

УДК 519.8

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ПОКРЫТИЯ ПЛОСКОСТИ КРУГАМИ *)

И. И. Тахонов

Аннотация. Исследуются регулярные покрытия плоскости кругами. В таких покрытиях плоскость разбивается на правильные многоугольные плитки и все плитки покрываются одинаково. Под плотностью регулярного покрытия понимается отношение площади частей кругов, покрывающих плитку, к площади этой плитки. Ищутся наименее плотные покрытия кругами четырёх, пяти и шести радиусов. Установлены нижние границы на плотность, зависящие от радиусов входящих в покрытие кругов. Для некоторых известных покрытий показана их оптимальность в соответствующих классах. Построены новые покрытия, оптимальные в своих классах при дополнительных ограничениях на радиусы кругов.

Ключевые слова: покрытие плоскости кругами, плотность покрытия, регулярное покрытие, беспроводная сенсорная сеть.

Введение

Предметом исследования настоящей работы являются регулярные покрытия плоскости кругами. Цель исследования — построение наименее плотных регулярных покрытий кругами четырёх, пяти и шести различных радиусов. Рассматриваемая задача актуальна, в частности, при проектировании беспроводных сенсорных сетей (см. [1–3, 7, 8, 11, 13–15] и цитируемую в них литературу).

Пусть $\mathcal{C} = \{D_1, D_2, \dots\}$ — счётное семейство кругов $D_i = D(O_i, r_i)$, где $O_i \in \mathbb{R}^2$ — центр круга D_i , а r_i — его радиус. Семейство \mathcal{C} является *покрытием* плоскости, если каждая точка $x \in \mathbb{R}^2$ принадлежит хотя бы одному кругу из \mathcal{C} , т.е. $\mathbb{R}^2 \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$. Среди всех покрытий выделяются регулярные покрытия, определяемые в [2] следующим образом. Покрытие \mathcal{C} является *регулярным* из класса $\text{COV}_n(m, l)$, если

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 12-01-33028-мол-а-вед и 13-07-00139), а также Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашение 8227).

- (а) плоскость разбита на правильные n -угольники (плитки): $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j$;
- (б) все плитки покрываются единообразно m кругами l различных радиусов ($l \leq m$);
- (с) каждый узел решётки является центром одного из кругов.

Примером регулярного покрытия служит покрытие $T1$ [2, 10], в котором плоскость разбита на плитки в форме равносторонних треугольников, в вершинах плиток расположены центры кругов радиуса R , и любые три соседних круга пересекаются в единственной точке (рис. 1).

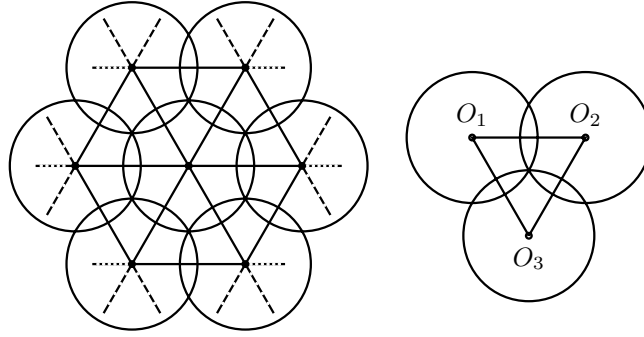


Рис. 1. Покрытие $T1$

Так как в регулярном покрытии все плитки покрываются одинаково, в дальнейшем ограничимся рассмотрением покрытия одной плитки. Под *плотностью* регулярного покрытия \mathcal{C} будем понимать отношение суммарной площади частей кругов, попавших внутрь плитки Ω_j , к площади этой плитки:

$$\rho(\mathcal{C}) = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} S(D_i \cap \Omega_j)}{S(\Omega_j)} \text{ для всех } j.$$

Здесь $S(\Omega)$ — площадь области Ω .

В частности, для покрытия $T1$ сумма площадей кругов внутри плитки равна $3R^2\sqrt{3}/4$, площадь плитки $S(\Omega_j)$ равна $\pi R^2/2$ и плотность покрытия $\rho(T1)$ равна $2\pi/(3\sqrt{3})$.

Задача поиска наименее плотных регулярных покрытий исследована не полностью. Оптимальные покрытия известны лишь для некоторых классов. В [10] показано, что покрытие $T1$ наименее плотно среди покрытий плоскости кругами одного радиуса. Очевидно, что $T1$ принадлежит

классу $\text{COV}_3(3, 1)$ и наименее плотно в нём. В [2] показано, что оно оптимально в большем классе $\text{COV}_3(3, 3)$. Кроме того, в этой работе построены покрытия $T3 \in \text{COV}_3(4, 4)$ и $Q3 \in \text{COV}_4(5, 2)$, $\rho(T3) = 11\pi/(18\sqrt{3}) \approx 1.1084$, $\rho(Q3) = 3\pi/8 \approx 1.1781$, наименее плотные в своих классах. Ряд других моделей покрытия с треугольной и квадратной плитками предложен в [7, 11, 13–15]. В частности, в [11] приводятся регулярные покрытия из классов $\text{COV}_3(7, 3)$ и $\text{COV}_4(9, 3)$ с плотностью, близкой к 1.071 и 1.098 соответственно. В [12] установлено, что плотность покрытия, содержащего круги двух радиусов, не может быть меньше 1.0189, и построена серия покрытий с плотностями, близкими к указанной границе. Эти покрытия принадлежат классу $\text{COV}_3(p, 2)$ при достаточно большом p .

В [3, 8] исследуются покрытия протяжённых объектов и предлагаются несколько моделей регулярных покрытий полос, связанных с регулярными покрытиями плоскости. В литературе также рассмотрены различные задачи выбора совокупности наименее плотных покрытий, имеющие приложения в области оптимизации работы беспроводных сенсорных сетей [1, 4, 5, 9].

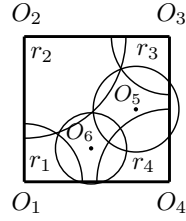


Рис. 2. Покрытие плитки

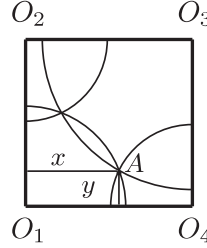


Рис. 3. Иллюстрация к теореме 1

В настоящей работе исследуется проблема поиска наименее плотных покрытий в классах $\text{COV}_4(4, 4)$, $\text{COV}_4(5, 5)$ и $\text{COV}_4(6, 6)$. Опишем используемые обозначения. Пусть $\mathcal{C} \in \text{COV}_4(6, 6)$ — покрытие плоскости. Рассмотрим плитку $O_1O_2O_3O_4$. Полагаем, что длины её сторон равны 1. Будем называть *основными кругами* те круги покрытия, центры которых находятся в вершинах плитки. Круг с центром в O_i обозначим через D_i , а его радиус — через r_i ($i = 1, 2, 3, 4$). Оставшиеся два круга покрытия назовём *вспомогательными* и обозначим через D_5 и D_6 . Центры и радиусы этих кругов — O_i и r_i ($i = 5, 6$) (рис. 2). Для краткости через r_{\max} будем обозначать наибольший из радиусов r_i ($i = \overline{1, 6}$). Плотность покрытия \mathcal{C} вычисляется следующим образом:

$$\rho(\mathcal{C}) = \pi \cdot \left(\frac{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2}{4} + r_5^2 + r_6^2 \right).$$

Аналогичные обозначения используются и для покрытий из $\text{COV}_4(4, 4)$ и $\text{COV}_4(5, 5)$.

1. Наименее плотные покрытия в классе $\text{COV}_4(4, 4)$

В [2] показано, что когда все основные круги пересекаются в единственной точке наименее плотно в $\text{COV}_4(4, 4)$ покрытие $Q1$, в котором плитка покрывается одинаковыми кругами радиуса $\sqrt{2}/2$ (рис. 14(a)). Плотность этого покрытия, очевидно, равна $\pi/2$. Однако, если снять это ограничение и рассматривать покрытия такие, что $D_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap D_4 = \emptyset$, плотность может быть понижена до $3\pi/8$.

Теорема 1. *Наименее плотными в $\text{COV}_4(4, 4)$ являются*

(i) *покрытие $Q1$ при $r_{\max} \leq \sqrt{2}/2$:*

$$r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = \sqrt{2}/2, \quad \rho(Q1) = \frac{\pi}{2};$$

(ii) *покрытие Q_{44}^1 , изоморфное $Q3$ [2], при $\frac{\sqrt{2}}{2} < r_{\max} \leq 1$:*

$$r_1 = r_3 = \frac{\sqrt{10}}{4}, \quad r_2 = r_4 = \frac{\sqrt{2}}{4}, \quad \rho(Q_{44}^1) = \frac{3\pi}{8};$$

(iii) *покрытие Q_{44}^2 , изоморфное $Q3$, при $r_{\max} > 1$:*

$$r_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad r_3 = \frac{1}{2}, \quad r_2 = r_4 = 0, \quad \rho(Q_{44}^2) = \frac{3\pi}{8}.$$

Доказательство. Утверждение (i) очевидно: при указанных ограничениях $Q1$ — единственное допустимое покрытие. Докажем (ii).

Пусть \mathcal{C} — покрытие. Если в \mathcal{C} $r_1 + r_3 = r_2 + r_4 = \sqrt{2}$, то, как отмечено выше, $\rho(\mathcal{C}) \geq \pi/2$. Поэтому считаем, что $r_1 + r_3 > \sqrt{2}$. Через A обозначим ближайшую к O_4 точку пересечения D_1 и D_3 , через x — расстояние от O_1 до проекции A на O_1O_4 , а через y — расстояние от O_1 до проекции A на O_1O_2 (рис. 3). Очевидно, что

$$r_1^2 = x^2 + y^2, \quad r_3^2 = (1-x)^2 + (1-y)^2, \quad r_2^2 = r_4^2 = (1-x)^2 + y^2.$$

Тогда

$$\rho(\mathcal{C}) = \frac{\pi}{4} \cdot ((x^2 + y^2) + ((1-x)^2 + y^2) + 2((1-x)^2 + y^2)) \geq \frac{3\pi}{8},$$

причём равенство в оценке достигается при $x = 3/4$ и $y = 1/4$. Соответствующие значения радиусов равны $r_1 = r_3 = \sqrt{10}/4$, $r_2 = r_4 = \sqrt{2}/4$.

Обозначим покрытие с такими параметрами через Q_{44}^1 . Фрагмент этого покрытия изображён на рис. 14(b).

Докажем утверждение (iii). Заметим, что если центр круга радиуса $r_i > 1$ находится не в вершине плитки и в \mathcal{C} больше одного круга радиуса $r_i > 1$ или в \mathcal{C} есть круги радиуса $r_i \geq \sqrt{2}$, то $\rho(\mathcal{C}) > \pi/2$. Считаем, что $r_1 > 1$ и D_1 — основной круг. Очевидно, что $r_2 = r_4 = 0$, а $r_3 = 1 - \sqrt{r_1^2 - 1}$,

$$\rho(\mathcal{C}) = \frac{\pi}{4} \cdot (r_1^2 + (1 - \sqrt{r_1^2 - 1})) \geq \frac{3\pi}{8},$$

причём равенство достигается при $r_1 = \sqrt{5}/2$, $r_3 = 1/2$. Обозначим покрытие с такими параметрами через Q_{44}^2 . Фрагмент этого покрытия изображён на рис. 14(c).

Заметим, что построенные покрытия принадлежат классу $\text{COV}_4(4, 4)$, но изоморфны описанному в [2] покрытию $Q3 \in \text{COV}_4(5, 2)$. Теорема 1 доказана.

2. Вспомогательные утверждения

В следующих разделах исследуются покрытия из классов $\text{COV}_4(5, 5)$ и $\text{COV}_4(6, 6)$. Докажем несколько вспомогательных утверждений, которые помогут сократить число рассматриваемых случаев взаимного расположения кругов в покрытии.

Теорема 2 [6]. Пусть M_n — n -угольник, вписанный в круг D . Тогда

$$\frac{S(D)}{S(M_n)} \geq \frac{2\pi/n}{\sin \frac{2\pi}{n}}. \quad (1)$$

Заметим, что соотношение (1) верно и в случае, когда некоторые из вершин многоугольника лежат внутри круга, а не на его границе.

Лемма 1. Пусть $\mathcal{C} \in \text{COV}_4(6, 6)$ и $r_5 \geq 1/2$. Тогда $\rho(\mathcal{C}) \geq 3\pi/8$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что если $r_6 \geq 1/2$, то $\rho(\mathcal{C}) \geq \pi/2$ и неравенство выполнено. Поэтому далее полагаем, что $r_6 < 1/2$. Возможны несколько случаев расположения вспомогательных кругов.

СЛУЧАЙ 1: D_5 и D_6 не пересекают одну из сторон плитки (рис. 4(a)).

Пусть сторона O_1O_2 покрыта только вспомогательными кругами. Тогда $r_1 + r_2 \geq 1$, следовательно,

$$\rho(\mathcal{C}) \geq \pi \left(\frac{r_1^2 + r_2^2}{4} + r_5^2 \right) \geq \pi \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) = \frac{3\pi}{8}.$$

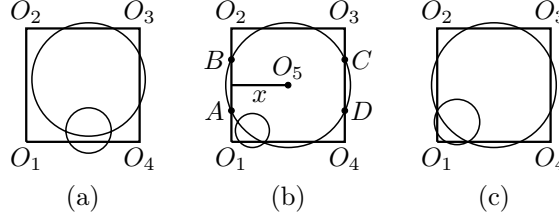


Рис. 4. Иллюстрация к доказательству леммы 1

СЛУЧАЙ 2: каждая сторона плитки пересекается по крайней мере с одним вспомогательным кругом и D_6 пересекает только одну сторону (рис. 4(b)).

Найдутся две противоположные стороны, покрываемые только основными кругами и D_5 (например, стороны O_1O_2 и O_3O_4). Пусть O_1O_2 пересекается с D_5 в точках A и B , а O_3O_4 — в C и D . Обозначим через x расстояние от O_5 до O_1O_2 . Тогда

$$r_1 \geq |O_1A|, \quad r_2 \geq |O_2B|, \quad r_3 \geq |O_3C|, \quad r_4 \geq |O_4D|.$$

Кроме того,

$$r_5^2 - x^2 = \frac{[1 - (|O_1A| + |O_2B|)]^2}{4},$$

$$r_5^2 - (1 - x)^2 = \frac{[1 - (|O_3C| + |O_4D|)]^2}{4}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\rho(C)}{\pi} &\geq \frac{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2}{4} + r_5^2 \geq \frac{|O_1A|^2 + |O_2B|^2 + |O_3C|^2 + |O_4D|^2}{4} \\ &+ \frac{x^2 + (1 - x)^2}{2} + \frac{[1 - (|O_1A| + |O_2B|)]^2 + [1 - (|O_3C| + |O_4D|)]^2}{8} \\ &\geq \frac{1}{4} + \frac{1}{8}([|O_1A| + |O_2B|]^2 + [1 - (|O_1A| + |O_2B|)]^2) + \frac{1}{8}([|O_3C| \\ &+ |O_4D|]^2 + [1 - (|O_3C| + |O_4D|)]^2) \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Оценка точна. Неравенства в цепочке обращаются в равенства, когда $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 1/4$, $r_5 = \sqrt{5}/4$, $r_6 = 0$ и центр D_5 расположен в центре плитки (рис. 5). Это покрытие изоморфно $Q3$.

СЛУЧАЙ 3: каждая сторона плитки пересекается хотя бы с одним вспомогательным кругом и D_6 пересекает две смежные стороны (рис. 4(c)). Доказательство аналогично случаю 2. Лемма 1 доказана.

Таким образом, далее можно ограничиться рассмотрением покрытий, в которых радиусы вспомогательных кругов не превосходят $1/2$. Заметим, что утверждение леммы верно и для покрытий из класса $\text{COV}_4(5, 5)$.

Лемма 2. Пусть $\mathcal{C} \in \text{COV}_4(6, 6)$ — покрытие такое, что $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$ и $D_3 \cap D_4 \neq \emptyset$. Обозначим через A (B) лежащую внутри плитки точку пересечения D_1 и D_2 (D_3 и D_4). Если $A, B \in D_5$ (рис. 6), то $\rho(\mathcal{C}) \geq 3\pi/8$.

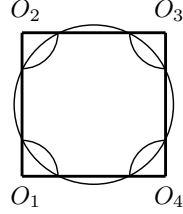
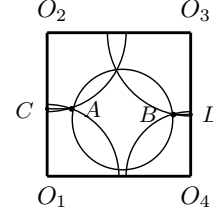
Рис. 5. Покрытие $Q3$ 

Рис. 6. Иллюстрация к лемме 2

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности полагаем, что точки A и B лежат на границе D_5 и $r_5 \leq 1/2$. Через C обозначим проекцию A на O_1O_2 , а через D — проекцию B на O_3O_4 . Тогда $r_1^2 = |O_1C|^2 + |AC|^2$, $r_2^2 = (1 - |O_1C|)^2 + |AC|^2$, $r_3^2 = |O_3D|^2 + |BD|^2$ и $r_4^2 = (1 - |O_3D|)^2 + |BD|^2$. Кроме того, $r_5 \geq \frac{1 - (|AC| + |BD|)}{2}$. Оценим плотность покрытия:

$$\begin{aligned} \frac{\rho(\mathcal{C})}{\pi} &\geq \frac{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2}{4} + r_5^2 \\ &= \frac{|O_1C|^2 + (1 - |O_1C|)^2 + |O_3D|^2 + (1 - |O_3D|)^2 + 2[|AC|^2 + |BD|^2]}{4} + r_5^2 \\ &\geq \frac{1/2 + 1/2 + [(|AC| + |BD|)^2 + (1 - (|AC| + |BD|))^2]}{4} \\ &\geq \frac{1/2 + 1/2 + 1/2}{4} = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Оценка точна. Неравенства в цепочке обращаются в равенства, когда $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = \sqrt{5}/4$, $r_5 = 1/4$, $r_6 = 0$ и центр D_5 совпадает с центром плитки. Это покрытие $Q3$. Лемма 2 доказана.

Заметим, что лемма 2 верна и для покрытий класса $\text{COV}_4(5, 5)$.

Леммы 1 и 2 позволяют оценить плотность покрытия в случае, когда основные круги, расположенные в противоположных вершинах плитки, не пересекаются. Рассмотрим теперь случай, когда $r_1 + r_3 \geq \sqrt{2}$. Пусть $\mathcal{C} \in \text{COV}_4(5, 5)$ и $D_1 \cap D_3 \neq \emptyset$ (рис. 7). Диагональ O_1O_3 разбивает плитку на два прямоугольных треугольника $\triangle O_1O_2O_3$ и $\triangle O_1O_4O_3$. Рассмотрим

отдельно покрытие каждого из них и обозначим их через

$$\rho_{\Delta_1}(\mathcal{C}) = \sum_{D \in \mathcal{C}} S(D \cap \triangle O_1 O_2 O_3) = \sum_{i=1}^5 S(D_i \cap \triangle O_1 O_2 O_3),$$

$$\rho_{\Delta_2}(\mathcal{C}) = \sum_{i=1}^5 S(D_i \cap \triangle O_1 O_4 O_3).$$

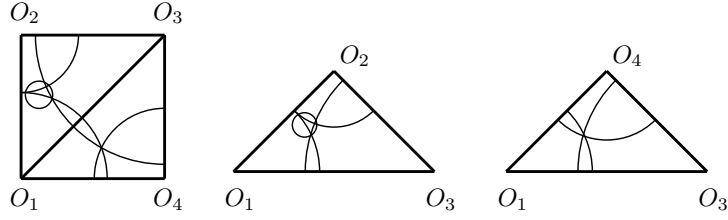


Рис. 7. Покрытие плитки при $r_1 + r_3 \geq \sqrt{2}$

Очевидно, что $\rho(\mathcal{C}) = \rho_{\Delta_1}(\mathcal{C}) + \rho_{\Delta_2}(\mathcal{C})$.

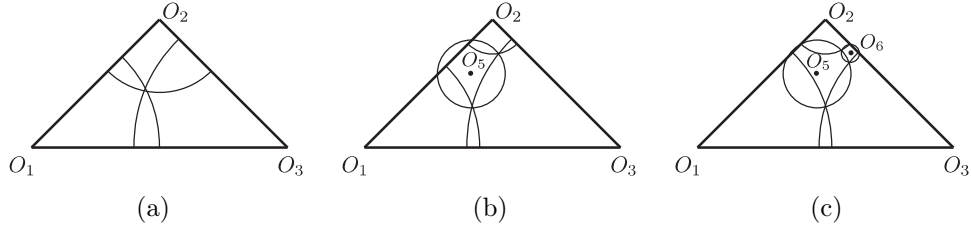


Рис. 8. Покрытия частей плитки

Лемма 3. Пусть \mathcal{C}_1 и \mathcal{C}_2 — покрытия такие, что $\triangle O_1 O_2 O_3$ покрывается тремя и четырьмя кругами, причём $r_1 + r_3 \geq \sqrt{2}$ (рис. 8(a) и 8(b)). Тогда

(i) существует покрытие \mathcal{C}'_1 такое, что $\triangle O_1 O_2 O_3$ покрыт тремя кругами радиусов r'_i ($i = 1, 2, 3$) и

$$r'_1 = r'_3 = \sqrt{\frac{r_1^2 + r_3^2}{2}}, \quad r'_2 \leq r_2;$$

(ii) существует покрытие \mathcal{C}'_2 такое, что $\triangle O_1 O_2 O_3$ покрыт четырьмя кругами радиусов r'_i ($i = 1, 2, 3, 5$) и

$$r'_1 = r'_3 = \sqrt{\frac{r_1^2 + r_3^2}{2}}, \quad \frac{(r'_2)^2}{4} + \frac{(r'_5)^2}{4} \leq \frac{r_2^2}{4} + r_5^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО утверждения (i) незначительно отличается от доказательства п. (ii) теоремы 1. Докажем (ii).

Для сокращения объёма выкладок ограничимся рассмотрением случая, когда $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$ и $D_2 \cap D_3 \neq \emptyset$ (рис. 9(a)). Пусть A — точка пересечения D_1 и D_2 , B — точка пересечения D_2 и D_3 , C — точка пересечения D_1 и D_3 , D — проекция C на O_1O_3 , $\varphi = \angle O_1O_2A$, $\alpha = \angle AO_2O_5$, $d = |O_2O_5|$, $K = r_1^2 + r_3^2$. Без ограничения общности считаем, что A , B и C принадлежат границе D_5 (иначе радиусы некоторых кругов можно уменьшить) и для определённости $\varphi \in [0, \pi/4]$. Тогда

$$\begin{aligned} K &= r_1^2 + r_3^2 = |O_1A|^2 + |O_3B|^2 \\ &= [1 + r_2^2 - 2r_2 \cos(\varphi - \alpha)] + [1 + r_2^2 - 2r_2 \cos(\pi/2 - \varphi - \alpha)] \\ &= 2 + 2r_2^2 - 4r_2 \cos(\pi/4 - \alpha) \cos(\pi/4 - \varphi). \end{aligned} \quad (2)$$

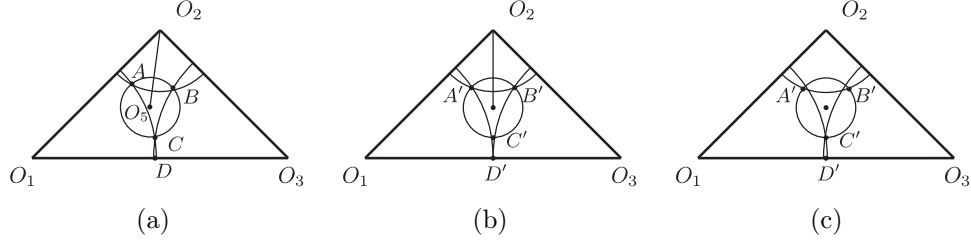


Рис. 9. Иллюстрация к доказательству леммы

Кроме того, так как $C \in D_1 \cap D_3$, имеем

$$\begin{aligned} K &= r_1^2 + r_3^2 = |O_1C|^2 + |O_3C|^2 \\ &= 2|CD|^2 + |AD|^2 + (\sqrt{2} - |AD|)^2 \geq 2|CD|^2 + 1. \end{aligned} \quad (3)$$

Произведём следующее преобразование покрытия: (а) центр D_5 переместим на срединный перпендикуляр к O_1O_3 на расстояние d от O_2 (пусть D_5 пересекает D_2 в точках A' и B'); (б) положим $r_1 = r_2 = |O_1A'|$. Построенную совокупность кругов обозначим через $\mathcal{C}_2^{(1)}$. Заметим, что $\mathcal{C}_2^{(1)}$, вообще говоря, не образует покрытия: некоторые точки треугольника могут остаться непокрытыми (рис. 9(b)). Обозначим через C' ближайшую к O_1O_3 точку D_5 , а через D' — проекцию C' на O_1O_3 . Заметим, что $|C'D'| \leq |CD|$. При преобразовании радиусы r_2 и r_5 не изменились, $\angle A'O_2O_5 = \alpha$. Следовательно, в силу (2) имеем

$$\begin{aligned} |O_1A'|^2 + |O_3B'|^2 &= 2 + 2r_2^2 - 4r_2 \cos(\pi/4 - \alpha) \\ &\leq 2 + 2r_2^2 - 4r_2 \cos(\pi/4 - \alpha) \cos(\pi/4 - \varphi) = |O_1A|^2 + |O_3B|^2 = K. \end{aligned}$$

Увеличим теперь r_1 и r_2 до $|O_1C'|$. Получим совокупность кругов $\mathcal{C}_2^{(2)}$, которая уже является покрытием, причём в силу (3)

$$\begin{aligned} |O_1C'|^2 + |O_3C'|^2 &= 2|C'D'|^2 + 2|O_1D'|^2 \\ &= 2|C'D'|^2 + 1 \leq 2|CD|^2 + 1 \leq K. \end{aligned}$$

Увеличив r_1 и r_2 до $\sqrt{K/2}$, получим покрытие $\mathcal{C}_2^{(3)}$: $\rho_{\Delta_1}(\mathcal{C}_2) = \rho_{\Delta_1}(\mathcal{C}_2^{(3)})$. Уменьшив теперь радиусы r_2 и r_5 так, чтобы A', B', C' лежали на границе $D_2 \cup D_5$, преобразуем $\mathcal{C}_2^{(3)}$ в искомое \mathcal{C}_2' . Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Пусть \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 и \mathcal{C}_3 — покрытия, в которых $\triangle O_1O_2O_3$ покрывается тремя, четырьмя и пятью кругами соответственно, причём $r_1 + r_3 \geq \sqrt{2}$ (рис. 10). Тогда

- (i) $\rho_{\Delta_1}(\mathcal{C}_1) \geq 3\pi/16 = 0.1875\pi$;
- (ii) $\rho_{\Delta_1}(\mathcal{C}_2) \geq g_2^*\pi > 0.17409\pi$, где g_2^* — минимум функции

$$g_2(x, y) = \frac{1}{4} + \frac{3y^2}{2} - \frac{y\sqrt{2}}{4} + x^2 - \frac{x}{2} + \frac{xy\sqrt{2}(1-2x)^2}{2(1-2x+2x^2)} \quad (4)$$

в области $\{0 \leq x \leq 0.5, 0 \leq y \leq x, y + x\sqrt{2} \leq 1/\sqrt{2}\}$;

- (iii) $\rho_{\Delta_1}(\mathcal{C}_3) \geq \frac{\pi}{12\sqrt{2-\sqrt{3}}} > 0.16098\pi$.

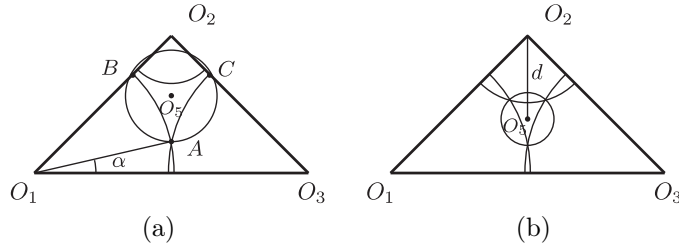


Рис. 10. Иллюстрация к доказательству леммы 4

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (i) следует из п. (ii) теоремы 1.

Докажем п. (ii). По лемме 3 достаточно рассмотреть покрытия, в которых $r_1 = r_3$ и центр D_5 лежит на срединном перпендикуляре к O_1O_3 . Возможны два случая: $r_1 + r_2 < 1$ и $r_1 + r_2 \geq 1$.

СЛУЧАЙ 1: $r_1 + r_2 < 1$ (рис. 10(a)). Обозначим через A точку пересечения D_1 и D_3 , через B и C — точки пересечения D_1 и D_3 со сторонами плитки, а через α — угол $\angle AO_1O_3$. Очевидно, что

$$r_1 = \frac{1}{\sqrt{2} \cos \alpha}, \quad r_5 \geq \frac{|BC|}{2 \sin \angle BAC} = \frac{1 - r_1}{\sqrt{2} \sin(\pi/4 + \alpha)}.$$

Следовательно,

$$\frac{\rho_{\Delta_1}(\mathcal{C}_2)}{\pi} \geq \frac{r_1^2}{4} + r_5^2 = \frac{1}{8 \cos^2 \alpha} + \frac{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2} \cos \alpha}\right)^2}{2 \sin^2(\pi/4 + \alpha)} = g(\alpha).$$

При $\alpha \in [0, \pi/4]$ $g(\alpha) > 0.17864$ и неравенство верно.

СЛУЧАЙ 2: $r_1 + r_2 \geq 1$ (рис. 10(b)). Обозначим $d = |O_2 O_5|$. Выражая радиусы r_1 и r_2 через r_5 и d , убеждаемся в истинности оценки:

$$\frac{\rho_{\Delta_1}(\mathcal{C}_2)}{\pi} = \frac{1}{4} + \frac{3r_5^2}{2} - \frac{r_5\sqrt{2}}{4} + d^2 - \frac{d}{2} + \frac{dr_5\sqrt{2}(1-2d)^2}{2(1-2d+2d^2)} = g_2(d, r_5). \quad (5)$$

Докажем (iii). Воспользуемся теоремой 2. Пусть $O_1 O_2 O_3 O_4$ — квадрат, полученный отражением $\Delta O_1 O_2 O_3$ относительно $O_1 O_3$. Рассмотрим регулярное покрытие плоскости \mathcal{C}' плиткой $O_1 O_2 O_3 O_4$. Пусть $D_k, D_l \in \mathcal{C}'$ и D_k пересекает D_l в точках A_{kl}, B_{kl} . Хорды $\{A_{kl} B_{kl}\}$ разбивают плоскость на множество вписанных многоугольников, при этом, как несложно заметить, количество сторон у этих многоугольников не превышает 24. В силу (1) имеем $\rho(\mathcal{C}') \geq \frac{\pi}{12 \sin(\pi/12)}$. Следовательно,

$$\rho_{\Delta_1}(\mathcal{C}) = \rho(\mathcal{C}')/2 \geq \frac{\pi}{24 \sin(\pi/12)} = \frac{\pi}{12\sqrt{2-\sqrt{3}}}.$$

Лемма 4 доказана.

3. Наименее плотные покрытия в $\text{COV}_4(5, 5)$ и $\text{COV}_4(6, 6)$

Доказанные выше утверждения позволяют получить оценки на плотности покрытий в классах $\text{COV}_4(5, 5)$ и $\text{COV}_4(6, 6)$.

Теорема 3. *Наименее плотны в $\text{COV}_4(5, 5)$*

(i) *покрытие $Q2$ [2], изоморфное $Q1$, при $r_{\max} \leq 1/2$:*

$$r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r_5 = 1/2, \quad \rho(Q2) = \pi/2 \approx 1.5708;$$

(ii) *покрытие $Q3$ (рис. 14(e)) при $r_{\max} \in (1/2, \sqrt{2}]$:*

$$r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = \sqrt{5}/4, \quad r_5 = 1/4, \quad \rho(Q3) = 3\pi/8 \approx 1.1781;$$

(iii) *покрытие Q_{55}^1 (рис. 14(f)) при $r_{\max} \in (1/\sqrt{2}, 1]$:*

$$r_1 = r_3 = \sqrt{1 + (x_* + y_*)^2 - \sqrt{2}(x_* + y_*)} \approx 0.773,$$

$$r_2 = \sqrt{(x_* + y_*)^2 - \frac{2x_* y_*}{x_*^2 - \sqrt{2}x_* + 1}} \approx 0.282,$$

$$r_4 = x_* + y_* \approx 0.395, \quad r_5 = x_* \approx 0.079,$$

где (x_*, y_*) — точка минимума функции

$$f(x, y) = (x + y)^2 + y^2 - \frac{x + y}{\sqrt{2}} - \frac{xy}{2(x^2 - \sqrt{2}x + 1)} + \frac{1}{2}$$

в области $\{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq \sqrt{2}\}$. Плотность покрытия $\rho(Q_{55}^1)$ равна $f(x_*, y_*)\pi \approx 0.3638\pi = 1.14304$;

(iv) покрытие Q_{44}^2 , определённое в теореме 1, при $r_{\max} > 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $r_{\max} \leq 1/2$ допустимое покрытие Q_2 единственно и утверждение (i) очевидно.

Пусть \mathcal{C} — покрытие, удовлетворяющее условию п. (ii). Если в \mathcal{C} две противоположные стороны плитки не полностью покрыты основными кругами (рис. 11(a)), то $r_5 \geq 1/2$, следовательно, $\rho(\mathcal{C}) \geq 3\pi/8$. Если, наоборот, найдутся две противоположные стороны, полностью покрытые основными кругами (рис. 11(b)), то $\rho(\mathcal{C}) \geq 3\pi/8$ по лемме 2. В случае, когда две смежные стороны покрыты основными кругами, а другие две нет (рис. 11(c)), используя теорему 2, можно доказать, что $\rho(\mathcal{C}) > 3\pi/8$.

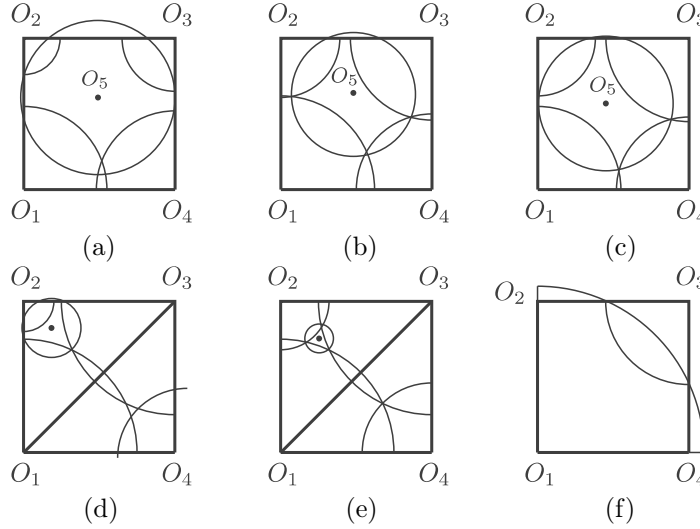


Рис. 11. Взаимные расположения кругов в $\mathcal{C} \in \text{COV}_4(5, 5)$

Докажем (iii). Пусть \mathcal{C} — покрытие такое, что $r_1 + r_3 \geq \sqrt{2}$. Для определённости считаем, что центр вспомогательного круга D_5 лежит в $\triangle O_1 O_2 O_3$. Согласно лемме 3 можно ограничиться рассмотрением случая $r_1 = r_3$. Если $r_1 + r_2 < 1$ (рис. 11(d)), то по лемме 4 в силу (5) имеем

$$\rho(\mathcal{C}) = \rho_{\Delta_1}(\mathcal{C}) + \rho_{\Delta_2}(\mathcal{C}) > (0.1786 + 0.1875)\pi = 0.3661\pi,$$

и доказываемая оценка верна. Пусть $r_1 + r_2 \geq 1$ (рис. 11(е)). Обозначим через d длину отрезка O_2O_5 . Выражая радиусы основных кругов через r_5 и d , приходим к выражениям

$$\begin{aligned} r_1^2 &= r_3^2 = 1 + (d + r_5)^2 - \sqrt{2}(d + r_5), \\ r_2 &= (d + r_5)^2 - \frac{2dr_5}{d^2 - \sqrt{2}d + 1}, \\ r_4 &= d + r_5, \quad \frac{\rho(C)}{\pi} = \frac{2r_1^2 + r_2^2 + r_4^2}{4} + r_5^2 = f(d, r_5). \end{aligned}$$

Доказательство п. (iv) повторяет доказательство п. (iii) теоремы 1. Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Наименее плотны в $COV_4(6, 6)$*

(i) *покрытие Q_{66}^1 (рис. 14(g)) при $r_{\max} \leq 1/2$:*

$$r_1 = r_3 = 0, \quad r_2 = r_4 = r_5 = r_6 = \sqrt{2} - 1,$$

$$\rho(Q_{66}^1) = \frac{5(3 - 2\sqrt{2})\pi}{2} \approx 1.3475;$$

(ii) *покрытие Q_{66}^2 (рис. 14(h)) при $r_{\max} \in (1/2, 1/\sqrt{2}]$:*

$$r_1 = r_3 = x_* \approx 0.627,$$

$$r_2 = r_4 = \sqrt{x_*^2 + 1 - 2x_* \cos(\pi/4 - 2\alpha_*)} \approx 0.471,$$

$$r_5 = r_6 = \sqrt{x_*^2 - \sqrt{2}x_* + \frac{1}{2\cos^2\alpha_*}} \approx 0.171,$$

где (x_*, α_*) — точка минимума функции

$$g_1(x, \alpha) = 3x^2 - x(2\sqrt{2} + \cos(\pi/4 - 2\alpha)) + \frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{1}{2}$$

в области $\{0 \leq \alpha \leq \pi/8, 0.5 \leq x \leq 1/\sqrt{2}\}$, плотность покрытия $\rho(Q_{66}^2)$ равна $g_1(x_*, \alpha_*)\pi \approx 0.3658\pi = 1.1491$;

(iii) *покрытие Q_{66}^3 , изоморфное покрытию П.2 [11] (рис. 14(i)), при $r_{\max} \in (1/\sqrt{2}, 1]$:*

$$r = r_3 = \sqrt{\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - (x_*\sqrt{2} + y_*)\right)^2} \approx 0.748,$$

$$r_2 = r_4 = \sqrt{y_*^2 + 2x_*^2 - \frac{4x_*^2 y_* \sqrt{2}(1-x_*)}{1-2x_*+2x_*^2}} \approx 0.316,$$

$$r_5 = r_6 = y_* \approx 0.095,$$

где (x_*, y_*) — точка минимума функции $g_2(x, y)$, определяемой выражением (4) в области $\{0 \leq x \leq 0.5, 0 \leq y \leq x, y + x\sqrt{2} \leq 1/\sqrt{2}\}$, плотность покрытия $\rho(Q_{66}^3)$ равна $2g_2(x_*, \alpha_*)\pi \approx 0.3482\pi = 1.0938$;

(iv) покрытие Q_{66}^4 , изоморфное II.2 [11], (рис. 14(j)) при $r_{\max} > 1$:

$$r_1 = \sqrt{1 + (1 - (2x_* + \sqrt{2}y_*))^2} \approx 1.058, \quad r_2 = r_4 = 0,$$

$$r_3 = \sqrt{2y_*^2 + 4x_*^2 - \frac{8x_*^2 y_* \sqrt{2}(1-x_*)}{1-2x_*+2x_*^2}} \approx 0.447,$$

$$r_5 = r_6 = \sqrt{2}y_* \approx 0.134,$$

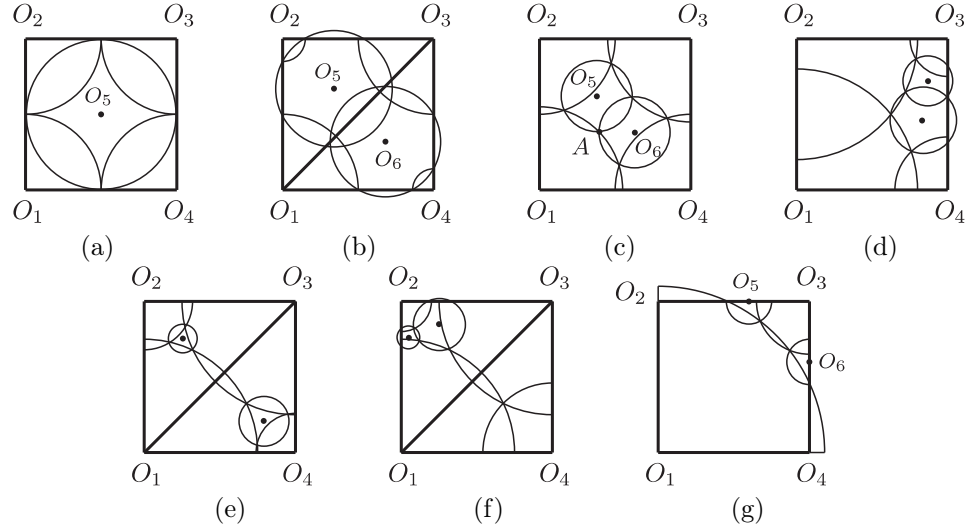
где (x_*, y_*) — точка минимума функции $g_2(x, y)$ в области $\{0 \leq x \leq 0.5, 0 \leq y \leq x, y + x\sqrt{2} \leq 1/\sqrt{2}\}$, плотность покрытия $\rho(Q_{66}^4)$ равна $2g_2(x_*, \alpha_*)\pi \approx 0.3482\pi = 1.0938$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение (i). В случае, когда радиусы основных кругов равны $1/2$, наименее плотным будет покрытие Q_2 (рис. 12(a)). Поэтому далее полагаем, что хотя бы одна из сторон плитки не покрыта полностью основными кругами. Так как $r_5, r_6 \leq 1/2$, ни один из вспомогательных кругов не пересекается с противоположными сторонами плитки, следовательно, D_5 и D_6 покрывают пары смежных сторон (рис. 12(b)).

Пусть \mathcal{C} — покрытие. Заметим, что, не увеличив плотности, его можно преобразовать так, что $r_1 = r_3, r_2 = r_4, r_5 = r_6$ и центры D_5 и D_6 лежат на диагонали O_2O_4 . Опишем совершаемые преобразования, опуская для краткости выкладки.

(а) По аналогии с п. (ii) леммы 3 по \mathcal{C} строится покрытие меньшей плотности, в котором $r_1 = r_3$, а центры вспомогательных кругов лежат на диагонали O_2O_4 .

(б) Если $D_1 \cup D_3 \cup D_5$ или $D_1 \cup D_3 \cup D_6$ не покрывают диагональ O_1O_3 полностью, то положения центров и радиусы вспомогательных кругов можно изменить, не увеличив плотности покрытия.

Рис. 12. Взаимные расположения кругов в $\mathcal{C} \in \text{COV}_4(6, 6)$

(с) Если O_1O_3 целиком покрыта как $D_1 \cup D_3 \cup D_5$, так и $D_1 \cup D_3 \cup D_6$, то искомое «симметричное» покрытие можно получить, отразив относительно O_1O_3 покрытие треугольника $O_1O_2O_3$ на треугольник $O_1O_4O_3$ (считаем, что $r_1^2/4 + r_5^2 \leq r_4^2/4 + r_6^2$).

Рассмотрим $\triangle O_1O_2O_3$ построенного покрытия. Круги D_1, D_2, D_3 пересекают его стороны в точках A, B, C, D, E, F (рис. 13(a)). Несложно показать, что если некоторые из этих точек не лежат на границе D_5 , то, сместив центр D_5 и изменив радиусы основных кругов, можно уменьшить плотность покрытия. Поэтому полагаем, что D_5 проходит через A, B, C, D, E и F . Выразим r_2 и r_5 через r_1 :

$$r_2 = r_1 - (\sqrt{2} - 1), \quad r_5 = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - r_1\right)^2},$$

$$\rho(\mathcal{C}) = \frac{r_1^2 + r_2^2}{2} + 2r_5^2 = 3r_1^2 - r_1(3\sqrt{2} - 1) + \frac{11}{2} - 3\sqrt{2}.$$

Функция $\rho(\mathcal{C})$ в допустимой области $[\sqrt{2} - 1, 1/\sqrt{2}]$ достигает минимума при $r_1 = \sqrt{2} - 1$. При этом $r_2 = 0$, $r_5 = r_1 = \sqrt{2} - 1$ и плотность покрытия равна $(15 - 10\sqrt{2})\pi/2$.

Докажем п. (ii). Применяя рассуждения, аналогичные предыдущим, приходим к выводу, что достаточно рассматривать покрытия, в которых

$$r_1 = r_3, \quad r_2 = r_4, \quad r_1 + r_2 \geq 1, \quad r_5 = r_6$$

и центры кругов D_5 и D_6 находятся на диагонали O_2O_4 (рис. 12(c)). Пусть A — ближайшая к O_1 точка пересечения D_5 и D_6 . Обозначим через α угол $\angle AO_1O_5$, $\alpha \in [0, \pi/8]$. Выражая радиусы r_1 и r_2 через α и r_5 , приходим к соотношениям, указанным в формулировке теоремы.

Докажем п. (iii). Пусть \mathcal{C} — покрытие, в котором $r_{\max} > 1/\sqrt{2}$. Заметим, что если в \mathcal{C} больше двух кругов радиуса, превышающего $1/\sqrt{2}$, то $\rho(\mathcal{C}) > 3\pi/8$. Та же оценка верна, если r_5 или $r_6 > 1/\sqrt{2}$ (лемма 1). Кроме того, если два основных круга радиуса больше $1/\sqrt{2}$ располагаются в смежных вершинах плитки (например, O_1 и O_2 на рис. 12(d)), то

$$\rho(\mathcal{C}) \geq 1 + S(D_1 \cap D_2) > 1 + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} > 1.14.$$

Если в \mathcal{C} ни одна из диагоналей не покрывается полностью внешними дисками, то остаются верны оценки п. (ii) и $\rho(\mathcal{C}) > 1.14$. Поэтому далее полагаем, что $r_1 > 1/\sqrt{2}$, $r_1 + r_3 \geq \sqrt{2}$ и $r_i \leq 1/\sqrt{2}$ при $i = 2, 4, 5, 6$.

Предположим, что в \mathcal{C} в треугольниках $\triangle O_1O_2O_3$ и $\triangle O_1O_4O_3$ есть точки, не покрытые основными кругами (рис. 12(e)). Согласно лемме 4

$$\rho(\mathcal{C}) = \rho_{\Delta_1}(\mathcal{C}) + \rho_{\Delta_2}(\mathcal{C}) \geq 2g_2^*\pi,$$

причём равенство в оценке достигается для покрытия Q_{66}^3 .

Рассмотрим случай, когда все точки $\triangle O_1O_4O_3$ покрыты внешними дисками (рис. 12(f)). Тогда D_5 и D_6 лежат в $\triangle O_1O_2O_3$ и по лемме 4

$$\rho(\mathcal{C}) = \rho_{\Delta_1}(\mathcal{C}) + \rho_{\Delta_2}(\mathcal{C}) \geq (0.16098 + 0.1875)\pi = 0.34848\pi > \rho(Q_{66}^3).$$

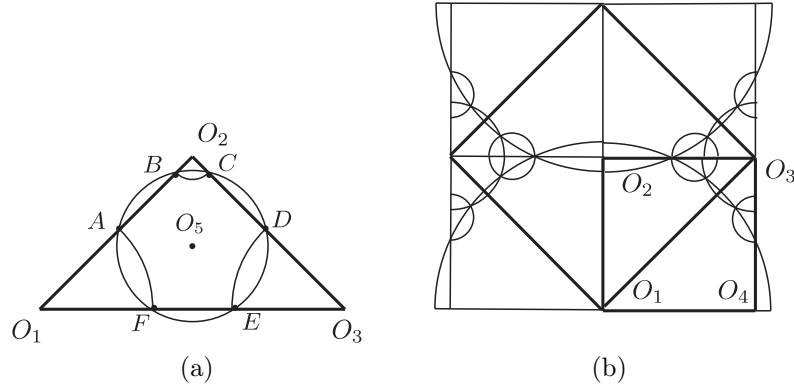


Рис. 13. Иллюстрации к доказательству теоремы 4

Докажем п. (iv). Пусть \mathcal{C} — покрытие, в котором $r_{\max} > 1$. Как и ранее, можно полагать, что в \mathcal{C} есть единственный основной круг D_1 такого

радиуса. При этом $r_2 = r_4 = 0$, D_5 и D_6 покрывают точки, не покрытые D_1 и D_3 . Рассуждения, аналогичные изложенным выше, позволяют ограничиться рассмотрением случая $r_1 + r_3 \geq \sqrt{2}$ (рис. 12(g)). Очевидно, что $r_5 = r_6$. Поворотом решётки на 45° и сжатием в $\sqrt{2}$ раз \mathcal{C} может быть переведено в покрытие $\mathcal{C}' \in \text{COV}_4(6, 6)$, удовлетворяющее условиям п. (iii) (рис. 13(b)). Таким образом, $\rho(\mathcal{C}) \geq 2g_2^*\pi$ и равенство достигается при указанных в формулировке параметрах. Теорема 4 доказана.

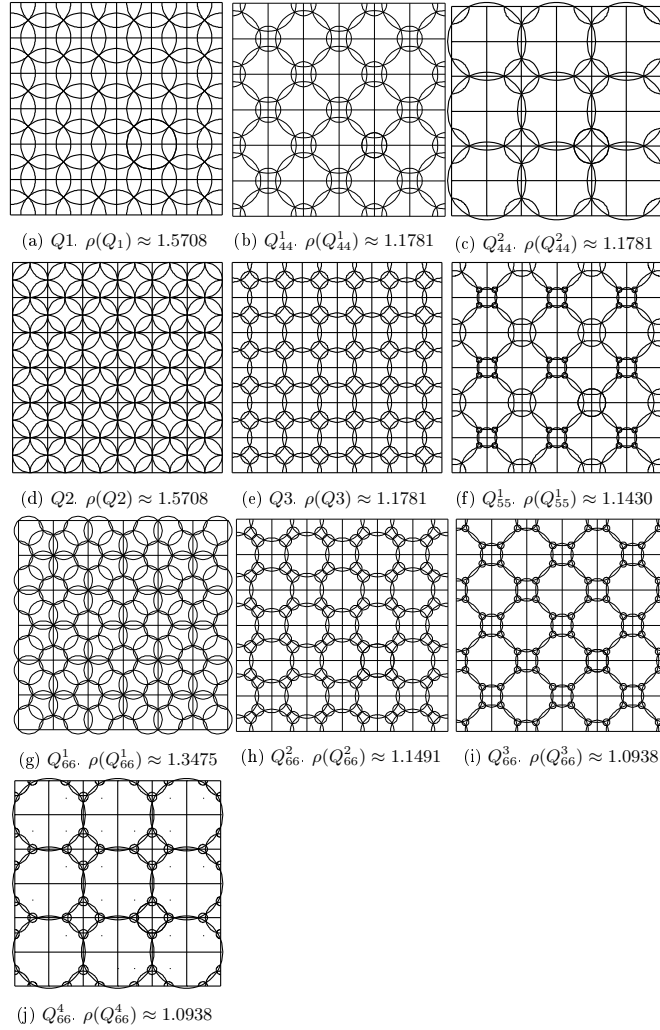


Рис. 14. Покрытия, построенные в теоремах 1, 3 и 4

Заключение

В настоящей статье предпринята попытка продолжить исследование регулярных покрытий, начатое в [2]. Рассмотрены классы $\text{COV}_4(4, 4)$, $\text{COV}_4(5, 5)$ и $\text{COV}_4(6, 6)$ и получены оценки плотностей покрытий при различных значениях r_{\max} , в каждом классе указаны наименее плотные представители. Используемый в данной работе подход, связанный с перебором всех возможных конфигураций покрытия, вряд ли будет эффективен при анализе покрытий с большим числом типов кругов. Вместе с тем, полученные результаты позволяют выдвигать предположения относительно того, как устроены оптимальные покрытия в классах $\text{COV}_4(p, q)$ при $p \geq 7$.

Следует заметить, что предложенная классификация регулярных покрытий не лишена недостатков. В её рамках покрытия, отличающиеся друг от друга только поворотом и растяжением, относятся к различным классам. Например, покрытие Q_3 в зависимости от выбора узлов решётки оказывается принадлежащим то $\text{COV}_4(4, 2)$, то $\text{COV}_4(5, 2)$. Кроме того, налагаемое на регулярное покрытие требование, чтобы все вершины плиток являлись центрами кругов, делает классификацию не вполне естественной. Так в покрытии Q_{66}^1 (рис. 14(g)), принадлежащем формально классу $\text{COV}_4(6, 6)$, каждая плитка полностью покрыта четырьмя кругами одного радиуса. Это же замечание касается покрытий $Q_{44}^2 \sim Q_3$ и Q_{66}^3 (рис. 14(c) и 14(i)), которые можно отнести к $\text{COV}_4(2, 2)$ и $\text{COV}_4(4, 3)$, если ослабить определение регулярности.

Таким образом, налицо необходимость в уточнении номенклатуры покрытий и в разработке новых методов их анализа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алдын-оол Т. А., Ерзин А. И., Залюбовский В. В. Покрытие плоской области случайно распределенными сенсорами // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. — 2010. — Т. 10, № 4. — С. 7–25.
2. Астраков С. Н., Ерзин А. И., Залюбовский В. В. Сенсорные сети и покрытие плоскости кругами // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2009. — Т. 16, № 3. — С. 3–19.
3. Астраков С. Н., Ерзин А. И. Построение эффективных моделей покрытия при мониторинге протяжённых объектов // Вычисл. технологии. — 2010. — Т. 17, № 1. — С. 26–34.
4. Ерзин А. И., Плотников Р. В. Максимизация времени функционирования покрытий в условиях ограниченности ресурсов их элементов // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2011. — Т. 18, № 6. — С. 17–32.

5. **Ерзин А. И., Плотников Р. В., Шамардин Ю. В.** О некоторых полиномиально разрешимых случаях и приближённых алгоритмах для задачи построения оптимального коммуникационного дерева // Дискрет. анализ и исслед. операций — 2013. — Т. 20, № 1. — С. 12–27.
Erzin A. I., Plotnikov R. V., Shamardin Yu. V. On some polynomially solvable cases and approximate algorithms in the optimal communication tree construction problem // J. Appl. Industr. Math. — 2013. — Vol. 7, N 2. — P. 142–152.
6. **Тот Л. Ф.** Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве. — М.: Физматгиз, 1958. — 364 с.
7. **Cardei M., Wu J., Lu M.** Improving network lifetime using sensors with adjustable sensing ranges // Int. J. Sensor Networks. — 2006. — Vol. 1, N 1–2. — P. 41–49.
8. **Erzin A., Astrakov S.** Min-density stripe covering and applications in sensor networks // Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 2011. — P. 152–162. (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 6784).
9. **Erzin A., Plotnikov R.** Wireless sensor network's lifetime maximization problem in case of given set of covers // Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 2011. — P. 44–57. (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 6786).
10. **Kershner R.** The number of circles covering a set // Amer. J. Math. — 1939. — Vol. 61, N 3. — P. 665–671.
11. **Nguyen N. D., Zalyubovskiy V., Ha M. Th., Le T. D., Choo H.** Energy-efficient models for coverage problem in sensor networks with adjustable ranges // Ad Hoc & Sensor Wireless Networks. — 2012. — Vol. 16. — P. 1–28.
12. **Toth F. G.** Covering the plane with two kinds of circles // Discrete Comput. Geometry. — 1995. — Vol. 13, N 3. — P. 445–457.
13. **Wu J., Dai F.** Virtual backbone construction in MANETs using adjustable transmission ranges // IEEE Trans. Mobile Comput. — 2006. — Vol. 5, N 9. — P. 1188–1200.
14. **Wu J., Yang S.** Energy-efficient node scheduling models in sensor networks with adjustable ranges // Int. J. Foundat. Comput. Sci. — 2005. — Vol. 16, N 1. P. 3–17.
15. **Zalyubovskiy V., Erzin A., Astrakov S., Choo H.** Energy-efficient area coverage by sensors with adjustable ranges // Sensors. — 2009. — Vol. 9. — P. 2446–2460.

Тахонов Иван Иванович,
e-mail: takhonov@gmail.com

Статья поступила
29 декабря 2012 г.

Переработанный вариант —
19 апреля 2013 г.