — С. 342–345.
13. **Кравцов М. К., Крачковский А. П.** Асимптотическая оптимальность плана транспортной задачи, построенного методом минимального элемента // Кибернетика и систем. анализ. — 1999. — № 1. — С. 144–151.
14. **Петров В. В.** Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. — М.: Наука, 1987. — 317 с.
15. **Balas E., Saltzman M. J.** Facets of the three-index assignment polytope // Discrete Appl. Math. — 1989. — Vol. 23, N 3. — P. 201–229.
16. **Balas E., Saltzman M. J.** An algorithm for the three-index assignment problem // Oper. Res. — 1991. — Vol. 39, N 1. — P. 150–161.
17. **Burkard R., Dell'Amico M., Martello S.** Assignments. — Philadelphia: SIAM, 2009. — 382 p.
18. **Fon-Der-Flaass D. G.** Array of distinct representatives — a very simple NP-complete problem // Discrete Math. — 1997. — Vol. 171, N 1–3. — P. 295–298.
19. **Frieze A. M.** Complexity of a 3-dimensional assignment problem // Eur. J. Oper. Res. — 1983. — Vol. 13, N 2. — P. 161–164.
20. **Gimadi E. Kh.** On some probability inequalities in some discrete optimization problems // Oper. Res., 2005. Proc. — Berlin: Springer-Verl., 2006. — P. 283–289.
21. **Gimadi E. Kh., Kairan N. M.** Multi-index assignment problem: an asymp-

totically optimal approach // Proc. 8th IEEE Int. Conf. Emerging Technologies and Factory Automation (Antibes — Juan-les-Pins, France, 15–18 October 2001). — Paris: Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc., 2001. — P. 707–710.

22. **Gimadi E. Kh., Korkishko N. M.** On some modifications of the three-index planar assignment problem // Discrete optimization methods in production and logistics. 2nd Int. Workshop (Omsk — Irkutsk, July 20–27, 2004). Proc. DOM'2004. — Omsk: Nasledie Dialog-Sibir Pbs., 2004. — P. 161–165.
23. **Krarup J.** The peripatetic salesman and some related unsolved problems // Comb. Programming: Methods and Applications (Proc. NATO Adv. Study Inst., Versailles, 1974). — Dordrecht: Reidel, 1975. — P. 173–178.
24. **Magos D.** Tabu search for the planar three-index assignment problem // J. Global Optim. — 1996. — Vol. 8, N 1. — P. 35–48.
25. **Spieksma F. C. R.** Multi index assignment problems: complexity, approximation, applications // Nonlinear assignment problems, algorithms, and applications. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000. — P. 1–12.
26. **Vlach M.** Branch and bound method for the three-index assignment problem // Ekonomicko-Matematicky Obzor. — 1967. — Vol. 3. — P. 181–191.

Гимади Эдуард Хайрутдинович,
e-mail: gimadi@math.nsc.ru
Глазков Юрий Владимирович,
e-mail: yg@ngs.ru
Цидулко Оксана Юрьевна,
e-mail: tsidulko.ox@gmail.com

Статья поступила
19 декабря 2012 г.
Переработанный вариант —
29 марта 2013 г.