

УДК 519.1+519.173

## О ПРОБЛЕМЕ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ВЕКТОРОВ РАЗНООБРАЗИЯ ШАРОВ <sup>\*)</sup>

А. А. Евдокимов, Т. И. Федоряева

**Аннотация.** Изучаются векторы разнообразия шаров ( $i$ -я компонента вектора равна числу различных шаров радиуса  $i$ ) для обыкновенных связных графов. Решена проблема характеристики векторов разнообразия шаров графов малого диаметра.

**Ключевые слова:** граф, метрический шар, радиус шара, число шаров, вектор разнообразия шаров.

### Введение

Пусть  $\tau_i(G)$  — число всех различных шаров радиуса  $i$  в метрическом пространстве обыкновенного связного графа  $G$  с обычным расстоянием между вершинами (т. е. длиной кратчайшей цепи, соединяющей эти вершины).

**Определение 1** [5, 6]. Вектор  $\tau(G) = (\tau_0(G), \tau_1(G), \dots, \tau_d(G))$ , где  $d = d(G)$  — диаметр графа  $G$ , называется *вектором разнообразия шаров* графа  $G$ .

Векторы такого вида впервые рассмотрены в [1], где предложено изучать строение графов как дискретных метрических пространств через разнообразие и пересекаемость метрических шаров, содержащихся в графе (см. также [2]). При таком подходе естественно формулируется задача характеристики векторов разнообразия шаров графов.

**Определение 2.** Вектор  $\tau = (\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_d)$ , составленный из целых неотрицательных чисел, называется *графическим разнообразием шаров*, если существует граф  $G$  такой, что  $\tau(G) = \tau$ . Этот граф называется *графической реализацией* вектора  $\tau$ .

Задача описания векторов разнообразия шаров решена в [6] для деревьев, а в общем случае для графов остаётся открытой. В [7] детально

---

<sup>\*)</sup>Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 14-01-00507).

исследовались компоненты вектора разнообразия шаров и соотношения между ними в графах (деревьях) с дополнительными ограничениями на число вершин и диаметр. В частности, получены необходимые и достаточные условия реализуемости целочисленных векторов специального вида графическим разнообразием шаров. В [7, 9] изучены  $n$ -вершинные графы с локальным  $t$ -разнообразием шаров, т. е. графы, имеющие  $n$  различных шаров радиуса  $i$  для любого  $i \leq t$ . Вектор разнообразия шаров этих графов имеет вид  $(\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_d)$ , где  $\tau_0 = \tau_1 = \dots = \tau_t$ . Установлены все возможные значения таких параметров  $\tau_0$ ,  $d$  и  $t$ .

В [3] найден богатый класс целочисленных векторов, являющихся графическим разнообразием шаров. В [7, 8] установлены точные верхние и точные нижние оценки числа различных шаров радиуса  $i$  в  $n$ -вершинных графах диаметра  $d$ . Эти оценки дают широкий класс целочисленных векторов, не являющихся графическим разнообразием шаров. Кроме того, для графического разнообразия шаров  $(\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_d)$  результаты из [10] показывают нетривиальные взаимосвязи его компонент  $\tau_i$ , принимающих наибольшие возможные значения. В настоящей работе описываются векторы разнообразия шаров для графов малого диаметра.

В статье рассматриваются конечные обыкновенные связные графы и используются общепринятые понятия и обозначения теории графов [11]. Пусть  $V(G)$  — множество вершин графа  $G$ ,  $E(G)$  — множество рёбер,  $\rho_G(x, y)$  — обычное расстояние между вершинами  $x$  и  $y$ ,  $\deg_G x$  — степень вершины  $x$ ,  $B_i^G(x)$  — шар радиуса  $i$  с центром в вершине  $x \in V(G)$  относительно метрики  $\rho_G$ . В приведённых выше обозначениях будем опускать индекс  $G$ , если понятно, о каком графе  $G$  идёт речь, и для краткости вместо  $x \in V(G)$  будем писать  $x \in G$ . Как обычно, через  $P_n$  обозначена  $n$ -вершинная простая цепь и через  $K_n$  — полный  $n$ -вершинный граф.

## 1. Предварительные сведения

В [6] введён вектор  $\Delta_d = (\Delta_0^d, \Delta_1^d, \dots, \Delta_d^d)$ , где

$$\Delta_i^d = \begin{cases} d + 1, & \text{если } 0 \leq i \leq \lfloor d/2 \rfloor, \\ 2(d - i) + 1, & \text{если } \lfloor d/2 \rfloor < i < d, \\ 1, & \text{если } i \geq d, \end{cases}$$

и вычислен вектор разнообразия шаров простой цепи.

**Лемма 1** [6]. Пусть  $P$  — простая цепь длины  $d$ . Тогда вектор разнообразия шаров цепи  $P$  равен  $\Delta_d = (\Delta_0^d, \Delta_1^d, \dots, \Delta_d^d)$ .

Нам потребуются точные верхние оценки  $\overline{\tau}_i$  и точные нижние оценки  $\underline{\tau}_i$  числа различных шаров радиуса  $i$  в  $n$ -вершинных графах диаметра  $d$  ( $n \geq d + 1 \geq 2$  или  $n = d + 1 = 1$ ).

**Теорема 1** [7, 8]. Для произвольного  $n$ -вершинного графа  $G$  диаметра  $d$  справедливы неравенства  $\underline{\tau}_i \leq \tau_i(G) \leq \overline{\tau}_i$ , где

$$\underline{\tau}_i = \begin{cases} n, & \text{если } i = 0, \\ \Delta_i^d, & \text{если } 1 \leq i < d, \\ 1, & \text{если } i \geq d, \end{cases}$$

$$\overline{\tau}_i = \begin{cases} n, & \text{если } 0 \leq i < d \text{ и } i \leq \max\{\lfloor d/2 \rfloor, s\}, \\ 3(d-i)+1, & \text{если } \lfloor d/2 \rfloor < s < i < d, \\ n+d+\lfloor d/2 \rfloor-3i, & \text{если } s \leq \lfloor d/2 \rfloor < i \leq \lfloor d/2 \rfloor + s \text{ и } i < d, \\ 2(d-i)+1, & \text{если } \lfloor d/2 \rfloor + s < i < d, \\ 1, & \text{если } i \geq d, \end{cases}$$

$$s = n - d - 1.$$

В статье используем графы  $H_{n,d,t}$  [7]. Пусть  $n \geq d + 1 + t$  и  $0 < t < d$ . Рассмотрим  $k$  и  $r$  такие, что  $n = d + 1 + kt + r$ ,  $k \geq 1$ ,  $0 \leq r < t$ . Пусть  $P$  — простая цепь с концами  $a, b$  длины  $d$ , через  $a_i$  обозначим её вершину такую, что  $\rho_P(a, a_i) = i$  и  $0 \leq i \leq d$ . Добавим к  $P$  простые цепи  $P_1, \dots, P_k$  длины  $t + 1$  такие, что  $a_0, a_{t+1}$  — концевые вершины каждой из этих цепей и

$$V(P_q) \cap V(P_l) = V(P_q) \cap V(P) = \{a_0, a_{t+1}\} \quad \text{при } q \neq l.$$

Если  $r > 0$ , то к полученному графу  $H$  добавим простую цепь  $P_0$  длины  $r + 1$  с концевыми вершинами  $a_0, a_r$  такую, что  $V(P_0) \cap V(H) = \{a_0, a_r\}$ . При  $r = 0$  к  $H$  ничего не добавляем. Полученный граф есть  $H_{n,d,t}$  (рис. 1). Очевидно, что  $H_{n,d,t}$  —  $n$ -вершинный граф диаметра  $d$ .

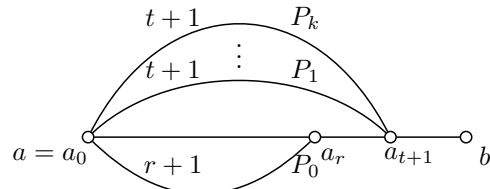


Рис. 1. Граф  $H_{n,d,t}$

**Утверждение 1** [7, 10]. Пусть  $n \geq d + 1 + t$  и  $0 < t < d$ . Тогда  $\tau(H_{n,d,t}) = (n, \dots, n, \Delta_{t+1}^d, \Delta_{t+2}^d, \dots, \Delta_d^d)$ .

## 2. Графы малого диаметра

**Лемма 2.** (i) Если вектор  $(\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_d)$  является графическим разнообразием шаров, то

$$\tau_0 \geq \dots \geq \tau_i \geq \tau_{i+1} \geq \dots \geq \tau_d = 1. \quad (1)$$

(ii) Если  $u, v$  — вершины графа  $G$  и  $B_i^G(u) = B_i^G(v)$ , то  $B_{i+1}^G(u) = B_{i+1}^G(v)$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Докажем утверждение (ii). Предположим, что существует вершина  $x \in B_{i+1}^G(u) \setminus B_{i+1}^G(v)$ . Тогда  $\rho_G(x, u) \leq i+1$  и можно найти вершину  $y$  такую, что

$$y = \begin{cases} x, & \text{если } \rho_G(x, u) \leq i, \\ z, & \text{если } \rho_G(x, u) = \rho_G(x, z) + \rho_G(z, u) = i+1 \text{ и } \rho_G(z, u) = i. \end{cases}$$

Очевидно, что  $y \in B_i^G(u) \setminus B_i^G(v)$ . Утверждение (ii) доказано.

Пусть граф  $G$  — графическая реализация вектора  $(\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_d)$ . Так как  $d = d(G)$ , имеем  $\tau_d = 1$ . Из (ii) получаем неравенство  $\tau_i \geq \tau_{i+1}$ . Лемма 2 доказана.

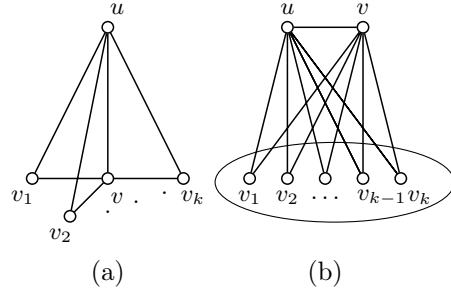


Рис. 2. (а) волан  $V_k(u, v)$ ,  $k \geq 0$ ,  
(б) граф, содержащий волан

**Определение 3** [4]. Граф  $V_k(u, v)$ , изображённый на рис. 2(а), называется *воланом на вершинах  $u, v$* . Граф  $G$  имеет волан, если в  $G$  есть подграф  $V_k(u, v)$  и  $\deg_G u = \deg_G v = k+1$  (рис. 2(б)).

**Замечание.** В произвольном графе  $G$  шары радиуса 1 с различными центрами  $u, v$  совпадают тогда и только тогда, когда  $G$  имеет волан на  $u, v$ .

**Лемма 3.** Пусть  $d \geq 2$  и  $\tau_0 \geq \tau_1$ . Тогда вектор  $(\tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_d)$  является графическим разнообразием шаров тогда и только тогда, когда  $(\tau_1, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_d)$  — графическое разнообразие шаров.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Докажем индукцией по  $\tau_0 - \tau_1 \geq 0$ , что если  $(\tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_d)$  — графическое разнообразие шаров, то таким же является и вектор  $(\tau_1, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_d)$ . Это так при  $\tau_0 = \tau_1$ . Пусть  $\tau_0 > \tau_1$  и  $\tau(G) = (\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_d)$  для графа  $G$ . Тогда в графе  $G$  совпадают шары радиуса 1 для некоторых различных вершин  $u, v \in G$ , и по замечанию 1 граф  $G$  имеет волан на  $u, v$  (см. рис. 2(б)). В силу леммы 2(ii) получаем

$$B_i^G(u) = B_i^G(v) \quad \forall i \geq 1. \quad (2)$$

Определим граф  $H = G \setminus u$ . Ясно, что  $H$  — связный изометричный подграф графа  $G$ . Используя очевидное равенство  $\rho_G(x, u) = \rho_G(x, v)$  для любой вершины  $x \in G \setminus \{u, v\}$ , условие  $d \geq 2$  и свойство изометричности, нетрудно доказать, что  $d(H) = d$  и

$$(B_i^H(x) = B_i^H(y) \Leftrightarrow B_i^G(x) = B_i^G(y)) \quad \forall x, y \in H. \quad (3)$$

Пусть  $i \geq 1$  и  $z_1 = v, z_2, \dots, z_{\tau_i}$  — центры всех различных шаров радиуса  $i$  в графе  $G$ . В силу (2) имеем  $u \notin \{z_1, \dots, z_{\tau_i}\}$ . Теперь из (3) следует, что  $z_1, z_2, \dots, z_{\tau_i}$  — центры всех различных шаров радиуса  $i$  в графе  $H$ . Таким образом,  $\tau(H) = (\tau_0 - 1, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_d)$ . По индукционному предположению вектор  $(\tau_1, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_d)$  является графическим разнообразием шаров.

Докажем обратное утверждение. Пусть  $\tau(H) = (\tau_1, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_d)$ , причём  $\tau_0 > \tau_1$ . Рассмотрим произвольную вершину  $v$  графа  $H$  и все её смежные вершины  $v_1, \dots, v_k$ . Добавим к графу  $H$  новую вершину  $u$  и соединим её ребрами с  $v, v_1, \dots, v_k$ . Полученный граф обозначим через  $G$ . Очевидно, что  $H = G \setminus u$  и  $G$  имеет волан на  $u, v$  (см. рис. 2(b)). По доказанному имеем  $\tau(G) = (\tau_1 + 1, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_d)$ . Продолжая такой процесс добавления вершин, получим граф с вектором разнообразия шаров  $(\tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_d)$ . Лемма 3 доказана.

Пусть граф  $G$  имеет вершину  $v$  степени 2. Рассмотрим различные вершины  $v_1, v_2$ , смежные с  $v$ . Определим граф  $G_v$  следующим образом. Пусть  $u \notin V(G)$ . Полагаем

$$V(G_v) = V(G) \cup \{u\}, \quad E(G_v) = E(G) \cup \{v_1u, v_2u\}.$$

В дальнейшем треугольник графа, имеющий две вершины степени 2, будем называть *висячим треугольником*.

**Лемма 4.** Пусть граф  $G$  имеет вершину  $v$  степени 2,  $d \geq 2$  и  $\tau(G) = (\tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_d)$ . Тогда

- (i)  $\tau(G_v) = (\tau_0 + 1, \tau_1 + 1, \tau_2, \dots, \tau_d)$ , если граф  $G$  не имеет висячего треугольника, содержащего вершину  $v$ ;
- (ii)  $\tau(G_v) = (\tau_0 + 1, \tau_1 + 2, \tau_2, \dots, \tau_d)$ , если в графе  $G$  существует висячий треугольник с вершиной  $v$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $\tau(G_v) = (\tau'_0, \tau'_1, \dots, \tau'_d)$ . Из вида  $G_v$  имеем  $\tau'_0 = \tau_0 + 1$ ,

$$\rho_{G_v}(x, u) = \rho_{G_v}(x, v) \quad \forall x \in G \setminus \{v\}, \quad (4)$$

$$B_1^{G_v}(u) \neq B_1^{G_v}(x) \quad \forall x \in G, \quad (5)$$

и  $B_2^{G_v}(u) = B_2^{G_v}(v)$ . По лемме 2(ii) получаем

$$B_i^{G_v}(u) = B_i^{G_v}(v) \quad \forall i \geq 2. \quad (6)$$

Поскольку  $G$  является изометричным подграфом графа  $G_v$ , имеем

$$\rho_{G_v}(x, y) = \rho_G(x, y) \quad \forall x, y \in G. \quad (7)$$

В силу (4), (7) и условия  $d \geq 2$  получаем  $d = d'$ . Из (7) имеем

$$B_i^G(x) \subseteq B_i^{G_v}(x) \subseteq B_i^G(x) \cup \{u\} \quad \forall x \in G. \quad (8)$$

Если  $x, y \in G \setminus \{v\}$  и  $B_i^G(x) = B_i^G(y)$ , то из (4) и (7) следует, что

$$u \in B_i^{G_v}(x) \Leftrightarrow \rho_G(x, v) \leq i \Leftrightarrow v \in B_i^G(y) \Leftrightarrow \rho_{G_v}(y, u) \leq i \Leftrightarrow u \in B_i^{G_v}(y).$$

Учитывая (8), заключаем, что

$$(B_i^G(x) = B_i^G(y) \Leftrightarrow B_i^{G_v}(x) = B_i^{G_v}(y)) \quad \forall x, y \in G \setminus \{v\}. \quad (9)$$

Покажем, что

$$(B_j^G(x) = B_j^G(v) \Leftrightarrow B_j^{G_v}(x) = B_j^{G_v}(v)) \quad \forall x \in G \setminus \{v\}, \forall j \geq 2. \quad (10)$$

Действительно, пусть  $B_j^G(x) = B_j^G(v)$ . Так как  $j \geq 2$ , то  $u \in B_j^{G_v}(v)$ . Используя (4) и (7), получаем  $\rho_{G_v}(x, u) = \rho_{G_v}(x, v) = \rho_G(x, v) \leq j$ . Следовательно,  $u \in B_j^{G_v}(x)$ . В силу (8) имеем  $B_j^{G_v}(x) = B_j^{G_v}(v)$ . Обратное очевидно.

Используя утверждения (6), (9) и (10), нетрудно доказать, что  $\tau'_i = \tau_i$  при  $i \geq 2$ .

Выясним теперь соотношение между  $\tau_1$  и  $\tau'_1$ . Пусть  $v_1, v_2$  — различные вершины, смежные с  $v$ . Используя вид  $G_v$  и замечание 1, получаем

$$\begin{aligned} \forall x \in G \setminus \{v\} \quad B_1^{G_v}(v) &\neq B_1^{G_v}(x) \\ \text{и } B_1^G(v) = B_1^G(x) &\Leftrightarrow \exists i (x = v_i, \deg_G x = 2, \rho_G(v_1, v_2) = 1). \end{aligned} \quad (11)$$

Последнее условие из эквивалентности в (11) в точности означает существование в графе  $G$  висячего треугольника, содержащего вершину  $v$ . Пусть  $z_1 = v, z_2, \dots, z_{\tau_1}$  — центры всех различных шаров радиуса 1 в графе  $G$ . Тогда  $z_i \in G \setminus \{v\}$  при  $i \geq 2$ , и в силу (5), (9) и (11) в графе  $G_v$  шары радиуса 1 с центрами  $z_1, z_2, \dots, z_{\tau_1}, u$  также будут различными. Предположим, что в графе  $G_v$  есть шар  $B_1^{G_v}(z)$ ,  $z \in G_v$ , отличный от

шаров радиуса 1 с центрами  $z_1, z_2, \dots, z_{\tau_1}, u$ . Тогда  $z \neq u$  и  $z \neq v$ . Следовательно,  $z \in G \setminus \{v\}$  и  $B_1^G(z) = B_1^G(z_k)$  для некоторого  $k$ . Если  $z_k \neq v$ , то  $B_1^{G_v}(z) = B_1^{G_v}(z_k)$  в силу (9), пришли к противоречию. Значит,  $z_k = v$  и  $B_1^G(z) = B_1^G(v)$ . В силу (11) в графе  $G$  существует висячий треугольник, содержащий вершины  $z$  и  $v$ , причем  $\deg_G z = 2$ .

СЛУЧАЙ 1. Пусть граф  $G$  не имеет висячего треугольника, содержащего вершину  $v$ . По доказанному в графе  $G$  нет шара радиуса 1, отличного от шаров с центрами  $z_1, z_2, \dots, z_{\tau_1}, u$ . Следовательно,  $\tau'_1 = \tau_1 + 1$ .

СЛУЧАЙ 2. Пусть граф  $G$  имеет висячий треугольник, содержащий вершину  $v$ . Так как  $\deg_G v = 2$ , в графе  $G$  имеется единственный висячий треугольник, содержащий  $v$ . Он образован на вершинах  $v_1, v_2, v$ . Поскольку  $d \geq 2$ , для некоторых  $i, j$  имеем  $\deg_G v_i = 2$  и  $\deg_G v_j \geq 3$ . В силу (11) получаем  $B_1^G(v) = B_1^G(v_i)$ . Поэтому  $v_i \notin \{z_1, z_2, \dots, z_{\tau_1}, u\}$ . Используя замечание 1, нетрудно проверить, что  $B_1^{G_v}(v_i) \neq B_1^{G_v}(x)$  для любой вершины  $x \in G_v \setminus \{v_i\}$ . Таким образом, по доказанному вершины  $z_1, z_2, \dots, z_{\tau_1}, u, v_i$  являются центрами всех различных шаров радиуса 1 графа  $G_v$ . Стало быть  $\tau'_1 = \tau_1 + 2$ . Лемма 4 доказана.

В следующей теореме получено явное описание графических разнообразий шаров  $(\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_d)$  при  $d \leq 3$ .

**Теорема 2** (критерий графичности разнообразия шаров). Вектор  $(\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_d)$  при  $d \leq 3$  является графическим разнообразием шаров тогда и только тогда, когда  $\tau_0 \geq \dots \geq \tau_i \geq \tau_{i+1} \geq \dots \geq \tau_d = 1$  и

- (i)  $\tau_0 \geq 2$  при  $d = 1$ ;
- (ii)  $\tau_1 \geq 3$  при  $d = 2$ ;
- (iii) при  $d = 3$  справедливо неравенство  $\tau_2 \geq 3$ , а соотношения  $3 \leq \tau_1 = \tau_2 \leq 5$  и  $\tau_1 = \tau_2 + 1 = 5$  не выполняются.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $(\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_d)$  — графическое разнообразие шаров и граф  $G$  — его графическая реализация. По лемме 2(i) выполняется система неравенств (1).

При  $d = 0$  из (1) имеем  $\tau_0 = 1$ . Кроме того,  $\tau(K_1) = (1)$ .

Пусть  $d = 1$ . Тогда  $d(G) = 1$ . Следовательно, граф  $G$  изоморфен  $K_{\tau_0}$ , причём  $\tau_0 \geq 2$ . Обратно, при  $\tau_0 \geq 2$  и  $\tau_1 = 1$  получаем  $\tau(K_{\tau_0}) = (\tau_0, \tau_1)$ .

Докажем утверждение при  $d = 2$ . В силу леммы 3 достаточно ограничиться случаем  $\tau_0 = \tau_1$ . Тогда  $\tau_1 \geq \Delta_1^d = 3$  по теореме 1. Обратно, при  $\tau_1 = 3$  по лемме 1 имеем  $\tau(P_3) = (3, 3, 1)$ , а при  $\tau_1 \geq 4$  в силу утверждения 1 получаем  $\tau(H_{\tau_1, 2, 1}) = (\tau_1, \tau_1, 1)$ .

Пусть  $d = 3$ . Не уменьшая общности, в силу леммы 3 будем считать, что  $\tau_0 = \tau_1$ . Из теоремы 1 получаем  $\tau_1 \geq \Delta_1^d = 4$  и  $\tau_2 \geq \Delta_2^d = 3$ , причём

если  $\tau_1 \leq 5$ , то  $\tau_2 \leq 3$ . Таким образом, справедливы требуемые соотношения из (iii). Теперь построим графы, реализующие все такие векторы  $(\tau_1, \tau_1, \tau_2, \tau_3)$ .

Если  $\tau_2 = 3$ , то  $\tau(P_4) = (4, 4, 3, 1)$  по лемме 1 и при любом  $\tau_1 \geq 5$  имеем  $\tau(H_{\tau_1, 3, 1}) = (\tau_1, \tau_1, 3, 1)$  по утверждению 1. Пусть  $\tau_2 \geq 4$ . Тогда  $\tau_1 \geq 6$ .

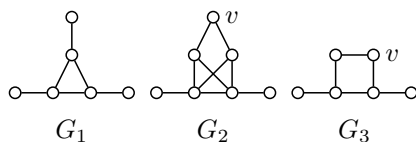


Рис. 3. Графы  $G_1, G_2, G_3$

СЛУЧАЙ 1:  $\tau_2 = 4$ . Нетрудно вычислить, используя замечание 1, вектор разнообразия шаров графов  $G_1$  и  $G_2$  (рис. 3). Получаем  $\tau(G_1) = (6, 6, 4, 1)$  и  $\tau(G_2) = (7, 7, 4, 1)$ . Граф  $G_2$  имеет вершину  $v$  степени 2, не входящую в треугольник. По лемме 4 вектор  $(\tau_1, \tau_1, 4, 1)$  является графическим разнообразием шаров при любом  $\tau_1 \geq 6$ .

СЛУЧАЙ 2:  $\tau_2 = 5$ . Аналогично случаю 1 вычислим вектор  $\tau(G_3) = (6, 6, 5, 1)$  для графа  $G_3$  (см. рис. 3). По лемме 4 вектор  $(\tau_1, \tau_1, 5, 1)$  — графическое разнообразие шаров для любого  $\tau_1 \geq 6$ .

СЛУЧАЙ 3:  $\tau_2 \geq 6$ . Тогда  $\tau(H_{\tau_2, 3, 2}) = (\tau_2, \tau_2, \tau_2, 1)$  по утверждению 1. Граф  $H_{\tau_2, 3, 2}$  имеет вершину степени 2, не входящую в треугольник. Тогда для любого  $\tau_1 \geq \tau_2$  вектор  $(\tau_1, \tau_1, \tau_2, 1)$  является графическим разнообразием шаров по лемме 4. Теорема 2 доказана.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Евдокимов А. А. Локально изометрические вложения графов и свойство продолжения метрики // Сиб. журн. исслед. операций. — 1994. — Т. 1, № 1. — С. 5–12.
2. Евдокимов А. А. Вложения в классе параметрических отображений ограниченного искажения // Учен. зап. Казанск. гос. ун-та. — 2009. — Т. 151, № 2. — С. 72–79.
3. Рычков К. Л. О достаточных условиях существования графа с заданным разнообразием шаров // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 2006. — Т. 13, № 1. — С. 99–108.  
Rychkov K. L. Sufficient conditions for the existence of a graph with a given variety of balls // J. Appl. Industr. Math. — 2007. — Vol. 1, N 3. — P. 380–385.
4. Федоряева Т. И. Операции и изометрические вложения графов, связанные со свойством продолжения метрики // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 1995. — Т. 2, № 3. — С. 49–67.  
Fedoryaeva T. I. Operations and isometric embeddings of graphs related to the metric prolongation property // Discrete Anal. Oper. Res. — 1997. — Vol. 391. — P. 31–49.



5. **Федоряева Т. И.** О разнообразии метрических шаров в графах // Проблемы теоретической кибернетики. Тез. докл. XIV Междунар. конф. (Пенза, 23–28 мая 2005 г.). — М.: Изд-во мех.-мат. фак-та МГУ, 2005. — С. 159.
6. **Федоряева Т. И.** Разнообразие шаров в метрических пространствах деревьев // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 2005. — Т. 12, № 3. — С. 74–84.
7. **Федоряева Т. И.** Векторы разнообразия шаров для графов и оценки их компонент // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 2007. — Т. 14, № 2. — С. 47–67.  
**Fedoryaeva T. I.** Diversity vectors of balls in graphs and estimates of the components of the vectors // J. Appl. Industr. Math. — 2008. — Vol. 2, N 3. — P. 341–357.
8. **Федоряева Т. И.** Точные верхние оценки числа различных шаров заданного радиуса в графах с фиксированными числом вершин и диаметром // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2009. — Т. 16, № 6. — С. 74–92.
9. **Федоряева Т. И.** О графах с заданными диаметром, числом вершин и локальным разнообразием шаров // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2010. — Т. 17, № 1. — С. 65–74.  
**Fedoryaeva T. I.** On the graphs with given diameter, number of vertices, and local diversity of balls // J. Appl. Industr. Math. — 2011. — Vol. 5, N 1. — P. 44–50.
10. **Федоряева Т. И.** Мажоранты и миноранты класса графов с фиксированными диаметром и числом вершин // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2013. — Т. 20, № 1. — С. 58–76.  
**Fedoryaeva T. I.** Majorants and minorants for the classes of graphs with fixed diameter and number of vertices // J. Appl. Industr. Math. — 2013. — Vol. 7, N 2. — P. 153–165.
11. **Харари Ф.** Теория графов. — М.: Мир, 1973. — 300 с.

Евдокимов Александр Андреевич,  
e-mail: evdok@math.nsc.ru  
Федоряева Татьяна Ивановна,  
e-mail: tatiana.fedoryaeva@gmail.com

Статья поступила  
16 декабря 2012 г.