ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—февраль 2014. Том 21, № 1. С. 30–43

УДК 519.718

О ВЕРХНЕЙ ОЦЕНКЕ НЕНАДЁЖНОСТИ НЕВЕТВЯЩИХСЯ ПРОГРАММ ПРИ ОДНОТИПНЫХ КОНСТАНТНЫХ НЕИСПРАВНОСТЯХ НА ВЫХОДАХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ *)

С. М. Грабовская

Аннотация. Рассматривается реализация булевых функций неветвящимися программами с оператором условной остановки в произвольном полном конечном базисе. Предполагается, что все вычислительные операторы программы независимо друг от друга с вероятностью $\varepsilon \in (0, 1/2)$ подвержены однотипным константным неисправностям либо типа 0, либо типа 1 на выходах, а операторы условной остановки абсолютно надёжны. Доказано, что в рассматриваемом базисе любую булеву функцию f можно реализовать неветвящейся программой, ненадёжность которой при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$ не превосходит $\varepsilon + 4\varepsilon^2$.

Ключевые слова: булева функция, неветвящаяся программа, оператор условной остановки, синтез, надёжность, однотипные константные неисправности.

Введение

Рассматривается реализация булевых функций неветвящимися программами с оператором условной остановки [5] в произвольном полном конечном базисе B. Программы с оператором условной остановки характеризуются наличием управляющей команды условной остановки, дающей возможность досрочного прекращения работы программы при выполнении определённого условия, а именно, при поступлении единицы на вход оператора условной остановки (который ещё называют стоп-оператором).

Введём необходимые определения, обозначения и ряд вспомогательных утверждений. Будем считать, что операторы условной остановки

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 14–01–31360).

абсолютно надёжны (значит, срабатывают, когда на их вход поступает единица), а все вычислительные операторы независимо друг от друга подвержены с вероятностью $\varepsilon \in (0, 1/2)$ однотипным константным неисправностям только типа 0 или только типа 1 на выходах. Константные неисправности типа 0 характеризуются тем, что в исправном состоянии вычислительный оператор реализует приписанную ему булеву функцию φ, а в неисправном — функцию 0. Неисправности типа 1 на выходах вычислительных операторов определяются аналогично.

Далее будем считать, что все вычислительные операторы подвержены константным неисправностям типа 0 на выходах.

Программа с ненадёжными операторами реализует булеву функцию $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если при отсутствии неисправностей во всех её операторах на каждом входном наборе $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ значение выходной переменной z равно $f(\mathbf{a})$.

Замечание 1. Схему из функциональных элементов (ФЭ) можно считать частным случаем неветвящихся программ, а именно, неветвящейся программой, в которой нет стоп-операторов.

Ненадёжностью $N_\varepsilon(Pr)$ программы Pr назовём максимальную вероятность ошибки на выходе программы Pr при всевозможных входных наборах. Надёжность программы Pr равна $1 - N_\varepsilon(Pr)$.

Теорема 1 [1]. *В произвольном полном конечном базисе B любую булеву функцию f при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$ можно реализовать схемой S с ненадёжностью $N_\varepsilon(S) \leqslant 3,11\varepsilon$.*

Теорема 2 [3]. *Пусть B — полный конечный базис и существует N такое, что любую булеву функцию f можно реализовать неветвящейся программой R_f с ненадёжностью $N_\varepsilon(R_f) \leqslant N$. Пусть $g(x_1, x_2, x_3)$ — функция вида $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \vee x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3} \vee x_1^{\sigma_1} x_3^{\sigma_3}$, Pr_g — программа, реализующая функцию $g(x_1, x_2, x_3)$, а $N_\varepsilon(Pr_g)$ — ненадёжность программы Pr_g. Тогда любую булеву функцию f в этом базисе можно реализовать программой Pr_f такой, что $N_\varepsilon(Pr_f) \leqslant N_\varepsilon(Pr_g) + 3N^2$.*

Особенной функцией называется функция вида $x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_3 \oplus \beta_1x_1 \oplus \beta_2x_2 \oplus \beta_3x_3 \oplus \beta_0$, $\beta_i \in \{0,\ 1\}$, $i \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$.

Лемма 1 [4]. *Из всякой нелинейной и неособенной функции от трёх или более переменных отождествлением переменных можно получить либо нелинейную функцию двух переменных, либо особенную функцию.*

Другими словами, из всякой нелинейной функции подстановкой (отождествлением и/или переименованием [6]) переменных можно получить либо нелинейную функцию двух переменных

$$\varphi(x_1, x_2) = x_1x_2 \oplus \alpha_1x_1 \oplus \alpha_2x_2 \oplus \alpha_0,$$

либо особенную функцию

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_2x_3 \oplus \beta_1x_1 \oplus \beta_2x_2 \oplus \beta_3x_3 \oplus \beta_0,$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \{0,\ 1\}$.

Поскольку в любом полном конечном базисе содержится нелинейная функция, из которой подстановкой переменных можно получить либо некоторую нелинейную функцию двух переменных, либо некоторую особенную функцию, далее без ограничения общности будем считать, что рассматриваемый полный базис B содержит либо нелинейную функцию двух переменных, либо особенную функцию.

1. Базисы, содержащие нелинейную функцию двух переменных

Пусть полный конечный базис B содержит нелинейную функцию двух переменных, т. е. функцию вида $\left(x_1^{\alpha_1} \& x_2^{\alpha_2}\right)^{\alpha_3}$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \{0, 1\}$.

Теорема 3. *В полном конечном базисе, содержащем нелинейную функцию двух переменных, любую булеву функцию f можно реализовать неветвящейся программой Pr_f такой, что $N_\varepsilon(Pr_f) \leqslant \varepsilon + 4\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$.*

Доказательству теоремы 3 предпошлём леммы 2–7. Возможны шесть случаев в зависимости от того, какую из функций $x_1 \vee x_2$, $\overline{x}_1 \vee x_2$, $\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2$, $x_1 \& x_2$, $\overline{x}_1 \& x_2$, $\overline{x}_1 \& \overline{x}_2$ содержит базис B.

Лемма 2. *Если функция $x_1 \vee x_2$ содержится в полном конечном базисе, то в нём функцию $g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_1x_3$ можно реализовать такой неветвящейся программой Pr_g, что $N_\varepsilon(Pr_g) \leqslant \varepsilon$.*

Доказательство. Пусть полный конечный базис B содержит функцию $x_1 \vee x_2$. Построим в B неветвящуюся программу Pr_g^1 (рис. 1), реализующую функцию $g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_1x_3$.

Очевидно, что ненадёжность программы Pr_g^1 не больше ε, поскольку программа Pr_g^1 содержит только один ненадёжный вычислительный оператор. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Если функция $\overline{x}_1 \vee x_2$ содержится в полном конечном базисе, то в нём функцию $g(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1x_2 \vee x_2x_3 \vee \overline{x}_1x_3$ можно реализовать такой неветвящейся программой Pr_g, что $N_\varepsilon(Pr_g) \leqslant \varepsilon$.*

Доказательство. Пусть полный конечный базис B содержит функцию $\overline{x}_1 \vee x_2$. Построим в B неветвящуюся программу Pr_g^2 (см. рис. 1), реализующую функцию $g(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1 x_2 \vee x_2 x_3 \vee \overline{x}_1 x_3$.

Очевидно, что ненадёжность программы Pr_g^2 не больше ε, поскольку программа Pr_g^2 содержит только один ненадёжный вычислительный оператор. Лемма 3 доказана.

$Pr_g^1:$	$Pr_g^2:$	$Pr_g^3:$	$Pr_g^4:$	$Pr_g^5:$
$z = x_2 \vee x_3$	$z = \overline{x}_1 \vee x_3$	$z = \overline{x}_1 \vee \overline{x}_3$	$z = x_2 \& x_3$	$z = \overline{x}_2 \& x_3$
$\mathrm{stop}(x_1)$	$\mathrm{stop}(x_2)$	$\mathrm{stop}(x_2)$	$\mathrm{stop}(x_1)$	$\mathrm{stop}(x_1)$
$z = x_2$	$z = x_2$	$z = x_2$	$z = x_2$	$z = x_3$
$\mathrm{stop}(x_3)$	$\mathrm{stop}(x_1)$	$\mathrm{stop}(x_1)$	$\mathrm{stop}(x_2)$	$\mathrm{stop}(x_2)$
$z = x_3$	$z = x_3$	$z = \overline{x}_3 \vee \overline{x}_3$	$z = x_3$	$z = \overline{x}_2$

Рис. 1

Замечание 2. Лемма 3 справедлива для полных конечных базисов, содержащих $x_1 \vee \overline{x}_2$, поскольку функция $x_1 \vee \overline{x}_2$ получается из $\overline{x}_1 \vee x_2$ переименованием переменных x_1 и x_2.

Лемма 4. *Если базис содержит функцию* $\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2$, *то в этом базисе функцию* $g(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1 x_2 \vee x_2 \overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 \overline{x}_3$ *можно реализовать неветвящейся программой* Pr_g *такой, что* $N_\varepsilon(Pr_g) = \varepsilon$.

Доказательство. Пусть функция $\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2$ принадлежит конечному базису. Построим в B неветвящуюся программу Pr_g^3 (см. рис. 1), реализующую функцию $\overline{x}_1 x_2 \vee x_2 \overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 \overline{x}_3$.

Вычислим вероятности ошибок программы Pr_g^3 на всевозможных входных наборах $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Отметим, что на наборах $(0, 0, 1)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$ и $(1, 1, 1)$ вероятность ошибки равна 0, поскольку значение функции g на этих наборах равно 0, и ошибки вычислительных операторов в силу рассматриваемого типа неисправностей (константные типа 0 на выходах) не влияют на результат работы программы Pr_g^3.

Пусть входной набор $\mathbf{b}$ равен одному из наборов $(0, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$. Тогда срабатывает стоп-оператор $\mathrm{stop}(x_2)$ и выходное значение программы z равно $\overline{x}_1 \vee \overline{x}_3$. На этих входных наборах вероятность ошибки $P_0\big(Pr_g^3, \mathbf{b}\big)$ программы Pr_g^3 равна ε.

Пусть входной набор $\mathbf{b}$ равен $(0, 0, 0)$. Тогда ни один из стоп-операторов не срабатывает и выходное значение программы $z = \overline{x}_3 \vee \overline{x}_3$. В этом случае вероятность ошибки $P_0\big(Pr_g^3, \mathbf{b}\big)$ программы Pr_g^3 равна ε.

Таким образом, $N_\varepsilon\big(Pr_g^3\big) = \varepsilon$. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Если полный конечный базис содержит функцию* $x_1 \& x_2$, *то в этом базисе функцию* $g(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1 x_2 \vee x_2 x_3 \vee \overline{x}_1 x_3$ *можно реализовать неветвящейся программой* Pr_g *такой, что* $N_\varepsilon(Pr_g) \leqslant \varepsilon$.

Доказательство. Пусть полный конечный базис B содержит функцию $x_1 \& x_2$. Построим в B неветвящуюся программу Pr_g^4 (см. рис. 1), реализующую функцию $g(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1 x_2 \vee x_2 x_3 \vee \overline{x}_1 x_3$.

Очевидно, что ненадёжность программы Pr_g^4 не больше ε, поскольку программа Pr_g^4 содержит только один ненадёжный вычислительный оператор. Лемма 5 доказана.

Обозначим через T_0 [6] класс всех булевых функций $f(x_1, \ldots, x_n)$, сохраняющих константу 0, т. е. функций, для которых выполнено равенство $f(0, \ldots, 0) = 0$. По теореме Поста о функциональной полноте (см., например, [6, с. 40]) любой полный конечный базис содержит функцию $f_{T_0} \notin T_0$, для которой верно равенство $f_{T_0}(0, 0, \ldots, 0) = 1$. Возможны два случая: $f_{T_0}(1, 1, \ldots, 1) = 0$ или $f_{T_0}(1, 1, \ldots, 1) = 1$. Следовательно, в первом случае $f_{T_0}(x, x, \ldots, x) = \overline{x}$, а во втором — $f_{T_0}(x, x, \ldots, x) \equiv 1$, т. е. $f_{T_0} \in \{1, \overline{x}\}$. Таким образом, справедливо

Утверждение 1. *Любой полный конечный базис содержит такую функцию* h, *что* $h(x, \ldots, x) \in \{1, \overline{x}\}$.

Из утверждения 1 следует, что в любом полном конечном базисе либо константу 1, либо $\overline{x}$ можно реализовать, используя один вычислительный оператор.

Лемма 6. *Если полный конечный базис содержит функцию* $\overline{x}_1 \& x_2$, *то в этом базисе функцию* $g(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1 \overline{x}_2 \vee \overline{x}_2 x_3 \vee \overline{x}_1 x_3$ *можно реализовать неветвящейся программой* Pr_g *такой, что* $N_\varepsilon(Pr_g) = \varepsilon$.

Доказательство. Пусть полный конечный базис B содержит функцию $\overline{x}_1 \& x_2$. Согласно утверждению 1 в базисе B содержится такая функция $h = f_{T_0}$, что либо $h(x, \ldots, x) = \overline{x}$, либо $h(x, \ldots, x) \equiv 1$.

(i) Пусть $h(x, \ldots, x) = \overline{x}$. Рассмотрим программу Pr_g^5 (см. рис. 1), реализующую $g(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1 \overline{x}_2 \vee \overline{x}_2 x_3 \vee \overline{x}_1 x_3$.

Вычислим вероятности ошибок программы Pr_g^5 на всевозможных входных наборах $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

Отметим, что на наборах $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ и $(1, 1, 1)$ вероятность ошибки равна нулю, поскольку значение функции g на этих наборах равно нулю, и ошибки вычислительных операторов в силу рассматриваемого типа неисправностей не повлияют на результат работы программы Pr_g^5. Кроме того, вероятность ошибки программы равна нулю на наборе $(0, 1, 1)$, так как стоп-оператор $\mathrm{stop}(x_1)$ на этих наборах не срабатывает, но срабатывает $\mathrm{stop}(x_2)$, а следовательно, ошибки вычислительных операторов $z = \overline{x}_2 \& x_3$ или $z = \overline{x}_2$ также не влияют на результат работы программы Pr_g^5.

Пусть входной набор $\mathbf{b}$ равен $(1,0,1)$. Тогда срабатывает стоп-оператор $\mathrm{stop}(x_1)$, выходное значение программы z равно $\overline{x}_2 \& x_3$. На этом входном наборе вероятность ошибки $P_0\big(Pr_g^5, \mathbf{b}\big)$ программы Pr_g^5 равна ε.

Пусть входной набор $\mathbf{b}$ равен либо $(0,0,0)$, либо $(0,0,1)$. Тогда ни один из стоп-операторов не срабатывает и выходное значение z равно $\overline{x}_2$. В этом случае вероятность ошибки $P_0\big(Pr_g^5, \mathbf{b}\big)$ программы Pr_g^5 равна ε.

Таким образом, $N_\varepsilon\big(Pr_g^5\big) = \varepsilon$.

(ii) Пусть $h(x, \ldots, x) \equiv 1$. Рассмотрим программу Pr_g^6 (рис. 2), реализующую $g(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1 \overline{x}_2 \vee \overline{x}_2 x_3 \vee \overline{x}_1 x_3$.

Pr_g^6 :	Pr_g^7 :	Pr_g^8 :	Pr_g^9 :
$z = \overline{x}_2 \& x_3$	$z = \overline{x}_2 \& \overline{x}_3$	$z = \varphi_1(x_1, x_2, x_3)$	$z = \varphi_2(x_1, x_2, x_3)$
$\mathrm{stop}(x_1)$	$\mathrm{stop}(x_1)$	$\mathrm{stop}(x_1)$	$\mathrm{stop}(x_1)$
$z = x_3$	$z = \overline{x}_3 \& \overline{x}_3$	$z = x_2$	$z = x_3$
$\mathrm{stop}(x_2)$	$\mathrm{stop}(x_2)$	$\mathrm{stop}(x_2)$	$\mathrm{stop}(x_2)$
$z = 1$	$z = \overline{x}_2 \& \overline{x}_2$	$z = x_3$	$z = x_1$

Рис. 2

Вычислим вероятности ошибок программы Pr_g^6 на всевозможных входных наборах $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

Отметим, что на наборах $(0,1,0)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$ и $(1,1,1)$ вероятность ошибки равна нулю, поскольку значение функции g на этих наборах равно нулю, и ошибки вычислительных операторов в силу рассматриваемого типа неисправностей не повлияют на результат работы программы Pr_g^6. Кроме того, вероятность ошибки программы равна нулю на наборе $(0,1,1)$, так как стоп-оператор $\mathrm{stop}(x_1)$ на этих наборах не срабатывает, но срабатывает $\mathrm{stop}(x_2)$, а следовательно, ошибки вычислительных операторов $z = \overline{x}_2 \& x_3$ или $z = \overline{x}_2$ также не влияют на результат работы программы Pr_g^6.

Пусть входной набор $\mathbf{b}$ равен $(1,0,1)$. Тогда срабатывает стоп-оператор $\mathrm{stop}(x_1)$ и выходное значение программы z равно $\overline{x}_2 \& x_3$. На этом входном наборе вероятность ошибки $P_0\big(Pr_g^6, \mathbf{b}\big)$ программы Pr_g^6 равна ε.

Пусть входной набор $\mathbf{b}$ равен либо $(0,0,0)$, либо $(0,0,1)$. Тогда ни один из стоп-операторов не срабатывает и выходное значение $z = 1$. В этом случае вероятность ошибки $P_0\big(Pr_g^6, \mathbf{b}\big)$ программы Pr_g^6 равна ε.

Таким образом, $N_\varepsilon\big(Pr_g^6\big) = \varepsilon$. Лемма 6 доказана.

Замечание 3. Лемма 6 справедлива для полных конечных базисов, содержащих $x_1\&\overline{x}_2$, поскольку функция $x_1\&\overline{x}_2$ получается из функции $\overline{x}_1\&x_2$ переименованием переменных x_1 и x_2.

Лемма 7. *Если конечный базис содержит функцию* $\overline{x}_1\&\overline{x}_2$, *то в этом базисе функцию* $g(x_1,x_2,x_3) = \overline{x}_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3$ *можно реализовать неветвящейся программой* Pr_g *такой, что* $N_\varepsilon(Pr_g) = \varepsilon$.

Доказательство. Пусть $\overline{x}_1\&\overline{x}_2$ принадлежит конечному базису B. Построим в этом базисе неветвящуюся программу Pr_g^7 (см. рис. 2), реализующую функцию $g(x_1,x_2,x_3) = \overline{x}_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3$.

Вычислим вероятности ошибок программы Pr_g^7 на всевозможных входных наборах $\mathbf{b} = (b_1,b_2,b_3)$.

Отметим, что на наборах $(0,1,1)$, $(1,0,1)$, $(1,1,0)$ и $(1,1,1)$ вероятность ошибки равна нулю, поскольку значение функции g на этих наборах равно нулю, и ошибки вычислительных операторов в силу рассматриваемого типа неисправностей не влияют на результат работы программы Pr_g^7.

Пусть входной набор $\mathbf{b}$ равен $(1,0,0)$. Тогда срабатывает стоп-оператор $\mathrm{stop}(x_1)$ и выходное значение программы z равно $\overline{x}_2\&\overline{x}_3$. На этом входном наборе вероятность ошибки $P_0\big(Pr_g^7,\mathbf{b}\big)$ программы Pr_g^7 равна ε.

Пусть входной набор $\mathbf{b}$ равен $(0,1,0)$. Стоп-оператор $\mathrm{stop}(x_1)$ не срабатывает, но срабатывает стоп-оператор $\mathrm{stop}(x_2)$, выходное значение программы z равно $\overline{x}_3\&\overline{x}_3$. На этом входном наборе вероятность ошибки $P_0\big(Pr_g^7,\mathbf{b}\big)$ программы Pr_g^7 равна ε.

Если входной набор $\mathbf{b}$ равен либо $(0,0,0)$, либо $(0,0,1)$, то ни один из стоп-операторов не срабатывает и выходное значение $z = \overline{x}_2\&\overline{x}_2$. В этом случае вероятность ошибки $P_0\big(Pr_g^7,\mathbf{b}\big)$ программы Pr_g^7 равна ε.

Таким образом, $N_\varepsilon\big(Pr_g^6\big) = \varepsilon$. Лемма 7 доказана.

Доказательство теоремы 3. Пусть B — полный конечный базис, содержащий нелинейную функцию двух переменных, т. е. функцию вида $\big(x_1^{\alpha_1}\&x_2^{\alpha_2}\big)^{\alpha_3}$, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in \{0,1\}$. С точностью до переименования переменных возможны шесть вариантов:

(i) $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$;
(ii) $\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = \alpha_3 = 0$;
(iii) $\alpha_1 = \alpha_2 = 1,\ \alpha_3 = 0$;
(iv) $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$;
(v) $\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = \alpha_3 = 1$;
(vi) $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,\ \alpha_3 = 1$.

(i) Пусть $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, т. е. B содержит $x_1 \vee x_2$. Тогда по лемме 2 функцию $g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_1x_3$ можно реализовать программой Pr_g с ненадёжностью $N_\varepsilon(Pr_g) \leqslant \varepsilon$.

(ii) Пусть $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$, т. е. B содержит $\overline{x}_1 \vee x_2$. Тогда по лемме 3 функцию $g(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1x_2 \vee x_2x_3 \vee \overline{x}_1x_3$ можно реализовать программой Pr_g с ненадёжностью $N_\varepsilon(Pr_g) \leqslant \varepsilon$.

(iii) Пусть $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 0$, т. е. B содержит $\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2$. Тогда по лемме 4 функцию $g(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1x_2 \vee x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3$ можно реализовать программой Pr_g с ненадёжностью $N_\varepsilon(Pr_g) = \varepsilon$.

(iv) Пусть $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$, т. е. B содержит $x_1\&x_2$. Тогда по лемме 5 функцию $g(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1x_2 \vee x_2x_3 \vee \overline{x}_1x_3$ можно реализовать программой Pr_g с ненадёжностью $N_\varepsilon(Pr_g) \leqslant \varepsilon$.

(v) Пусть $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 1$, т. е. B содержит $\overline{x}_1\&x_2$. Тогда по лемме 6 функцию $g(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_1x_3$ можно реализовать программой Pr_g с ненадёжностью $N_\varepsilon(Pr_g) = \varepsilon$.

(vi) Пусть $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 1$, т. е. B содержит $\overline{x}_1\&\overline{x}_2$. Тогда по лемме 7 функцию $g(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3$ можно реализовать программой Pr_g с ненадёжностью $N_\varepsilon(Pr_g) = \varepsilon$.

Итак, функцию вида $x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2} \vee x_1^{\sigma_1}x_3^{\sigma_3} \vee x_2^{\sigma_2}x_3^{\sigma_3}$ можно реализовать неветвящейся программой Pr_g такой, что $N_\varepsilon(Pr_g) \leqslant \varepsilon$, причём $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 1$ в случае (i); $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 1$ в случаях (ii) и (iv); $\sigma_1 = \sigma_3 = 0$, $\sigma_2 = 1$ в случае (iii); $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 1$ в случае (v); $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ в случае (vi).

Пусть f — произвольная булева функция. По теореме 1 f можно реализовать схемой S такой, что $N_\varepsilon(S) \leqslant 3,11\varepsilon$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$.

Воспользуемся теоремой 2. Возьмём в качестве программы R_f схему S (см. замечание 1) и построим программу Pr'_f. Полагая $N = 3{,}11\varepsilon$ и учитывая, что $N_\varepsilon(Pr_g) \leqslant \varepsilon$, функцию f можно реализовать неветвящейся программой Pr'_f такой, что

$$N_\varepsilon(Pr'_f) \leqslant \varepsilon + 30\varepsilon^2 \leqslant 1,04\varepsilon$$

при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$.

Воспользуемся теоремой 2 ещё раз. Теперь в качестве программы R_f возьмём построенную выше программу Pr'_f. Пусть $N = 1,04\varepsilon$. Тогда функцию f можно реализовать неветвящейся программой Pr_f такой, что $N_\varepsilon(Pr_f) \leqslant \varepsilon + 4\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$.

Программа Pr_f — искомая. Теорема 3 доказана.

2. Базисы, содержащие особенную функцию

Пусть теперь полный конечный базис B содержит особенную функцию $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_3 \oplus \beta_1 x_1 \oplus \beta_2 x_2 \oplus \beta_3 x_3 \oplus \beta_0$, где $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \{0, 1\}$.

Теорема 4. *В полном конечном базисе B, содержащем функцию вида $x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_3 \oplus \beta_1 x_1 \oplus \beta_2 x_2 \oplus \beta_3 x_3 \oplus \beta_0$, $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \{0, 1\}$, любую булеву функцию f можно реализовать неветвящейся программой Pr_f такой, что $N_\varepsilon(Pr_f) \leqslant \varepsilon + 4\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$.*

Доказательству теоремы 4 предпошлём леммы 8–11.

Лемма 8. *Если функция $\varphi_1(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_3 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus 1$ принадлежит полному конечному базису, то в этом базисе функцию $g(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1x_2 \vee x_2x_3 \vee \overline{x}_1x_3$ можно реализовать неветвящейся программой Pr_g с ненадёжностью $N_\varepsilon(Pr_g) \leqslant \varepsilon$.*

Доказательство. Пусть $\varphi_1(x_1, x_2, x_3) \in B$, где B — полный конечный базис. Построим в этом базисе неветвящуюся программу Pr_g^8 (см. рис. 2), реализующую функцию $g(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1x_2 \vee x_2x_3 \vee \overline{x}_1x_3$.

Очевидно, что ненадёжность программы Pr_g^8 не больше ε, поскольку программа Pr_g^8 содержит только один ненадёжный вычислительный оператор. Лемма 8 доказана.

Лемма 9. *Если полный конечный базис содержит функцию $\varphi_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_3 \oplus x_1 \oplus 1$, то в нём функцию $g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_1x_3$ можно реализовать неветвящейся программой Pr_g с ненадёжностью $N_\varepsilon(Pr_g) \leqslant \varepsilon$.*

Доказательство. Пусть $\varphi_2(x_1, x_2, x_3) \in B$, где B — полный конечный базис. Построим в B неветвящуюся программу Pr_g^9 (см. рис. 2), реализующую функцию $g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_1x_3$.

Очевидно, что ненадёжность программы Pr_g^9 не больше ε, поскольку программа Pr_g^9 содержит только один ненадёжный вычислительный оператор. Лемма 9 доказана.

Лемма 10. *Если полный конечный базис содержит функцию $\varphi_3(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_3 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$, то в этом базисе функцию $g(x_1, x_2, x_3) = x_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_3$ можно реализовать неветвящейся программой Pr_g с ненадёжностью $N_\varepsilon(Pr_g) = \varepsilon$.*

Доказательство. Пусть $\varphi_3(x_1, x_2, x_3) \in B$, где B — полный конечный базис. Согласно утверждению 1 в базисе B содержится функция $h = f_{T_0}$ такая, что либо (i) $h(x, \ldots, x) = \overline{x}$, либо (ii) $h(x, \ldots, x) \equiv 1$.

(i) Пусть $h(x, \ldots, x) = \overline{x}$. Рассмотрим программу Pr_g^{10} (рис. 3).

Pr_g^{10} :	Pr_g^{11} :	Pr_g^{12} :
$z = \varphi_3(x_1,\, x_2,\, x_3)$	$z = \varphi_3(x_1,\, x_2,\, x_3)$	$z = \varphi_4(x_1,\, x_2,\, x_3)$
$\mathrm{stop}(x_1)$	$\mathrm{stop}(x_1)$	$\mathrm{stop}(x_2)$
$z = x_1$	$z = x_1$	$z = x_3$
$\mathrm{stop}(x_2)$	$\mathrm{stop}(x_2)$	$\mathrm{stop}(x_3)$
$z = \overline{x}_3$	$\mathrm{stop}(x_3)$	$z = \overline{x}_1$
	$z = 1$	

Рис. 3

Вычислим вероятности ошибок программы Pr_g^{10} на всевозможных входных наборах $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

Отметим, что на наборах $(0,0,1)$, $(0,1,0)$, $(0,1,1)$ и $(1,1,1)$ вероятность ошибки равна нулю, поскольку значение функции g на этих наборах равно нулю, и ошибки вычислительных операторов в силу рассматриваемого типа неисправностей не влияют на результат работы программы Pr_g^{10}.

Пусть входной набор $\mathbf{b}$ равен одному из наборов $(1,0,0)$, $(1,0,1)$, $(1,1,0)$. Тогда срабатывает стоп-оператор $\mathrm{stop}(x_1)$ и выходное значение программы z при отсутствии неисправностей равно $\varphi_3(\mathbf{b})$ и 1, а вероятность ошибки $P_0\big(Pr_g^{10}, \mathbf{b}\big)$ программы Pr_g^{10} равна ε.

Пусть входной набор $\mathbf{b}$ равен $(0,0,0)$. Тогда ни один из стоп-операторов не срабатывает, выходное значение программы z при отсутствии неисправностей равно $\overline{x}_3$ и 1. В этом случае $P_0\big(Pr_g^{10}, \mathbf{b}\big)$ равна ε.

Таким образом, $N_\varepsilon\big(Pr_g^{10}\big) = \varepsilon$.

(ii) Пусть $h(x, \ldots, x) \equiv 1$. Рассмотрим программу Pr_g^{11} (см. рис. 3).

Вычислим вероятности ошибок программы Pr_g^{11} на всевозможных входных наборах $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

Отметим, что на наборах $(0,0,1)$, $(0,1,0)$, $(0,1,1)$ и $(1,1,1)$ вероятность ошибки равна нулю, поскольку значение функции g на этих наборах равно нулю, и ошибки вычислительных операторов в силу рассматриваемого типа неисправностей не влияют на результат работы программы Pr_g^{11}.

Пусть входной набор $\mathbf{b}$ равен одному из наборов $(1,0,0)$, $(1,0,1)$, $(1,1,0)$. Тогда срабатывает стоп-оператор $\mathrm{stop}(x_1)$ и выходное значение программы z при отсутствии неисправностей равно $\varphi_3(\mathbf{b})$ и 1, а вероятность ошибки $P_0\big(Pr_g^{11}, \mathbf{b}\big)$ программы Pr_g^{11} равна ε.

Пусть $\mathbf{b} = (0,0,0)$. Тогда ни один из стоп-операторов не срабатывает, выходное значение программы z при отсутствии неисправностей равно 1. В этом случае вероятность ошибки $P_0\big(Pr_g^{11}, \mathbf{b}\big)$ программы Pr_g^{11} равна ε.

Таким образом, $N_\varepsilon\big(Pr_g^{11}\big) = \varepsilon$. Лемма 10 доказана.

Лемма 11. *Если $\varphi_4(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_3 \oplus x_1$ принадлежит полному конечному базису, то в этом базисе функцию $g(x_1,x_2,x_3) = \overline{x}_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_1x_3$ можно реализовать неветвящейся программой Pr_g с ненадёжностью $N_\varepsilon(Pr_g) = \varepsilon$.*

Доказательство. Пусть B — полный конечный базис и $\varphi_4(x_1, x_2, x_3) \in B$. По утверждению 1 в базисе B содержится функция $h = f_{T_0}$ такая, что либо (i) $h(x,\ldots,x) = \overline{x}$, либо (ii) $h(x,\ldots,x) \equiv 1$.

(i) Пусть $h(x,\ldots,x) = \overline{x}$. Рассмотрим программу Pr_g^{12} (см. рис. 3).

Вычислим вероятности ошибок программы Pr_g^{12} на всевозможных входных наборах $\mathbf{b} = (b_1,b_2,b_3)$.

Отметим, что на наборах $(0,1,0)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$ и $(1,1,1)$ вероятность ошибки равна нулю, поскольку значение функции g на этих наборах равно нулю, и ошибки вычислительных операторов в силу рассматриваемого типа неисправностей не влияют на результат работы программы Pr_g^{12}. Кроме того, вероятность ошибки равна нулю на наборах $(0,0,1)$ и $(1,0,1)$, так как стоп-оператор $\mathrm{stop}(x_2)$ на этих наборах не срабатывает, но срабатывает $\mathrm{stop}(x_3)$, а следовательно, ошибки вычислительных операторов $z = \varphi_4(x_1,x_2,x_3)$ или $z = \overline{x}_1$ также не влияют на результат работы программы Pr_g^{12}.

Пусть $\mathbf{b} = (0,1,1)$. Тогда срабатывает стоп-оператор $\mathrm{stop}(x_2)$, выходное значение программы z при отсутствии неисправностей равно $\varphi_4(\mathbf{b})$ и 1, а вероятность ошибки $P_0\big(Pr_g^{12}, \mathbf{b}\big)$ программы Pr_g^{12} равна ε.

Пусть $\mathbf{b} = (0,0,0)$. Тогда ни один из стоп-операторов не срабатывает, выходное значение программы z при отсутствии неисправностей равно $\overline{x}_1$ и 1. В этом случае вероятность ошибки $P_0\big(Pr_g^{12}, \mathbf{b}\big)$ программы Pr_g^{12} равна ε.

Таким образом, $N_\varepsilon\big(Pr_g^{12}\big) = \varepsilon$.

(ii) Пусть $h(x,\ldots,x) \equiv 1$. Рассмотрим программу Pr_g^{13} (рис. 4).

Вычислим вероятности ошибок программы Pr_g^{13} на всевозможных входных наборах $\mathbf{b} = (b_1,b_2,b_3)$.

Отметим, что на наборах $(0,1,0)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$ и $(1,1,1)$ вероятность ошибки равна нулю, поскольку значение функции g на этих наборах равно нулю, и ошибки вычислительных операторов в силу рассматриваемого типа неисправностей не влияют на результат работы программы Pr_g^{13}. Кроме того, вероятность ошибки равна нулю на наборах $(0,0,1)$ и $(1,0,1)$, так как стоп-оператор $\mathrm{stop}(x_2)$ на этих наборах не срабатывает, но срабатывает $\mathrm{stop}(x_3)$, а следовательно, ошибки вычислительных операторов $z = \varphi_4(x_1, x_2, x_3)$ или $z = 1$ также не влияют на результат работы программы Pr_g^{13}.

Пусть $\mathbf{b} = (0,1,1)$. Тогда срабатывает стоп-оператор $\mathrm{stop}(x_2)$, выходное значение программы z при отсутствии неисправностей равно $\varphi_4(\mathbf{b})$ и 1, а вероятность ошибки $P_0\big(Pr_g^{13}, \mathbf{b}\big)$ программы Pr_g^{13} равна ε.

Pr_g^{13} :
$z = \varphi_4(x_1,\, x_2,\, x_3)$
$\mathrm{stop}(x_2)$
$z = x_3$
$\mathrm{stop}(x_3)$
$\mathrm{stop}(x_1)$
$z = 1$

Рис. 4

Пусть $\mathbf{b} = (0,0,0)$. Тогда ни один из стоп-операторов не срабатывает, выходное значение программы z при отсутствии неисправностей равно 1. В этом случае вероятность ошибки $P_0\big(Pr_g^{13}, \mathbf{b}\big)$ программы Pr_g^{13} равна ε.

Таким образом, $N_\varepsilon\big(Pr_g^{13}\big) = \varepsilon$. Лемма 11 доказана.

Доказательство теоремы 4. Пусть B — полный конечный базис, содержащий особенную функцию $\varphi(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_2x_3 \oplus \beta_1x_1 \oplus \beta_2x_2 \oplus \beta_3x_3 \oplus \beta_0,\ \beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3 \in \{0,1\}$. Возможны два случая: B содержит функцию $\varphi(x_1,x_2,x_3)$ вида $x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_3 \oplus \gamma_1(x_2 \oplus x_3) \oplus \gamma_2$ или $x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_3 \oplus x_1 \oplus \gamma_1(x_2 \oplus x_3) \oplus \gamma_2$.

В первом случае функция $\varphi(x_1,x_2,x_3)$ имеет вид $x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2} \vee x_1^{\sigma_1}x_3^{\sigma_3} \vee x_2^{\sigma_2}x_3^{\sigma_3},\ \sigma_i \in \{0,1\},\ i \in \{1,2,3\}$. Поскольку $\varphi(x_1,x_2,x_3)$ содержится в B, функцию $g(x_1,x_2,x_3)$ можно реализовать программой Pr_g из одного вычислительного оператора. Поэтому $N_\varepsilon(Pr_g) \leqslant \varepsilon$.

Пусть B содержит функцию $\varphi(x_1,x_2,x_3)$ вида $x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_3 \oplus x_1 \oplus \gamma_1(x_2 \oplus x_3) \oplus \gamma_2,\ \gamma_1,\gamma_2 \in \{0,1\}$. Возможны четыре варианта:

(i) $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$;
(ii) $\gamma_1 = 0,\ \gamma_2 = 1$;
(iii) $\gamma_1 = 1,\ \gamma_2 = 0$;
(iv) $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$.

(i) Пусть $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, т. е. $\varphi_1(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_3 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus 1 \in B$. По лемме 8 функцию $g(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1x_2 \vee x_2x_3 \vee \overline{x}_1x_3$ можно реализовать программой Pr_g с ненадёжностью $N_\varepsilon(Pr_g) \leqslant \varepsilon$.

(ii) Пусть $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 1$, т. е. $\varphi_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_3 \oplus x_1 \oplus 1 \in B$. По лемме 9 функцию $g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_1x_3$ можно реализовать программой Pr_g с ненадёжностью $N_\varepsilon(Pr_g) \leqslant \varepsilon$.

(iii) Пусть $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 0$, т. е. $\varphi_3(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_3 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \in B$. По лемме 10 функцию $g(x_1, x_2, x_3) = x_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_3$ можно реализовать программой Pr_g с ненадёжностью $N_\varepsilon(Pr_g) = \varepsilon$.

(iv) Пусть $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, т. е. $\varphi_4(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_3 \oplus x_1 \in B$. По лемме 11 функцию $g(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_1x_3$ можно реализовать программой Pr_g с ненадёжностью $N_\varepsilon(Pr_g) = \varepsilon$.

Таким образом, если базис содержит особенную функцию, то функцию g вида $x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2} \vee x_1^{\sigma_1}x_3^{\sigma_3} \vee x_2^{\sigma_2}x_3^{\sigma_3}$, $\sigma_i \in \{0, 1\}$, $i \in \{1, 2, 3\}$, можно реализовать программой Pr_g с ненадёжностью $N_\varepsilon(Pr_g) \leqslant \varepsilon$.

Пусть f — произвольная булева функция. По теореме 1 функцию f можно реализовать схемой S такой, что при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$ справедливо неравенство $N_\varepsilon(S) \leqslant 3,11\varepsilon$.

Воспользуемся теоремой 2. Возьмём в качестве программы R_f схему S (см. замечание 1) и построим программу Pr'_f. Полагая $N = 3{,}11\varepsilon$ и учитывая, что $N_\varepsilon(Pr_g) \leqslant \varepsilon$, функцию f можно реализовать неветвящейся программой Pr'_f такой, что $N_\varepsilon(Pr'_f) \leqslant \varepsilon + 30\varepsilon^2 \leqslant 1{,}04\varepsilon$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$.

Воспользуемся теоремой 2 ещё раз. Теперь в качестве программы R_f возьмём построенную выше программу Pr'_f. Пусть $N = 1{,}04\varepsilon$. Тогда функцию f можно реализовать такой неветвящейся программой Pr_f, что $N_\varepsilon(Pr_f) \leqslant \varepsilon + 4\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$.

Программа Pr_f искомая. Теорема 4 доказана.

Из теорем 3 и 4 следует

Теорема 5. *В полном конечном базисе B любую булеву функцию f можно реализовать неветвящейся программой Pr_f с абсолютно надёжными операторами условной остановки такой, что при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$ справедливо неравенство $N_\varepsilon(Pr_f) \leqslant \varepsilon + 4\varepsilon^2$.*

Замечание 4. Нетрудно проверить, что теорема 5 верна и в случае однотипных константных неисправностей типа 1 на выходах вычислительных операторов.

Таким образом, в произвольном полном конечном базисе B любую булеву функцию f можно реализовать неветвящейся программой с абсолютно надёжными операторами условной остановки при однотипных константных неисправностях на выходах вычислительных операторов с ненадёжностью не больше $\varepsilon + 4\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$.

Для схем из ФЭ известно [2], что в произвольном полном конечном базисе любую булеву функцию f можно реализовать схемой из ФЭ при тех же типах неисправностей с ненадёжностью не больше $3\varepsilon + 100\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$. Однако в некоторых базисах данную верхнюю оценку можно улучшить. Например, в базисе $\{x_1 \vee x_2, \overline{x}_1\}$ она составляет $2\varepsilon + 42\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/140]$, а в базисе $\{x_1 \& \overline{x}_2, x_1 \sim x_2\}$ она равна $\varepsilon + 6\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/320]$. Тогда как для неветвящихся программ верхняя оценка ненадёжности составляет $\varepsilon + 4\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$, что в общем случае лучше, чем для схем из ФЭ.

Цель дальнейших исследований — получить нижнюю оценку ненадёжности неветвящихся программ с оператором условной остановки при однотипных константных неисправностях на выходах вычислительных операторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алехина М. А.** О надёжности схем при однотипных константных неисправностях на выходах элементов // Мат. X Междунар. семинара «Дискретная математика и её приложения» (Москва, МГУ, 1–6 февраля 2010 г.). — М.: Изд-во мех.-мат. фак-та МГУ, 2010. — С. 83–85.
2. **Алехина М. А.** Синтез асимптотически оптимальных по надёжности схем. — Пенза: ИИЦ ПГУ, 2006. — 156 с.
3. **Грабовская С. М.** Асимптотически оптимальные по надёжности неветвящиеся программы с оператором условной остановки: Дис. . . . канд. физ.-мат. наук: 01.01.09. — Пенза, 2012. — 89 с.
4. **Редькин Н. П.** О полных проверяющих тестах // Мат. вопросы кибернетики. — 1989. — Вып. 2. — С. 198–222.
5. **Чашкин А. В.** О среднем времени вычисления значений булевых функций // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 1997. — Т. 4, № 1. — С. 60–78.
6. **Яблонский С. В.** Асимптотически наилучший метод синтеза надёжных схем из ненадёжных элементов // Banach Center. — 1982. — N 7. — P. 11–19.

Грабовская Светлана Михайловна,
e-mail: swetazin@mail.ru

Статья поступила
11 февраля 2013 г.

Переработанный вариант —
15 мая 2013 г.