ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—февраль 2014. Том 21, № 1. С. 67–83

УДК 519.716

ПОЗИТИВНО ЗАМКНУТЫЕ КЛАССЫ ТРЁХЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ *)

С. С. Марченков

Аннотация. Сформулированы теоретические предпосылки и указаны пути построения позитивной классификации множества функций k-значной логики. На этой основе найдены все 194 позитивно замкнутых класса трёхзначной логики. Описание дано как с помощью полугрупп эндоморфизмов, так и посредством указания позитивных базисов.

Ключевые слова: оператор позитивного замыкания, функции трёхзначной логики.

В теории функций многозначной логики в вопросах классификации широкое распространение получил подход, основанный на операторах замыкания. На множестве P_k функций k-значной логики определяется оператор замыкания $\mathcal{O}$. Множества функций из P_k, замкнутые относительно оператора $\mathcal{O}$ (их называют *$\mathcal{O}$-замкнутыми классами*), образуют $\mathcal{O}$-классификацию множества P_k.

Наиболее известна классификация этого типа, основанная на операторе (операции) суперпозиции. Эта классификация довольно давно и интенсивно изучается. Однако на пути «полного» описания классов данной классификации имеется объективное препятствие: при любом $k \geqslant 3$ число замкнутых классов в P_k континуально [22]. В связи с этим разными авторами на основе различных идей предлагались «сильные» операторы замыкания, которые при любом k порождают на множестве P_k конечные либо счётные классификации. К настоящему времени известно около десятка сильных операторов замыкания, они дают несовпадающие (и даже несравнимые) классификации множества P_k.

Одним из первых сильных операторов замыкания стал оператор параметрического замыкания, введённый А. В. Кузнецовым [4] (по некоторым данным, этот оператор был известен А. В. Кузнецову ещё в середине

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 13–01–00958).

1960-х годов). Все 25 параметрически замкнутых классов булевых функций найдены в [4] (см. также [7, 27]). А. Ф. Данильченко [2, 3, 25] установила, что в P_3 имеется ровно 2986 параметрически замкнутых классов, из которых 44 параметрически предполные. При $k \geqslant 4$ конечность числа параметрически замкнутых классов в P_k доказана в [24]. Параметрически замкнутые классы изучались и в [23, 27–30], однако при $k \geqslant 4$ полного описания таких классов в P_k пока не получено.

Класс P_3 (вместе с классом P_2 булевых функций) представляется «полигоном» для «испытаний» сильных операторов замыкания на доступность, эффективность и практическую применимость. Следует отметить, что пока полностью описанных классификаций множества P_3 на базе сильных операторов замыкания имеется не так много. Помимо параметрической классификации P_3 другой всесторонне проработанной классификацией этого множества можно считать S-классификацию [5, 8, 21], состоящую из 48 классов (каждый из которых включает все селекторные функции). Для S-классификации применима соответствующим образом модифицированная теория Галуа для алгебр Поста [1, 26], что позволяет в необходимых случаях использовать хорошо развитую технику алгебры отношений [5].

Ещё одной достаточно полно описанной классификацией множества P_3 можно считать классификацию на основе оператора замыкания с разветвлением по предикату равенства [10]. Классы данной классификации, содержащие все селекторные функции, суть в точности все замкнутые (относительно операции суперпозиции) классы, содержащие тернарный дискриминатор p (дискриминаторные классы). Полный список дискриминаторных классов, насчитывающий 144 класса, приведён в [12]; каждый из этих классов описан в терминах сохранения некоторых стандартных отношений.

Стоит также отметить, что в [6, 15–17] определены «очень сильные» операторы замыкания. Все они порождают на множестве P_3 одну и ту же классификацию из 6 классов, которая по существу является классификацией на основе групп автоморфизмов.

В [6] (см. также [7]) предложено формализованное логико-функциональное определение оператора параметрического замыкания. На основе этого определения введено несколько сильных операторов замыкания. Первым из них стал оператор позитивного замыкания (который оказался более «сильным», нежели оператор параметрического замыкания). Оператор позитивного замыкания исследовался в [6, 7, 11–14, 18–20]. В частности, в [6, 7] найдено, что имеется ровно 6 позитивно замкнутых классов булевых функций, а при любом $k \geqslant 3$ число позитивно замкнутых классов в P_k строго меньше числа подполугрупп с единицей в симметрической полугруппе степени k.

В [13, 14] обнаружено, что полезным инструментом при изучении позитивно замкнутых классов являются полугруппы эндоморфизмов. Как выяснилось, для любого множества T одноместных функций из P_k совокупность всех функций из P_k, имеющих в качестве эндоморфизмов все функции из T, образует позитивно замкнутый класс. Возникло предположение, что именно с помощью полугрупп эндоморфизмов можно задать все позитивно замкнутые классы. С некоторыми уточнениями это предположение доказано в [20].

В [11–14, 18] без использования теорем 2 и 3 (см. ниже) найдено около 80 позитивно замкнутых классов трёхзначной логики. С появлением теорем 2 и 3 открылась реальная возможность перечислить все позитивно замкнутые классы в P_3. Для этого, имея в виду теорему 1 (см. ниже), необходимо перебрать все функции из $P_3^{(3)}$ и найти их полугруппы эндоморфизмов. Для полученного списка полугрупп (по предварительным оценкам в нём могло быть около 150 полугрупп) следовало образовать пересечения любых двух полугрупп, любых трёх полугрупп, и т. д. до тех пор, пока не перестали бы появляться новые полугруппы. По нашему мнению этот процесс должен оборваться на уровне 2–3 пересечений. В результате будет найдено множество всех полугрупп, имеющих вид $\mathrm{End}(Q)$, где Q — позитивно замкнутый класс из P_3.

Основная трудность в реализации этой программы — большой перебор вариантов, определяемый в основном числом функций в множестве $P_3^{(3)}$. Тем не менее, значительная часть её под руководством автора выполнена на персональных компьютерах А. Б. Дайняком, С. А. Латушкиным и С. И. Мартыненко. В проведённых компьютерных вычислениях просматривались двуместные и некоторые специальные трёхместные функции из P_3 и вычислялись полугруппы эндоморфизмов, отвечающие данным функциям. В результате найден 191 позитивно замкнутый класс (включая позитивно замкнутые классы, обнаруженные ранее в [11–14, 18]).

В принципе, в этом направлении можно было бы двигаться и дальше, просматривая уже все трёхместные функции из P_3. Однако всего имеется 3^{27} таких функций, и на пути решения поставленной задачи возникают значительные трудности вычислительного характера.

Избран другой путь решения данной задачи. Составлен список всех подполугрупп с единицей в симметрической полугруппе T_3 (всех замкнутых классов в $P_3^{(1)}$, содержащих тождественную функцию). Их оказалось чуть более 600. Затем из них было отобрано 191 ранее найденных полугрупп, а для оставшихся полугрупп «вручную» выполнялась процедура замыкания с помощью $(\exists, \&)$-формул. В результате обнаружилось, что из подвергшихся исследованию полугрупп только 3 полугруппы не дают новых функций из $P_3^{(1)}$ (это попарно сопряжённые полугруппы с 8 элементами). Для каждой из трёх найденных полугрупп определена соответствующая трёхместная функция, полугруппа эндоморфизмов которой совпадает с заданной полугруппой. Таким образом, «встречные» процессы перебора некоторых трёхместных функций из P_3 и подполугрупп с единицей полугруппы T_3 привели к окончательному результату. Иными словами, два разнонаправленных процесса — вычисление полугрупп эндоморфизмов для двух- и (специальных) трёхместных функций и проверка полугрупп на $(\exists, \&)$-замкнутось — позволили определить все 194 позитивно замкнутых класса в P_3 и соответствующие им полугруппы эндоморфизмов.

Из сравнения с известными конечными классификациями видно, что позитивная классификация в настоящий момент представляется наиболее подробной и вполне обозримой классификацией множества функций трёхзначной логики.

В данной работе приведены все необходимые понятия, указаны теоретические результаты, лежащие в основе дальнейших построений и позволяющие (с использованием компьютера) перечислить все позитивно замкнутые классы в P_3, и составлен список всех позитивно замкнутых классов в P_3. При этом позитивно замкнутые классы определены двояко: как с помощью полугрупп эндоморфизмов, так и путём указания позитивных базисов.

Перейдём к основным понятиям. Пусть $k \geqslant 2$, P_k — множество всех функций на $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$ (функций k-значной логики). Если $Q \subseteq P_k$, то через $Q^{(n)}$ обозначаем множество всех n-местных функций из Q.

Если $Q \subseteq P_k,\ g \in P_k^{(1)}$ и для всякой функции f из Q выполняется тождество

$$f(g(x_1), \dots, g(x_n)) = g(f(x_1, \dots, x_n)),$$

то говорят, что g — *эндоморфизм алгебры* $\langle E_k; Q\rangle$. Чуть менее строго будем говорить, что g — эндоморфизм множества функций Q. Множество $\mathrm{End}\langle E_k; Q\rangle$ всех эндоморфизмов алгебры $\langle E_k; Q\rangle$ образует моноид — полугруппу с операцией композиции (суперпозиции) и единицей (тождественной функцией). В дальнейшем множество всех эндоморфизмов алгебры $\langle E_k; Q\rangle$ будем обозначать через $\mathrm{End}(Q)$, а в случае $Q = \{f\}$ — через $\mathrm{End}(f)$.

Напомним основные понятия, связанные с оператором позитивного замыкания [6]. Вначале определим язык Pos. Исходными символами языка Pos являются символы предметных переменных $x_1, x_2, \ldots$ (с областью значений E_k), символы $f_i^{(n)}$ для обозначения n-местных функций из P_k $(1 \leqslant i \leqslant k^{k^n}, n = 1, 2 \ldots)$, знаки равенства $=$, конъюнкции $\&$, дизъюнкции $\vee$, квантора существования $\exists$, левой и правой скобок и запятой. Иногда вместо символов переменных $x_1, x_2, \ldots$ будем использовать символы x, y, z, а вместо символов $f_i^{(n)}$ — символы g, h.

Терм языка Pos определим по индукции. Символ предметной переменной есть терм; если $t_1, \ldots, t_n$ — термы, а $f_i^{(n)}$ — символ n-местной функции, то $f_i^{(n)}(t_1, \ldots, t_n)$ есть терм.

Всякий терм языка Pos очевидным образом определяет некоторую функцию класса P_k (переменная определяет тождественную функцию).

Если t_1, t_2 — термы языка Pos, то выражение $(t_1 = t_2)$ называем *элементарной формулой языка* Pos. Далее, если Φ_1, Φ_2 — формулы языка Pos, а x_i — символ предметной переменной, то

$$(\Phi_1 \,\&\, \Phi_2),\ (\Phi_1 \vee \Phi_2),\ (\exists x_i)\Phi_1$$

— также *формулы языка* Pos. Понятия свободной и связанной переменных предполагаем известными.

Всякая формула языка Pos с m свободными переменными определяет некоторое m-местное отношение на E_k. Пусть $Q \subseteq P_k$, $\Phi(x_1, \ldots, x_m)$ — формула языка Pos со свободными переменными $x_1, \ldots, x_m$, все функциональные символы которой суть обозначения функций из Q, и формула $\Phi(x_1, \ldots, x_m)$ определяет отношение $r(x_1, \ldots, x_m)$ на E_k. В этом случае говорим, что формула Φ *позитивно выражает отношение* r через функции множества Q. Понятие позитивной выразимости перенесём с отношений на функции. Именно, если $g(x_1, \ldots, x_m)$ — функция из P_k, а формула $\Phi(x_1, \ldots, x_m, y)$ языка Pos позитивно выражает отношение $y = g(x_1, \ldots, x_m)$ (график функции g) через функции множества Q, то говорим, что формула Φ *позитивно выражает функцию* g через функции множества Q. Совокупность всех функций, позитивно выразимых через функции множества Q, называем *позитивным замыканием множества* Q и обозначаем через $\mathrm{Pos}[Q]$. Множества вида $\mathrm{Pos}[Q]$ называем *позитивно замкнутыми классами*. Известно [6], что всякий позитивно замкнутый класс замкнут относительно операции суперпозиции и содержит все селекторные функции, т. е. является *клоном*. Понятия позитивно порождающей системы и позитивного базиса аналогичны соответствующим понятиям для операции суперпозиции.

Обозначим через T_k множество всех одноместных функций из P_k, которое рассматривается далее как полугруппа с операцией композиции (суперпозиции) и единицей — тождественной функцией. Если $T \subseteq T_k$, то через $\mathrm{Gr}(T)$ обозначаем множество графиков всех функций, принадлежащих T.

Обозначим через Π_k множество всех отношений на E_k. На множестве Π_k определим операции конъюнкции и проектирования. Пусть r_1 и r_2 — m- и n-местные отношения на E_k соответственно. *Конъюнкцией отношений* r_1, r_2 назовём $(m+n)$-местное отношение, определяемое формулой

$$r_1(x_1, \ldots, x_m) \,\&\, r_2(x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}).$$

Проекцией отношения $r_1(x_1, \ldots, x_m)$ по переменной x_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ назовём $(m-1)$-местное отношение, которое определяется формулой

$$(\exists x_i) r_1(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_m),$$

где переменная x_i под квантором $\exists$ пробегает множество E_k. *Элементарной диагональю* назовём любое отношение вида $x_i = x_j$.

Пусть $R \subseteq \Pi_k$. *Замыканием множества* R назовём наименьшее множество отношений из Π_k, которое содержит все элементарные диагонали, все отношения из R и замкнуто относительно операций конъюнкции, проектирования, а также перестановки, переименования и отождествления переменных.

Теоретической основой для перечисления всех позитивно замкнутых классов в P_3 служат следующие теоремы.

Теорема 1 [11]. *При любом $k \geqslant 2$ любой позитивно замкнутый класс из P_k позитивно порождается некоторым множеством своих функций, зависящих не более чем от k переменных.*

Теорема 2 [19, 20]. *Пусть $k \geqslant 2$, $Q \subseteq P_k$ и $f \in P_k$. Тогда $f \in \mathrm{Pos}[Q]$ в том и только том случае, когда $\mathrm{End}(Q) \subseteq \mathrm{End}(f)$.*

Следствие. *При любом $k \geqslant 2$ различные позитивно замкнутые классы в P_k имеют различные полугруппы эндоморфизмов.*

Теорема 3 [19, 20]. *При любом $k \geqslant 2$ подполугруппа T полугруппы T_k имеет вид $\mathrm{End}(Q)$, где Q — подходящий позитивно замкнутый класс из P_k, в том и только том случае, когда T совпадает с множеством* *всех (одноместных) функций, графики которых лежат в замыкании множества отношений* $\mathrm{Gr}(T)$.

Ниже в таблицах выписаны все 194 позитивно замкнутых класса в P_3. Таблицы упорядочены по возрастанию числа элементов в полугруппе эндоморфизмов, определяющей заданный класс. Приводимые в таблицах функции задаются векторами значений. При этом порядок элементов в векторах значений соответствует лексикографическому упорядочению наборов аргументов. Так, например, одноместная функция f задаётся вектором $(f(0)f(1)f(2))$.

Т а б л и ц а 1

Полугруппа с 1 функцией

Полугруппа эндоморфизмов	Пример базиса
(012)	(120220000)

Т а б л и ц а 2

Полугруппы с 2 функциями

Полугруппа эндоморфизмов	Пример базиса
(000), (012)	(020100000)
(002), (012)	(220220000)
(010), (012)	(101000101)
(011), (012)	(100000000)
(012), (022)	(200000000)
(012), (111)	(100010000)
(012), (112)	(220221011)
(012), (212)	(111121111)
(012), (222)	(100000002)

Т а б л и ц а 3

Полугруппы с 3 функциями

Полугруппа эндоморфизмов	Пример базиса
(000), (001), (012)	(001000000)
(000), (002), (012)	(010000000)
(000), (010), (012)	(002000000)
(000), (011), (012)	(011000000)
(000), (012), (020)	(020000000)
(000), (012), (021)	(021000000)
(000), (012), (022)	(022000000)
(000), (012), (111)	(020010000)
(000), (012), (222)	(020000002)
(002), (012), (022)	(000), (222)
(002), (012), (220)	(222222000)
(002), (012), (222)	(220220002)
(010), (011), (012)	(000), (111)
(010), (012), (101)	(101)
(010), (012), (111)	(101010101)
(011), (012), (100)	(100)
(011), (012), (111)	(112011011)

Полугруппа эндоморфизмов	Пример базиса
(012), (022), (200)	(212000000)
(012), (022), (222)	(212021021)
(012), (102), (222)	(111000102)
(012), (110), (111)	(110110000)
(012), (111), (112)	(110011011)
(012), (111), (210)	(222210000)
(012), (111), (211)	(211012011)
(012), (111), (212)	(111212111)
(012), (111), (222)	(100010002)
(012), (112), (212)	(111), (222)
(012), (112), (221)	(222222011)
(012), (112), (222)	(221221012)
(012), (120), (201)	(120)
(012), (121), (212)	(111022111)
(012), (122), (222)	(100021012)
(012), (202), (222)	(202000202)
(012), (212), (222)	(212121012)

Т а б л и ц а 4

Полугруппы с 4 функциями

Полугруппа эндоморфизмов	Пример базиса
(000), (001), (002), (012)	(000001000)
(000), (002), (010), (012)	(000101000)
(000), (002), (012), (111)	(010010000)

Полугруппа эндоморфизмов	Пример базиса
(000), (002), (012), (222)	(010000002)
(000), (010), (012), (020)	(000002000)
(000), (010), (012), (111)	(002010000)

Полугруппа эндоморфизмов	Пример базиса
(000), (010), (012), (222)	(002000002)
(000), (011), (012), (022)	(012000000), (000011012)
(000), (011), (012), (111)	(000012011)
(000), (012), (022), (222)	(000021012)
(000), (012), (111), (112)	(010011011)
(000), (012), (111), (222)	(011010002)
(000), (012), (212), (222)	(010121012)
(002), (012), (112), (222)	(000011012), (220221012)
(010), (012), (111), (212)	(010111012), (111012111)
(011), (012), (111), (112)	(100011011)

Полугруппа эндоморфизмов	Пример базиса
(011), (012), (111), (211)	(111012011)
(011), (012), (111), (222)	(112011012)
(012), (022), (111), (222)	(200011012)
(012), (022), (122), (222)	(200021012)
(012), (022), (212), (222)	(212121212)
(012), (110), (111), (112)	(110111011)
(012), (111), (112), (222)	(110011012)
(012), (111), (212), (222)	(210111012)
(012), (202), (212), (222)	(210121012)

Таблица 5

Полугруппы с 5 функциями

Полугруппа эндоморфизмов	Пример базиса
(000), (001), (012), (111), (222)	(001010002)
(000), (002), (010), (012), (111)	(000010000)
(000), (002), (010), (012), (222)	(000000002)
(000), (002), (012), (111), (222)	(010010002)
(000), (002), (012), (220), (222)	(012002002)
(000), (010), (012), (101), (111)	(002111000)
(000), (010), (012), (111), (222)	(002010002)
(000), (011), (012), (021), (022)	(012000000)
(000), (011), (012), (100), (111)	(012011011)
(000), (011), (012), (111), (112)	(000011011)
(000), (011), (012), (111), (222)	(011112112)

Полугруппа эндоморфизмов	Пример базиса
(000), (012), (020), (111), (222)	(020010002)
(000), (012), (021), (111), (222)	(021010002)
(000), (012), (022), (111), (222)	(022112212)
(000), (012), (022), (200), (222)	(012021012)
(000), (012), (022), (212), (222)	(012121212)
(000), (012), (102), (111), (222)	(011010102)
(000), (012), (110), (111), (222)	(011110002)
(000), (012), (111), (112), (222)	(001111012)
(000), (012), (111), (122), (222)	(021112122)
(000), (012), (111), (202), (222)	(022010202)
(000), (012), (111), (210), (222)	(022210002)
(000), (012), (111), (211), (222)	(021111112)
(000), (012), (111), (212), (222)	(002212022)
(002), (012), (102), (112), (222)	(220221012)
(010), (012), (111), (210), (212)	(111012111)
(011), (012), (111), (112), (222)	(100011012)
(012), (022), (111), (212), (222)	(212111212)
(012), (111), (112), (221), (222)	(102012012)
(012), (111), (121), (212), (222)	(210012012)

Таблица 6

Полугруппы с 6 функциями

Полугруппа эндоморфизмов	Пример базиса
(000), (001), (002), (011), (012), (022)	(000), (000011012)
(000), (001), (002), (012), (111), (222)	(000011002)
(000), (001), (012), (110), (111), (222)	(012012102), (012012002)

Полугруппа эндоморфизмов	Пример базиса
(000), (001), (012), (111), (112), (222)	(001011012)
(000), (002), (010), (012), (101), (111)	(010)
(000), (002), (010), (012), (111), (222)	(000111002), (000010002)
(000), (002), (010), (012), (220), (222)	(002)
(000), (002), (012), (110), (111), (222)	(010110002)
(000), (002), (012), (111), (112), (222)	(010011012), (000011012)
(000), (002), (012), (111), (220), (222)	(002112002)
(000), (010), (011), (012), (020), (022)	(000), (012111212)
(000), (010), (012), (020), (111), (222)	(000012002)
(000), (010), (012), (101), (111), (222)	(002111002)
(000), (010), (012), (111), (202), (222)	(002010202)
(000), (010), (012), (111), (212), (222)	(012111012), (010111012)
(000), (011), (012), (022), (111), (222)	(000012012), (000011012)
(000), (011), (012), (100), (111), (112)	(011)
(000), (011), (012), (100), (111), (222)	(000112112)
(000), (011), (012), (111), (112), (222)	(011011012), (000011012)
(000), (011), (012), (111), (122), (222)	(011112122)
(000), (011), (012), (111), (211), (222)	(012111112)
(000), (012), (020), (111), (202), (222)	(020111202), (000111202)
(000), (012), (020), (111), (212), (222)	(020012022)
(000), (012), (022), (111), (122), (222)	(022112222)
(000), (012), (022), (111), (200), (222)	(022011012)
(000), (012), (022), (111), (211), (222)	(022111212)
(000), (012), (022), (111), (212), (222)	(012212212), (012111212)
(000), (012), (022), (200), (212), (222)	(012022012)
(000), (012), (110), (111), (112), (222)	(011111012)
(000), (012), (111), (112), (221), (222)	(002012112)
(000), (012), (111), (120), (201), (222)	(011212002)
(000), (012), (111), (121), (212), (222)	(010212012)
(000), (012), (111), (122), (211), (222)	(021012012), (011012012)
(000), (012), (111), (202), (212), (222)	(022012222)
(002), (012), (022), (112), (122), (222)	(222), (000011012)
(002), (012), (112), (202), (212), (222)	(222), (010111012)
(010), (011), (012), (111), (211), (212)	(111), (012111212)

Полугруппа эндоморфизмов	Пример базиса
(010), (012), (110), (111), (112), (212)	(111), (010111012)
(011), (012), (111), (112), (221), (222)	(112012012)
(012), (022), (111), (121), (212), (222)	(212012012)

Таблица 7

Полугруппы с 7 функциями

Полугруппа эндоморфизмов	Пример базиса
(000), (001), (002), (010), (012), (020), (021)	(012002010)
(000), (001), (002), (012), (111), (112), (222)	(000010002000011012000011012)
(000), (001), (012), (102), (110), (111), (222)	(001110222)
(000), (002), (010), (012), (101), (111), (222)	(000111002)
(000), (002), (010), (012), (111), (220), (222)	(000010222)
(000), (002), (012), (102), (111), (112), (222)	(000111012)
(000), (002), (012), (110), (111), (112), (222)	(000010222000111222002112222)
(000), (010), (012), (020), (111), (212), (222)	(000010002000012022000012022)
(000), (010), (012), (111), (202), (212), (222)	(010111012012111212010111012)
(000), (010), (012), (111), (210), (212), (222)	(000012222)
(000), (011), (012), (021), (022), (111), (222)	(000011022)
(000), (011), (012), (022), (111), (122), (222)	(000011012000111112000211222)
(000), (011), (012), (022), (111), (211), (222)	(000011012000012022000012022)
(000), (011), (012), (100), (111), (112), (222)	(000111112)
(000), (011), (012), (111), (112), (221), (222)	(011111222)
(000), (012), (020), (111), (202), (210), (222)	(012210012)
(000), (012), (021), (111), (122), (211), (222)	(000211122)
(000), (012), (022), (111), (121), (212), (222)	(012212212)
(000), (012), (022), (111), (200), (212), (222)	(000212222)
(011), (012), (110), (111), (112), (210), (211)	(112012011)
(012), (022), (102), (122), (202), (212), (222)	(212022012)

Т а б л и ц а 8

Полугруппы с 8 функциями

Полугруппа эндоморфизмов	Пример базиса
(000), (001), (002), (012), (110), (111), (220), (222)	(000110222)
(000), (001), (012), (110), (111), (112), (221), (222)	(001111222)
(000), (002), (010), (012), (101), (111), (220), (222)	(0100102120100 12122210011212)
(000), (002), (012), (111), (112), (200), (221), (222)	(000011222)
(000), (010), (012), (020), (101), (111), (202), (222)	(000111202)
(000), (010), (012), (101), (111), (121), (212), (222)	(000111022)
(000), (011), (012), (022), (100), (111), (200), (222)	(000111212)
(000), (011), (012), (100), (111), (112), (221), (222)	(0021022120021 12112020112012)
(000), (011), (012), (100), (111), (122), (211), (222)	(000111122)
(000), (012), (020), (111), (121), (202), (212), (222)	(012212012)
(000), (012), (022), (111), (121), (200), (212), (222)	(0121100220020 11021022011022)
(000), (012), (022), (111), (122), (200), (211), (222)	(000211222)

Т а б л и ц а 9

Полугруппы с 9 функциями

Полугруппа эндоморфизмов	Пример базиса
(000), (001), (002), (010), (011), (012), (020), (021), (022)	(000)
(000), (001), (002), (010), (012), (020), (021), (111), (222)	(000010002)
(000), (002), (012), (102), (111), (112), (220), (221), (222)	(002112012)
(000), (010), (012), (101), (111), (121), (210), (212), (222)	(002111022)
(000), (011), (012), (021), (022), (100), (111), (200), (222)	(000112212)
(000), (011), (012), (110), (111), (112), (210), (211), (222)	(011111112)
(000), (012), (022), (102), (111), (122), (202), (212), (222)	(022212222)
(002), (012), (022), (102), (112), (122), (202), (212), (222)	(222)
(010), (011), (012), (110), (111), (112), (210), (211), (212)	(111)

Т а б л и ц а 10

Полугруппы с 10 функциями

Полугруппа эндоморфизмов	Пример базиса
(000), (001), (002), (011), (012), (022), (111), (112), (122), (222)	(000011012)
(000), (001), (002), (012), (110), (111), (112), (220), (221), (222)	(000010002010111012012112222)
(000), (002), (010), (012), (110), (111), (112), (202), (212), (222)	(010111012)
(000), (010), (011), (012), (020), (022), (111), (211), (212), (222)	(012111212)
(000), (010), (012), (020), (101), (111), (121), (202), (212), (222)	(000010002010111012022212222)
(000), (011), (012), (022), (100), (111), (122), (200), (211), (222)	(000011012011111111202221222)

Т а б л и ц а 11

Полугруппы с 11 функциями

Полугруппа эндоморфизмов	Пример базиса
(000), (001), (002), (012), (102), (110), (111), (112), (220), (221), (222)	(000010012011111012002112222)
(000), (010), (012), (020), (101), (111), (121), (202), (210), (212), (222)	(000012002010111212022012222)
(000), (011), (012), (021), (022), (100), (111), (122), (200), (211), (222)	(000011022012111112012212222)

Т а б л и ц а 12

Полугруппы с 17 функциями

Полугруппа эндоморфизмов	Пример базиса
(000), (001), (002), (010), (012), (020), (021), (101), (110), (111), (112), (121), (202), (212), (220), (221), (222)	(000010002010111012002112222)
(000), (001), (002), (011), (012), (022), (100), (110), (111), (112), (122), (200), (210), (211), (220), (221), (222)	(000011012011111112012112222)
(000), (010), (011), (012), (020), (022), (100), (101), (102), (111), (121), (122), (200), (202), (211), (212), (222)	(000012022012111212022212222)

Т а б л и ц а 13

Полугруппы с 27 функциями

Полугруппа эндоморфизмов	Пример базиса
(000), (001), (002), (010), (011), (012), (020), (021), (022), (100), (101), (102), (110), (111), (112), (120), (121), (122), (200), (201), (202), (210), (211), (212), (220), (221), (222)	(012)

В заключение отметим, что в [23] найдено 56 позитивно замкнутых классов в P_3.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Боднарчук В. Г., Калужнин Л. А., Котов В. Н., Ромов Б. А.** Теория Галуа для алгебр Поста // Кибернетика. — 1969. — № 3. — С. 1–10; — № 5. — С. 1–9.
2. **Данильченко А. Ф.** О параметрической выразимости функций трёхзначной логики // Алгебра и логика. — 1977. — Т. 16, № 4. — С. 397–416.
3. **Данильченко А. Ф.** Параметрически замкнутые классы функций трёхзначной логики // Изв. АН МССР. — 1978. — Т. 2. — С. 13–20.
4. **Кузнецов А. В.** О средствах для обнаружения невыводимости и невыразимости // Логический вывод. — М.: Наука, 1979. — С. 5–33.
5. **Марченков С. С.** Основные отношения S-классификации функций многозначной логики // Дискрет. математика. — 1996. — Т. 8, № 1. — С. 99–128.

6. **Марченков С. С.** О выразимости функций многозначной логики в некоторых логико-функциональных языках // Дискрет. математика. — 1999. — Т. 11, № 4. — С. 110–126.
7. **Марченков С. С.** Замкнутые классы булевых функций. — М.: Физматлит, 2000. — 126 с.
8. **Марченков С. С.** S-классификация функций трёхзначной логики. — М.: Физматлит, 2001. — 79 с.
9. **Марченков С. С.** Дискриминаторные классы трёхзначной логики // Мат. вопросы кибернетики. — 2003. — Вып. 12. — С. 15–26.
10. **Марченков С. С.** Операторы замыкания с разветвлением по предикату // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. — 2003. — № 6. — С. 37–39.
11. **Марченков С. С.** Критерий позитивной полноты в трёхзначной логике // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 2006. — Т. 13, № 3. — С. 27–39.
   Marchenkov S. S. A criterion for positive completeness in ternary logic // J. Appl. Industr. Math. — 2007. — Vol. 1, N 4. — P. 481–488.
12. **Марченков С. С.** Дискриминаторные позитивно замкнутые классы трёхзначной логики // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 2007. — Т. 14, № 3. — С. 53–66.
   Marchenkov S. S. Discriminator positive complete classes in ternary logic // J. Appl. Industr. Math. — 2008. — Vol. 2, N 4. — P. 542–549.
13. **Марченков С. С.** О замкнутых классах функций k-значной логики, определяемых одним эндоморфизмом // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2009. — Т. 16, № 6. — С. 52–67.
14. **Марченков С. С.** Позитивно замкнутые классы трёхзначной логики, порождаемые одноместными функциями // Дискрет. математика. — 2009. — Т. 21, № 3. — С. 37–44.
15. **Марченков С. С.** Оператор замыкания в многозначной логике, базирующийся на функциональных уравнениях // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2010. — Т. 17, № 4. — С. 18–31.
   Marchenkov S. S. The closure operator in a multivalued logic basen on functional equations // J. Appl. Industr. Math. — 2011. — Vol. 5, N 3. — P. 383–390.
16. **Марченков С. С.** FE-классификация функций многозначной логики // Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычисл. математика и кибернетика. — 2011. — № 2. — С. 32–39.
   Marchenkov S. S. FE classification of functions of many-valued logic // Moscow Univer. Comput. Math. Cybern. — 2011. — Vol. 35, N 2. — P. 89–96.
17. **Марченков С. С.** О классификациях функций многозначной логики с помощью групп автоморфизмов // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2011. — Т. 18, № 4. — С. 66–76.
18. **Марченков С. С.** Атомы решётки позитивно замкнутых классов трёх-

значной логики // Дискрет. математика. — 2012. — Т. 24, № 2. — С. 79–81.

19. **Марченков С. С.** Оператор позитивного замыкания // Докл. АН. — 2012. — Т. 442, № 5. — С. 598–599.
Marchenkov S. S. Operator of positive closure // Dokl. Math. — 2012. — Vol. 85, N 1. — P. 102–103.
20. **Марченков С. С.** Задание позитивно замкнутых классов посредством полугрупп эндоморфизмов // Дискрет. математика. — 2012. — Т. 24, № 4. — С. 19–26.
Marchenkov S. S. Definition of positive closed classes by endomorphism semigroups // Discrete Math. Appl. — 2013. — Vol. 22, N 5–6. — P. 511–520.
21. **Нгуен Ван Хоа.** О структуре самодвойственных замкнутых классов трёхзначной логики // Дискрет. математика. — 1992. — Т. 4, № 4. — С. 82–95.
22. **Янов Ю. И., Мучник А. А.** О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих базиса // Докл. АН СССР. — 1959. — Т. 127, № 1. — С. 44–46.
23. **Barris S.** Primitive positive clones which are endomorphism clones // Algebra Univers. — 1987. — Vol. 24. — P. 41–49.
24. **Barris S., Willard R.** Finitely many primitive positive clones // Proc. Amer. Math. Soc. — 1987. — Vol. 101, N 3. — P. 427–430.
25. **Danil'čenko A. F.** On parametrical expressibility of the functions of k-valued logic // Colloq. Math. Soc. J. Bolyai. — 1981. — Vol. 28. — P. 147–159.
26. **Geiger D.** Closed systems of functions and predicates // Pacific J. Math. — 1968. — Vol. 27. — P. 95–100.
27. **Hermann M.** On Boolean primitive positive clones // Discrete Math. — 2008. — Vol. 308. — P. 3151–3162.
28. **Snow J. W.** Generating primitive positive clones // Algebra Univers. — 2000. — Vol. 44. — P. 169–186.
29. **Szabó L.** Concrete representation of related strucrures of universal algebras. I // Acta Sci. Marh. — 1978. — Vol. 40. — P. 175–184.
30. **Szabó L.** On the lattice of clones acting bicentrally // Acta Cybern. — 1984. — Vol. 6. — P. 381–388.

Марченков Сергей Серафимович,
e-mail: ssmarchen@yandex.ru

Статья поступила
25 марта 2013 г.