ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Март—апрель 2014. Том 21, № 2. С. 33–51

УДК 519.8

РАЗБИЕНИЕ ПЛОСКОГО ГРАФА С ОБХВАТОМ 6 НА ДВА ЛЕСА С ДЛИНОЙ ЦЕПЕЙ НЕ БОЛЬШЕ 4 *)

А. Н. Глебов, Д. Ж. Замбалаева

Аннотация. Доказано, что множество вершин любого плоского графа с обхватом не менее 6 можно разбить на два подмножества, каждое из которых порождает лес, в котором длина любой цепи не превосходит 4.

Ключевые слова: плоский граф, обхват, путевая разбиваемость.

Введение

Одно из центральных мест в современной теории графов занимает теория раскраски, т. е. разбиения дискретного объекта на проще устроенные подобъекты. В частности, внимание ведущих графистов мира привлекают задачи о вершинных раскрасках и разбиениях планарных графов. Одной из разновидностей таких задач являются задачи о путевых разбиениях графов, при которых каждая часть разбиения (цветовой класс) порождает подграф с заданными ограничениями на длины цепей.

Понятие путевой разбиваемости введено в [6]. Пусть $a \geqslant 1$, $b \geqslant 1$ — целые числа. Граф G называется (a,b)-*разбиваемым*, если существует разбиение множества его вершин $V = V_1 \cup V_2$ такое, что в подграфе $G_1 = G[V_1]$, порождённом подмножеством V_1, число вершин наибольшей простой цепи не превосходит a, а в подграфе $G_2 = G[V_2]$ — не превосходит b. Заметим, что $(1,1)$-разбиваемость графа равносильна его двудольности, $(2,2)$-разбиваемость — возможности разбиения на два подграфа с максимальной степенью 1, а $(3,3)$-разбиваемость — разбиваемости на два звёздных леса (для графов без 3-циклов).

В настоящей работе любое (a,b)-разбиение графа интерпретируется как раскраска его вершин цветами из множества $\{1,2\}$ такая, что число вершин любой одноцветной цепи цвета 1 не превосходит a, а число

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 12–01–00090, 12–01–00093, 12–01–00448, 12–01–33028 и 12–01–00631) и гранта НШ–1939.2014.1 Президента России для ведущих научных школ.

вершин любой цепи цвета 2 не превосходит b. Таким образом, к данной задаче оказываются применимы все методы, традиционно используемые при исследовании раскрасок плоских графов, и метод, основанный на применении формулы Эйлера.

В [6–8] и ряде других работ исследовались (a, b)-разбиения для некоторых специальных классов (непланарных) графов. В [3] доказано, что планарные графы с обхватом не менее 8, 9 и 16 (2,3)-, (2,2)- и (1,2)-разбиваемы соответственно. Позднее эти результаты усилены в [1, 2], где доказано, что планарные графы с обхватом не менее 14 $(1, 2)$-разбиваемы, а с обхватом не менее 8 — $(2, 2)$-разбиваемы. В [4] доказано, что множество вершин любого планарного графа с обхватом не менее 7 можно разбить на два звёздных леса, что эквивалентно $(3, 3)$-разбиваемости такого графа. Данный результат усилен в [5]: вершины любого планарного графа с обхватом не менее 7 можно разбить на два леса, каждый из которых состоит из цепей, содержащих не более трёх вершин.

Целью настоящей статьи является доказательство следующего утверждения.

Теорема 1. *Любой плоский граф с обхватом не менее* 6 *является* $(5, 5)$-*разбиваемым.*

В [9] показано, что для любых фиксированных значений параметров a, b существуют плоские графы, не являющиеся (a, b)-разбиваемыми. При этом во всех примерах графов, приводимых в [9], содержится большое число циклов длины 3. Поэтому представляет интерес вопрос о том, для какого минимального значения обхвата $g \geqslant 4$ существуют константы a, b такие, что любой плоский граф с обхватом не менее g (a, b)-разбиваем. Из теоремы 1 следует, что $g \leqslant 6$.

1. Свойства минимального контрпримера к теореме 1

Пусть граф G является контрпримером к теореме 1 с минимальным числом вершин. Далее любую (5,5)-раскраску вершин плоского графа будем называть просто раскраской.

Докажем, что граф G обладает следующими свойствами.

(G1) $\delta(G) > 1$.

Допустим, что в графе G имеется вершина v степени 1. Из минимальности выбора контрпримера G следует, что существует раскраска φ_1 вершин графа $G - v$. Окрасив v в цвет, отличный от цвета смежной с ней вершины, получим искомую раскраску φ вершин графа G.

Обозначим через $d_3(v)$ число вершин степени не менее 3, смежных с $v \in V$.

(G2) Вершина $v \in V(G)$ степени $d \geqslant 3$ смежна не более чем с $d-2$ вершинами, параметр d_3 которых не превосходит 2.

Пусть $v \in V(G)$, $d(v) = d$. Обозначим через $V' \subset V$ множество вершин, смежных с v, параметр d_3 которых не превосходит 2. Предположим, что $d - 1 \leqslant |V'| \leqslant d$. Удалим из графа G множество вершин $\{v\} \cup V'$, а также 2-вершины, смежные с вершинами из V'. Ввиду минимальности контрпримера G существует раскраска φ_1 вершин полученного графа, которая, в свою очередь, может быть продолжена до раскраски всего графа G, так как в подграфе, индуцированном удалёнными вершинами, число вершин наибольшей цепи не превосходит 5 и каждая удалённая вершина смежна не более чем с одной неудалённой.

Следствие 1. *Для любой вершины* $v \in V$ $d_3(v) \geqslant 2$.

Назовём *слабой* вершину $v \in V$ такую, что $d(v) \geqslant 3$ и $d_3(v) = 2$. Множество всех слабых вершин графа G обозначим через V^w.

Следствие 2. *В графе* G *нет смежных* 2*-вершин и смежных слабых вершин.*

Следствие 3. *В графе* G *вершина степени* 3 *смежна не более чем с одной вершиной, которая имеет степень* 2 *или является слабой.*

Следствие 4. *При наличии в* 6*-грани двух* 2*-вершин в каждом из двух путей по границе грани между ними найдётся вершина степени не менее* 4.

Для любой неокрашенной вершины v через $\varphi_{\min}(v)$ обозначим цвет, в который окрашена меньшая часть смежных с v уже окрашенных вершин; если вершин, окрашенных в разные цвета, в окружении v поровну, то $\varphi_{\min}(v)$ определяется произвольно. Будем писать просто $\varphi_{\min}$, если вершина v однозначно определяется из контекста.

Пусть имеется раскраска φ_1 вершин некоторого подграфа $G_1(V_1, E_1)$ графа G. *Стандартным продолжением* раскраски φ_1 на вершины G будем называть дораскраску вершин из $V \setminus V_1$, смежных ровно с одной вершиной из V_1, такую, что каждая из них красится в цвет, отличный от цвета смежной вершины из V_1.

(G3) Если 6-грань $f \in F$ инцидентна 2-вершине u и четырём 3-вершинам, то она инцидентна вершине $v \notin V^w$ такой, что $d(v) \geqslant 4$. Более того, если $uv \notin E$, то $d_3(v) \geqslant 4$.

Рассмотрим грань $f = v_1 \ldots v_6 \in F$, $d(v_1) = 2$. Допустим, что вершины $v_2, \ldots, v_6$ имеют степень 3. Удалим из графа G вершины грани f. Продолжим раскраску φ_1 вершин полученного графа до раскраски φ всего графа G. После стандартной дораскраски удалённых 3-вершин полагаем $\varphi(v_1) := \varphi_{\min}$. Таким образом, $d(v_k) \geqslant 4$ для некоторого $k \in \{2, \ldots, 6\}$. Допустим, что $k \notin \{2, 6\}$, $d_3(v_k) \leqslant 3$. Тогда удалим из графа G вершины грани f и 2-вершины, смежные с v_k. Для вершин полученного графа существует раскраска φ_1, которая продолжается на весь граф G. Каждую из удалённых вершин красим в цвет, отличный от цвета смежной с ней вершины. Остаётся окрасить вершину v_1 и, возможно, вершину v_k, если $d_3(v_k) = 2$. Вершину v_k окрашиваем произвольно, $\varphi(v_1) := \neg\varphi(v_k)$.

Остаётся доказать, что $v_k \notin V^w$ при $k \in \{2, 6\}$. Допустим противное: без потери общности предположим, что $k = 2$, $d_3(v_2) = 2$. Обозначим вершины как на рис. 1 ($l = d(v_2) - 3$). Удалим из G вершину v_1. Для полученного графа существует раскраска φ_1. Допустим, что $\varphi_1(v_2) \neq \varphi_1(v_6)$, иначе φ_1 продолжается на вершину v_1. Для определённости $\varphi_1(v_2) = 2$, $\varphi_1(v_6) = 1$. Предположим, что вершины $w_2, \ldots, w_6$ окрашены в один цвет α, иначе каждую из вершин v_i, u_j перекрасим в цвет, отличный от $\varphi_1(w_i)$, $\varphi_1(u'_j)$ соответственно, после чего докрашиваем вершину v_1 в цвет, отличный от цвета вершины v_2. Если $\alpha = 1$, то полагаем $\varphi(v_1) := 2$, $\varphi(u_i) := \neg\varphi_1(u'_i)$, $i = \overline{1, l}$, иначе $\varphi(v_1) := 1$.

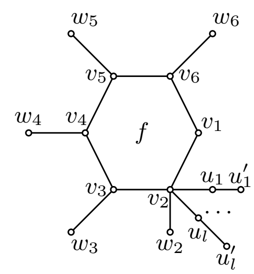


Рис. 1

Следствие 5. *Если 6-грань $f \in F$ инцидентна 2-вершине, то она инцидентна и вершине степени не менее 4.*

Далее в формулировках свойств u_i и w_j используются для обозначения вершин, не инцидентных грани f.

(G4) Пусть грань $f = v_1 \ldots v_6 \in F$ такая, что $d(v_1) = 4$, $d(v_2) = d(v_3) = d(v_5) = 3$, $d(v_6) = 3$, $d(v_4) = 2$, и пусть $v_1u_1 \in E$, $d(u_1) = 3$. Тогда вершина u_1 не смежна ни с 2-вершиной, ни со слабой 3-вершиной.

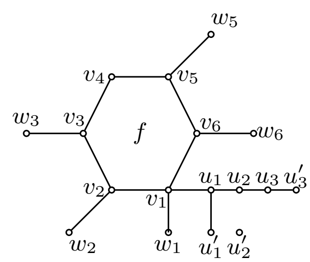


Рис. 2

Пусть вершина u_1 смежна с 2-вершиной u_2. Удалим из графа G вершины грани f и вершины u_1, u_2. Продолжим раскраску φ_1 полученного графа стандартным образом, после чего остаётся окрасить 2-вершину v_4 в $\neg\varphi(v_1)$. Предположим, что u_1 смежна со слабой 3-вершиной u_2. Обозначим вершины как на рис. 2.

Удалим из графа G 2-вершину v_4. Для полученного графа G_1 существует раскраска φ_1. Предположим, что вершины, смежные с v_4, окрашены в разные цвета, иначе раскраска φ_1 продолжается на вершину v_4. Пусть вершины u_1', u_2', u_3', w_1 и либо w_2, w_3, либо w_5, w_6 одноцветные, иначе обесцветим вершины грани f и цепи $P = u_1u_2u_3$, после стандартной дораскраски положим $\varphi(v_4) := \neg\varphi(v_1)$. Для определённости $\varphi_1(u_i') = \varphi_1(w_i) = 1$, $i = 1,2,3$. Если $\varphi_1(v_1) = 1$, то $\varphi(v_3) := 2$, $\varphi(v_4) := \neg\varphi_1(v_5)$. Пусть $\varphi_1(v_1) = 2$. Если $\varphi_1(u_i) = 1$ для некоторого $i \in \{1,2,3\}$, то цвет вершины u_i оставляем равным 1, остальные вершины цепи $u_1u_2u_3$ и грани f перекрашиваем стандартным образом, $\varphi(v_4) := \neg\varphi(v_1)$. Пусть $\varphi_1(u_i) = 2$, $i = 1,2,3$. Если $\varphi_1(v_3) = 2$, $\varphi(v_5) = 1$, то $\varphi_1(v_2) = 1$ (иначе в графе G_1 имеется одноцветная цепь $u_1u_2u_3v_1v_2v_3$), и можем докрасить v_4 в цвет 2. Пусть $\varphi_1(v_3) = 1$, $\varphi_1(v_5) = 2$. Положим $\varphi(v_4) := 2$. Тогда если $\varphi_1(v_5) = \varphi_1(w_5) = 2$, то перекрашиваем вершину v_5, затем при $\varphi_1(v_6) = \varphi_1(w_6) = 1$ перекрашиваем v_6.

(G5) Пусть грань $f = v_1 \ldots v_6 \in F$ такая, что $d(v_1) = 4$, $d(v_2) = d(v_3) = d(v_4) = d(v_6) = 3$, $d(v_5) = 2$, и пусть $v_1u_1 \in E$, $d(u_1) = 3$. Тогда вершина u_1 не смежна с 2-вершиной.

Пусть u_1 смежна с 2-вершиной. Обозначим вершины как на рис. 3. Удалим из графа G 2-вершину v_5. Для полученного графа G_1 существует раскраска φ_1. Пусть $\varphi_1(u_1') = \varphi_1(u_2') = \varphi_1(w_i) = 1$, $i = \overline{1,4}$, иначе обесцветим вершины грани f, а также вершины u_1, u_2, после стандартной дораскраски положим $\varphi(v_5) := \neg\varphi(v_1)$. Вершины, смежные с v_5, окрашены в разные цвета, иначе раскраска φ_1 продолжается на вершину v_5. Если $\varphi_1(v_4) = 1$, $\varphi_1(v_6) = 2$, то после стандартной

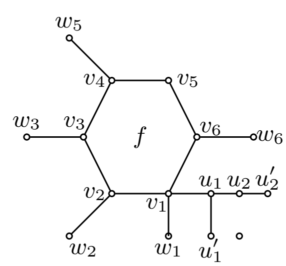
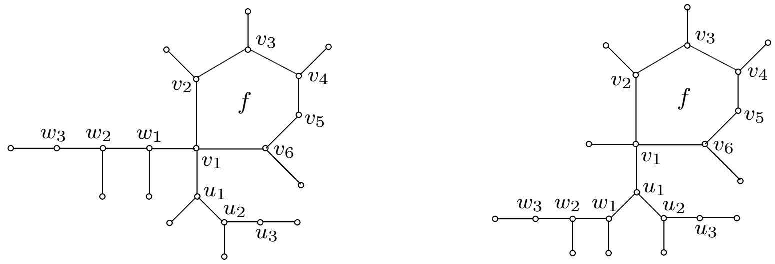


Рис. 3

перекраски вершин $v_1, v_2, v_3, v_6, u_1, u_2$ полагаем $\varphi(v_5)$ равной 2. Пусть $\varphi_1(v_4) = 2$, $\varphi_1(v_6) = 1$. Если одна из вершин v_1, v_2, v_3, u_1 окрашена в 1, то полагаем $\varphi(v_5) := 2$, иначе $\varphi(v_5) := 1$, $\varphi(v_6) := \neg\varphi(w_6)$.

(G6) Пусть грань $f = v_1 \ldots v_6 \in F$ такая, что $d(v_1) = 4$, $d(v_2) = d(v_3) = d(v_4) = d(v_6) = 3$, $d(v_5) = 2$, и пусть имеется цепь $v_1u_1u_2u_3$, $d(u_1) = d(u_2) = 3$, $d(u_3) = 2$. Тогда в графе G нет цепей вида $v_1w_1w_2w_3$ и $u_1w_1w_2w_3$, где $d(w_1) = d(w_2) = 3$, $d(w_3) = 2$.

Допустим, что имеется цепь $v_1w_1w_2w_3$, $d(w_1) = d(w_2) = 3$, $d(w_3) = 2$ (рис. 4(а)). Заметим, что вершины, смежные с v_2, v_3, v_4 и не инцидентные грани f, имеют степень не менее 3 по следствиям 1–3. Следовательно, вершины v_2, v_3, v_4 не смежны с u_3 и w_3. Кроме того, из условия $g(G) \geqslant 6$ следует, что $v_4 \notin \{u_2, w_2\}$. В дальнейшем при рассмотрении других конфигураций несовпадение вершин, вытекающее из следствий 1–3 и условия $g(G) \geqslant 6$, специально не оговаривается.



(а) (б)

Рис. 4.

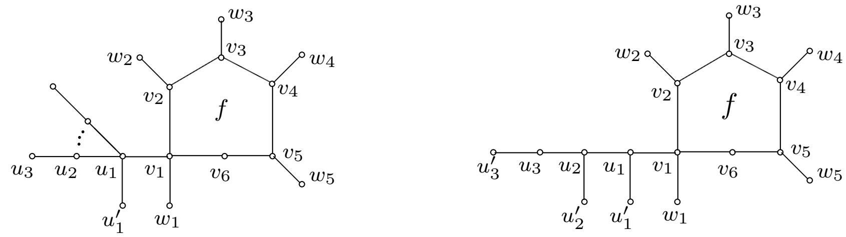
Удалим из G вершины грани f, а также вершины u_i, w_i, $i = 1, 2, 3$. Продолжим раскраску φ_1 полученного графа стандартным образом. Если $u_3 = w_3$, то $\varphi(u_3) := \neg\varphi(u_2)$. Остаётся окрасить вершины v_1 и v_5. Если $\varphi_1(u_1) = \varphi_1(w_1)$, то $\varphi(v_1) := \neg\varphi_1(u_1)$, иначе $\varphi(v_1) := \neg\varphi(v_2)$. Полагаем $\varphi(v_5) := \neg\varphi(v_1)$.

Пусть имеется цепь $u_1w_1w_2w_3$, $d(w_1) = d(w_2) = 3$, $d(w_3) = 2$ (рис. 4(б)). Удалим из графа G вершины грани f, а также вершины u_i, w_i, $i = 1, 2, 3$. Продолжим раскраску φ_1 полученного графа. После стандартной дораскраски остаётся окрасить вершины u_1 и v_5. Полагаем $\varphi(v_5) = \neg\varphi(v_4)$, $\varphi(u_1) = \varphi_{\min}$.

(G7) Пусть грань $f = v_1 \ldots v_6 \in F$ такая, что $d(v_1) = 4$, $d(v_i) = 3$, $2 \leqslant i \leqslant 5$, $d(v_6) = 2$, и имеется ребро $v_1u_1 \in E$. Тогда вершина u_1 не является слабой. Если $d(u_1) = 3$, то u_1 не смежна со слабыми 3-вершинами.

Пусть $u_1 \in V^w$, т. е. u_1 смежна с $d(u_1) - 2$ вершинами степени 2 (рис. 5(а)) или $d(u_1) = 3$ и u_1 смежна со слабой 3-вершиной (рис. 5(б)). Удалим вершину v_6. Для полученного графа G_1 существует раскраска φ_1. Предположим, что вершины u_1', w_i, $i = \overline{1,3}$, одного цвета, скажем 1, иначе получим раскраску всего графа G, обесцветив каждую из вершин грани f, а также вершину u_1 и смежные с ней 2-вершины (в случае на рис. 5(а)) или вершины u_i, $i = \overline{1,3}$ (в случае на рис. 5(б)), и после стандартной дораскраски положим $\varphi(v_6) := \neg\varphi(v_1)$. Если одна из вершин v_1, v_2 окрашена в 1, то её цвет не трогаем, остальную дораскраску проводим аналогичным образом. Пусть $\varphi_1(v_1) = \varphi_1(v_2) = 2$. Тогда

$\varphi(v_6) := \neg\varphi_1(v_5)$. Заметим, что цепи $v_6v_1u_1\ldots$ цвета 2 длины более 4 не образуется, иначе в графе G_1 имеется цепь $v_2v_1u_1\ldots$ длины более 4. Допустим, что возникла цепь $v_6v_1v_2v_3v_4w_4$ длины 5 цвета 2. Тогда перекрасим вершину v_6 в 1. Если $\varphi_1(w_5) = 2$, то полученная раскраска допустимая, иначе полагаем $\varphi_1(v_5) := 2$.



(а) (б)

Рис. 5

(G8) Пусть грань $f_1 = v_1\ldots v_6 \in F$ такая, что $d(v_1) = 4$, а v_2 — 4-вершина, смежная с 2-вершиной, или $d(v_2) = 3$, $d(v_i) = 3$, $i = 3, 4, 5$, $d(v_6) = 2$. Тогда грань $f_2 = v_1v'_2v'_3v'_4v_5v_6$ не может иметь следующей конфигурации: $d(v'_2) = 3$ или v'_2 — 4-вершина, смежная с 2-вершиной, $d(v'_3) = d(v'_4) = 3$.

Допустим противное. Для определённости считаем, что v_2 и v'_2 — 4-вершины, смежные с 2-вершинами (другие случаи рассматриваются аналогично). Обозначим вершины как на рис. 6.

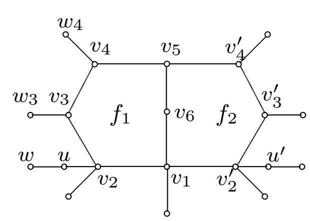


Рис. 6

Удалим 2-вершину v_6 из графа G. Для полученного графа G_1 существует раскраска φ_1. Предположим, что вершины, смежные с вершинами цепи $v'_2v_1v_2$, одного цвета, скажем 1, иначе получим раскраску всего графа G, обесцветив вершины граней f_1, f_2, а также u, u', и после стандартной дораскраски положим $\varphi(v_6) := \neg\varphi(v_1)$, $\varphi(v_5) := \varphi_{\min}$. Если $\varphi_1(v_1) = 1$, то производим докраску аналогичным образом, за исключением того, что цвет вершины v_1 остаётся равным 1. Пусть $\varphi_1(v_1) = 2$, тогда $\varphi_1(v_5) = 1$. Предположим, что вершины v_2, v'_2 окрашены в разные цвета, иначе получим раскраску всего графа G, окрасив вершину v_6 в 2. Без потери общности $\varphi_1(v'_2) = 1$, $\varphi_1(v_2) = 2$. Полагаем $\varphi(u) = \neg\varphi_1(w)$, $\varphi(v_j) = \neg\varphi_1(w_j)$, $j = 3, 4$, $\varphi(v_5) = \neg\varphi_1(v'_4)$, $\varphi(v_6) = 1$.

(G9) Пусть грань $f = v_1\ldots v_6 \in F$ такая, что $d(v_1) = 4$, v_2 — 4-вершина, смежная с 2-вершиной, $d(v_i) = 3$, $i = \overline{3, 5}$, $d(v_6) = 2$, $v_1x_1, v_1y_1 \in E$. Тогда

(a) если $f' = v_1x_1\dots x_4v_2 \in F$, $d(x_i) = 3$, $i = 1,2,3$, $d(x_4) = 2$, то v_2 не является слабой 4-вершиной;

(b) если $x_1 \in V^w$ или имеется цепь $x_1x_2x_3$, где $d(x_1) = d(x_2) = 3$, $d(x_3) = 2$, то $y_1 \notin V^w$ и в графе G нет цепи $y_1y_2y_3$ такой, что $d(y_1) = d(y_2) = 3$, $d(y_3) = 2$.

Пусть $f' = v_1x_1\dots x_4v_2 \in F$, $d(x_i) = 3$, $i = 1,2,3$, $d(x_4) = 2$, v_2 — слабая 4-вершина. Удалим вершины граней f, f', а также 2-вершину, смежную с v_2. После стандартной дораскраски полагаем $\varphi(v_2) = \varphi_{\min}$, $\varphi(x_4) = \neg\varphi(v_2)$, $\varphi(v_6) = \neg\varphi_1(v_1)$. Теперь предположим, что имеются цепи $p_1 = x_1x_2x_3$, $p_2 = y_1y_2y_3$ такие, что $d(x_i) = d(y_i) = 3$, $i = 1,2$, $d(x_3) = d(y_3) = 2$ (другие случаи рассматриваются аналогично). Удалим вершины грани f, цепей p_1, p_2, а также 2-вершину, смежную с v_2. После стандартной дораскраски полагаем $\varphi(v_1) = \varphi_{\min}$, $\varphi(v_6) = \neg\varphi_1(v_5)$. Если $x_3 = y_3$, то $\varphi(x_3) := \neg\varphi(x_2)$.

(G10) Пусть $v \in V$ — 4-вершина, смежная с 2-вершиной v_1, $vv_i \in E$, $i = 2,3,4$, $d(v_2) = d(v_3) = 3$, и в графе G имеются цепи vv_2x, vv_3y такие, что x, y — слабые 3-вершины. Тогда $v_4 \notin V^w$, кроме того, если $d(v_4) = 3$, то v_4 не смежна со слабой 3-вершиной.

Пусть $v_4 \in V^w$ ($d(v_4) = 3$, $v_4z \in E$, z — слабая 3-вершина). Удалим из графа G множество вершин $V' = \{v, v_2, v_3, v_4, x, y\}$ ($V' \cup \{z\}$), а также 2-вершины, с ними смежные. Продолжим раскраску φ_1 полученного графа стандартным образом. После красим вершину v в цвет, которым окрашена меньшая часть вершин v_2, v_3, v_4. Заметим, что между 2-вершинами, смежными с x, y, z (обозначим их через x', y', z' соответственно) возможны совпадения. Если $x' = y'$, то полагаем $\varphi(x') := \neg\varphi(x)$.

(G11) Пусть грань $f = v_1\dots v_6 \in F$ такая, что v_1 — 4-вершина, смежная с 2-вершиной, $v_2 \in V^w$, $d(v_3) = 2$, $d(v_i) = 3$, $i = 4,5,6$. Тогда вершина v_6 не смежна со слабой 3-вершиной.

Пусть имеется цепь $v_6w_1w_2$, где $d(w_1) = 3$, $d(w_2) = 2$. Удалим из графа G вершины грани f, вершины w_1, w_2 и 2-вершины, смежные с v_1, v_2. Продолжим раскраску φ_1 полученного графа. После стандартной дораскраски остаётся окрасить вершины v_3 и v_6. Полагаем $\varphi_1(v_3) := \neg\varphi(v_2)$, $\varphi(v_6) := \varphi_{\min}$.

(G12) Пусть $f = v_1\dots v_6 \in F$, v_1 — 5-вершина, смежная с 2-вершинами v_2 и u, $d(v_i) = 3$, $i = \overline{3,6}$, и имеется цепь $v_6w_1\dots w_k$, где $d(w_i) = 3$, $i < k$, $d(w_k) = 2$, $1 \leqslant k \leqslant 3$. Тогда v_1 не смежна со слабыми 3-вершинами помимо, возможно, v_6.

Предположим, вершина v_1 смежна со слабой 3-вершиной $w \neq v_6$. Тогда в силу свойства (G2) имеем $k \in \{2,3\}$. Пусть $k = 3$ (случай $k = 2$ рассматривается аналогично). Удалим из графа G вершины грани f, а также u, w, w_i и 2-вершину, смежную с w, $i = 1,2,3$. После стандартного продолжения раскраски полученного графа полагаем $\varphi(v_2) = \neg\varphi(v_1)$, $\varphi(v_6) = \varphi_{\min}$. Если $ww_3 \in E$, то $\varphi(w_3) := \neg\varphi(w)$.

(G13) Пусть $v \in V$ — 5-вершина такая, что $d_3(v) = 3$, u_1, u_2 — смежные с ней 2-вершины, $f_1 = vu_1x_1x_2x_3v_1$, $f_2 = vu_1x_1w_2w_1v_3 \in F$, $d(v_1) = d(x_i) = d(w_j) = 3$, $i = 1,2,3$, $j = 1,2$, $d(v_3) = 3$ или v_3 — 4-вершина, смежная с 2-вершиной. Тогда вершина v_1 не смежна с 2-вершиной и со слабой 3-вершиной.

Допустим, что v_3 — 4-вершина, смежная с 2-вершиной w, и имеется цепь $v_1r_1r_2$ такая, что $d(r_1) = 3$, $d(r_2) = 2$ (другие случаи рассматриваются аналогично). Удалим вершины граней f_1, f_2, а также вершины u_2, r_1, r_2, w. После стандартной дораскраски остаётся окрасить вершины v_1, u_1, x_1. Полагаем $\varphi(v_1) = \varphi_{\min}$, $\varphi(x_1) := \neg\varphi_1(w_2)$, $\varphi(u_1) := \neg\varphi_1(v)$.

(G14) Пусть $v \in V$ — 5-вершина такая, что $d_3(v) = 3$, u_1, u_2 — смежные с ней 2-вершины, $f_1 = vv_1r_1r_2r_3v_2$, $f_2 = vv_2s_1s_2s_3u_2$, $f_3 = vu_2s_3t_1t_2v_3 \in F$, $d(v_1) = d(r_i) = d(t_i) = 3$, $i = 1,2$, $d(r_3) = 2$, $d(v_2) = 4$, $d(s_j) = 3$, $j = 1,2,3$. Тогда $d(v_3) \geqslant 4$, кроме того, если $d(v_3) = 4$, то вершина v_3 не смежна с 2-вершиной.

Пусть $d(v_3) = 3$ или v_3 — 4-вершина, смежная с 2-вершиной t. Удалим вершины граней f_1, f_2, f_3, а также вершины u_1, t. После стандартного продолжения раскраски φ_1 полученного графа неокрашенными остаются вершины v, u_2, s_3, r_3. Вершину v красим в цвет, в который окрашена меньшая часть вершин v_1, v_2, v_3. Если $\varphi_1(s_2) = \varphi_1(t_1)$, то $\varphi(s_3) := \neg\varphi_1(s_2)$, иначе $\varphi(s_3) := \neg\varphi(v)$. Полагаем $\varphi(u_2) = \neg\varphi(s_3)$, $\varphi(r_3) = \neg\varphi_1(r_2)$.

(G15) Пусть 5-вершина v_1 смежна с 2-вершиной w_1 и слабой 3-вершиной w_2. Тогда она не инцидентна грани $f = v_1 \ldots v_6$ такой, что $d(v_4) = 2$, $d(v_i) = 3$, $i = 2,3,5,6$.

Допустим противное. Удалим из графа G вершины грани f, а также вершины w_1, w_2 и 2-вершину, смежную с w_2. После стандартного продолжения раскраски полученного графа красим 2-вершину v_4 в цвет, отличный от цвета вершины v_1.

(G16) Пусть $v \in V$ — 5-вершина такая, что $d_3(v) = 4$, u_1 — смежная с ней 2-вершина, $f_1 = vv_1w_1x_1x_2v_2$, $d(v_i) = d(x_i) = 3$, $i = 1,2$, $d(w_1) = 2$. Тогда среди вершин, смежных с v, нет слабой 3-вершины, отличной от v_1.

Допустим противное. Случай, когда $v_2 \in V^w$, невозможен ввиду следствия 3 для вершины x_2. Обозначим вершины как на рис. 7.

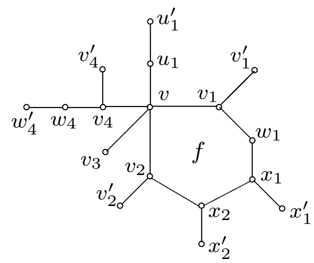


Рис. 7

Удалим из графа G вершину w_1. Полученный граф G_1 имеет некоторую раскраску φ_1. Обозначим множество вершин грани f в объединении с u_1, v_4, w_4 через V'. Будем считать, что вершины $x'_1, x'_2, v'_2, v_3, v'_4, w'_4$ окрашены в один цвет, скажем в 2, иначе обесцветим множество вершин V' и после стандартной дораскраски положим $\varphi(w_1) := \neg\varphi(v)$. Если среди вершин x_2, v_2, v_4, w_4 есть вершина цвета 2, то цвета этих вершин оставляем неизменными и полагаем $\varphi(v) := 1$, $\varphi(v_1) := \neg\varphi_1(v'_1)$, $\varphi(w_1) := 2$, $\varphi(x_1) := 1$, $\varphi(u_1) := \neg\varphi_1(u'_1)$. Пусть $\varphi_1(x_2) = \varphi_1(v_2) = \varphi_1(v_4) = \varphi_1(w_4) = 1$. Если $\varphi_1(x_1) = 2$, то каждую из вершин множества $V' - \{x_1\}$ обесцвечиваем и после стандартной дораскраски полагаем $\varphi(w_1) := 1$. Пусть $\varphi_1(x_1) = 1$. Тогда $\varphi_1(v) = 2$, иначе в графе G_1 имеется одноцветная цепь $x_1x_2v_2vv_4w_4$ длины 5. Полагаем $\varphi(w_1) := \neg\varphi_1(v_1)$.

2. Применение формулы Эйлера

Положим $V = V(G)$, $F = F(G)$ и запишем формулу Эйлера для графа G в виде

$$\sum_{v \in V}(2d(v) - 6) + \sum_{f \in F}(r(f) - 6) = -12. \tag{1}$$

Определим начальный заряд вершины $v \in V$ равным $\mu_0(v) = 2d(v) - 6$, а начальный заряд грани $f \in F$ — равным $\mu_0(f) = r(f) - 6$. Из условия $g(G) \geqslant 6$ и свойства (G1) следует, что $\mu_0(x) \geqslant 0$ для любого элемента $x \in V \cup F$, отличного от 2-вершины. Перераспределим заряды между элементами графа G таким образом, чтобы их сумма осталась прежней, а новый заряд $\mu(x)$ каждого элемента $x \in V \cup F$ стал неотрицательным. В этом случае получим противоречие с (1).

Определим следующие правила перераспределения зарядов.

П1. Пусть $f = v_1 \ldots v_k \ldots \in F$, $d(v_1) \geqslant 4$, $d(v_2) = \ldots = d(v_{k-1}) = 3$, $d(v_k) = 2$, $k \geqslant 2$. Вершина v_1 передаёт заряд $\frac{1}{2}$ вершине v_k вдоль участка границы $v_1 \ldots v_k$ грани f при следующих условиях:

(a) $r(f) \geqslant 7$, $k = 2$ или $r(f) = 7$, $k = 3$, $d(v_7) = 2$;

(b) $r(f) = 6$ за исключением случая, когда $k = 5$, v_1 — 4-вершина, смежная с 2-вершиной, $d(v_6) \geqslant 4$, $v_6 \notin V^w$. В этом случае действует следующее правило.

П2. Пусть $v_1 \dots v_6 \in F$, v_1 — 4-вершина, смежная с 2-вершиной, $d(v_2) = d(v_3) = d(v_4) = 3$, $d(v_5) = 2$, $d(v_6) \geqslant 4$, $v_6 \notin V^w$. Тогда вершина v_6 передаёт вершине v_5 заряд $\frac{1}{2}$ вдоль участка границы $v_6 v_1 \dots v_5$ грани f.

П3. Пусть $f = v_1 v_2 \dots \in F$, $r(f) \geqslant 7$, $d(v_1) = 3$, $d(v_2) = 2$. Тогда вершина v_2 получает от грани f заряд $\frac{1}{2}$ вдоль ребра $v_1 v_2$, за исключением случая, когда $r(f) = 7$, $d(v_6) = 2$ и $d(v_7) \geqslant 4$.

Обозначим через $\mu(x)$ заряд элемента $x \in V \cup F$ после применения правил П1–П3. Докажем, что $\mu(x) \geqslant 0$ для любого элемента x графа G, что противоречит (1).

2.1. Заряд граней после перераспределения. Рассмотрим грань $f \in F$. Если $r(f) = 6$, то $\mu(f) = \mu_0(f) = r(f) - 6 = 0$. Пусть $f = v_1 \dots v_7$, тем самым $\mu_0(f) = 1$. Предположим, что грань f отдаёт заряд не менее трёх раз, иначе $\mu(f) \geqslant 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 0$. Тогда грань f инцидентна двум 2-вершинам, одна из которых, скажем v_2, смежна с двумя 3-вершинами. В силу следствий 1 и 2 без потери общности имеем $d(v_6) = 2$, $d(v_7) \geqslant 4$, но тогда грань f не передаёт заряда вдоль ребра $v_7 v_6$, а также вдоль ребра $v_1 v_2$ по исключению из правила П3, что противоречит выбору грани f. Пусть $r(f) = r \geqslant 8$. Заметим, что количество передач от грани f равно количеству её 3-вершин, смежных с 2-вершиной, также инцидентной f. В силу следствий 1 и 2 такие 3-вершины на границе грани f не идут подряд, и каждая из них передаёт заряд только одной 2-вершине. Таким образом,

$$\mu(f) \geqslant \mu_0(f) - \frac{r}{2} \cdot \frac{1}{2} = r - 6 - \frac{r}{4} = \frac{3}{4}(r - 8) \geqslant 0.$$

2.2. Заряд $\mu(v)$ вершин степени 2, 3 и не менее 6. Рассмотрим вершину $v \in V$. Пусть $d(v) = 2$. Покажем, что v получает вдоль границы каждой инцидентной грани $2 \times \frac{1}{2}$. Тогда

$$\mu(v) \geqslant \mu_0(v) + 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = -2 + 2 = 0.$$

Рассмотрим грань $f = v v_1 \dots v_k$. По следствию 1 имеем $d(v_1), d(v_k) \geqslant 3$. Допустим, что $r(f) \geqslant 7$. Если $d(v_i) \geqslant 4$, $i = 1, k$, то вершина v получает $\frac{1}{2}$ от вершины v_i по правилу П1, иначе от грани f по правилу П3 или от вершины степени не менее 4, смежной с v_i, по правилу П1(а). Пусть $r(f) = 6$. Из следствий 4 и 5 получаем, что вершина v получает $2 \times \frac{1}{2}$

вдоль границы грани f от одной или двух вершин степени не менее 4 по правилу П1(b) или П2.

Таким образом, мы доказали, что после перераспределения заряд любой 2-вершины неотрицателен. Так как вершины степени 3 в перераспределении зарядов не участвуют, их конечный заряд равен начальному, т. е. нулю. Вершина v степени не менее 4 может отдавать заряд по правилам П1 и П2, причём вдоль каждого инцидентного ребра не более $2\times\frac{1}{2}$. Следовательно, если $d(v) = d \geqslant 6$, то $\mu(v) \geqslant \mu_0(v) - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot d = 2d-6-d = d-6 \geqslant 0$.

2.3. Заряд $\mu(v)$ вершины степени 4. Пусть $d(v) = 4$, тем самым $\mu_0(v) = 2$. Предположим, что после перераспределения заряд $\mu(v)$ отрицательный. Обозначим грани при v через $f_i = vv_i \ldots v_{i+1} \in F$, $i = \overline{1,3}$, $f_4 = vv_1 \ldots v_4 \in F$. Если вершина v делает передачу вдоль границы каждой инцидентной грани не более одного раза, то $\mu(v) \geqslant 2 - 4\cdot\frac{1}{2} = 0$. Пусть без потери общности v делает вдоль границы грани $f_1 = vv_1 \ldots v_2$ две передачи. Рассмотрим возможные конфигурации грани f_1.

Случай 1. Пусть $d(v_1) = d(v_2) = 2$. Тогда $v \in V^w$ и не отдаёт заряд по правилу П2. По следствию 1 каждая из вершин v_3, v_4 имеет степень не менее 3. Хотя бы одна из них 3-вершина, иначе $\mu(v) \geqslant 2 - 4\cdot\frac{1}{2} = 0$. Без потери общности $d(v_3) = 3$, вершина v передаёт заряд вдоль ребра vv_3. В силу следствия 2 вершина v_3 не смежна с 2-вершинами, тем самым v не передаёт заряда вдоль ребра vv_3 по правилу П1(a). В силу следствия 3 вершина v_3 не смежна со слабыми 3-вершинами. Если вершина v передаёт заряд вдоль границы грани f_2, то эта грань инцидентна четырём 3-вершинам, 2-вершине и слабой 4-вершине, что противоречит свойству (G3). Пусть передача происходит вдоль границы грани f_3. Ввиду свойства (G3) и исключения из П1(b) имеем $f_3 = vv_3s_1s_2s_3v_4$, где $d(s_1) = d(s_2) = 3$, $d(s_3) = 2$, $d(v_4) \geqslant 4$, $v_4 \in V^w$. Получаем, что смежны слабые вершины v и v_4; противоречие следствию 2.

Случай 2. Пусть $d(v_1) = d(v_2) = 3$. Тогда $r(f_1) = 6$. С учётом симметрии возможны три конфигурации грани $f_1 = vv_1u_1u_2u_3v_2$, когда вдоль её границы заряд передаётся дважды.

Случай 2.1. Пусть $d(u_1) = d(u_3) = 2$. Так как v_1, v_2 — слабые 3-вершины, $d(v_3) \geqslant 3$, $d(v_4) \geqslant 3$ в силу свойства (G2). Поскольку v не смежна с 2-вершинами, она не передаёт заряда по правилам П1(a) и П2. Кроме того, из свойства (G2) следует, что вдоль рёбер vv_1, vv_2 вершина v делает по одной передаче. Значит, $d(v_3) = d(v_4) = 3$, и по ребру $e \in \{vv_3, vv_4\}$ вершина v делает две передачи, иначе $\mu(v) \geqslant 2 - 4\cdot\frac{1}{2} = 0$.

Без потери общности $e = vv_3$. В силу свойства (G2) вершины v_3, v_4 не смежны с 2-вершинами. Таким образом, оба раза заряд вдоль ребра e передаётся на расстояние 3, но тогда 3-вершина v_3 смежна с двумя слабыми 3-вершинами, что противоречит следствию 3.

Стало быть, в силу свойства (G2) одна из вершин u_1, u_2, u_3 имеет степень 2, другие две — степень 3. В силу свойства (G3) для грани f_1 имеем $d(v_3), d(v_4) \geqslant 3$. Следовательно, вершина v не отдаёт заряда по правилам П1(а) и П2. Хотя бы одна из вершин v_3, v_4 имеет степень 3, иначе вершина v делает передачи только по рёбрам vv_1 и vv_2, а $\mu(v) \geqslant 2 - 4 \cdot \frac{1}{2} = 0$.

Случай 2.2. Пусть $d(u_1) = d(u_3) = 3$, $d(u_2) = 2$. Без потери общности $d(v_3) = 3$. Докажем, что вершина v не отдаёт заряда вдоль границы грани f_2. В таком случае если $d(v_4) = 3$, то в силу симметрии вдоль границы грани f_4 вершина v также не отдаёт заряда, иначе вдоль границы каждой из граней f_3, f_4 происходит не более одной передачи от v. В обоих случаях получаем $\mu(v) \geqslant 2 - 4 \cdot \frac{1}{2} = 0$. Допустим, что вершина v отдаёт заряд вдоль границы грани f_2. Тогда f_2 — 6-грань, инцидентная 2-вершине. Пусть $f_2 = vv_2r_1r_2r_3v_3$. Заметим, что $d(r_1) \geqslant 3$, иначе имеем смежные слабые вершины v_2, u_3. Пусть $d(r_2) = 2$. По следствию 3 имеем $r_1 \notin V^w$, тем самым $d(r_1) \geqslant 4$. Значит, $d(r_3) = 3$, но тогда грань f_1 и цепь $vv_3r_3r_2$ противоречат свойству (G4). Следовательно, $d(r_3) = 2$, что опять же противоречит свойству (G4).

Случай 2.3. Пусть $d(u_1) = d(u_2) = 3$, $d(u_3) = 2$. Докажем, что вдоль границ каждой из граней f_2, f_3, f_4 вершина v передаёт заряд не более одного раза. Для грани f_2 это верно, так как в силу свойства (G2) и его следствий вдоль ребра vv_2 заряд передаётся один раз вдоль границы грани f_1. Допустим противное для грани f_4. Тогда $d(v_4) = 3$. По свойству (G5) для грани f_1 вершина v_4 не смежна с 2-вершинами. Вершина v_1 не смежна с 2-вершиной в силу следствия 3 для цепи $v_1u_1u_2$. Следовательно, $f_4 = vv_4t_1t_2t_3v_1$, где $d(t_1) = d(t_3) = 3$, $d(t_2) = 2$, что противоречит свойству (G4). Пусть вдоль границы грани $f_3 = vv_3s_1s_2s_3v_4$ вершина v передаёт заряд дважды. Тогда $d(v_3) = d(v_4) = 3$. Из свойства (G5) для грани f_1 получаем, что $d(s_1) = d(s_3) = 3$, $d(s_2) = 2$, что опять же противоречит свойству (G4).

Если вершина v не передаёт заряда вдоль границы грани f_2, то $\mu(v) \geqslant 2-4\cdot\frac{1}{2} = 0$. Иначе $f_2 = vv_2r_1r_2r_3v_3$, $d(r_1) \geqslant 4$, $d(r_2) = 2$, $d(r_3) = d(v_3) = 3$. Если вершина v не передаёт заряда вдоль границы грани f_3, то $\mu(v) \geqslant 2-4\cdot\frac{1}{2} = 0$. Иначе с учётом следствия 3 для 3-вершины v_3, $f_3 = vv_3s_1s_2s_3v_4$, где $d(s_1) \geqslant 4$, $d(s_2) = 2$, $d(s_3) = d(v_4) = 3$ или $d(s_1) = d(s_2) = 3$, $d(s_3) = 2$,

$d(v_4) \geqslant 4$. В любом случае получаем противоречие со свойством (G6) для грани f_1 и цепи $vv_3r_3r_2$ и либо цепи $vv_4s_3s_2$, либо цепи $v_3s_1s_2s_3$.

Случай 3. Пусть $d(v_1) \geqslant 3$, $d(v_2) = 2$. Заметим, что $r(f_1) = 7$, только если v_1 — слабая 3-вершина. Иначе $f_1 = vv_1u_1u_2u_3v_2$, и $d(u_3) \geqslant 3$ по следствию 1, значит, по границе грани f_1 вдоль ребра vv_1 вершина v может передавать заряд одной из вершин u_1, u_2, v_2.

Случай 3.1. Пусть вдоль ребра vv_1 вершина v передаёт заряд вершине v_2 по правилу П1 или П2. Тогда $f_1 = vv_1u_1u_2u_3v_2$, $d(u_i) = 3$, $i = 1, 2, 3$, и либо $d(v_1) = 3$, либо v_1 — 4-вершина, инцидентная 2-вершине. Следовательно, $d(v_3) \geqslant 3$, $d(v_4) \geqslant 3$, в первом случае — в силу свойства (G3) для грани f_1, во втором — в силу формулировки правила П2. В силу свойства (G8) вершина v не передаёт заряда вдоль ребра vv_3 вершине v_2. Докажем, что вдоль границы каждой из граней f_3, f_4 вершина v отдаёт заряд не более одного раза. Допустим противное для грани f_4 (случай грани f_3 рассматривается аналогично). Тогда грань f_4 инцидентна четырём 3-вершинам и 2-вершине, не смежной с v, что противоречит свойству (G3), либо $f_4 = vv_4t_1t_2t_3v_1$, где $d(v_1) = d(v_4) = 3$, $d(t_1) = d(t_3) = 2$, что противоречит свойству (G2) для вершины v.

Случай 3.1.1. Пусть $d(v_1) = 3$. Из свойства (G7) для грани f_1 и вершин v_3, v_4 следует, что $v_3, v_4 \notin V^w$, кроме того, если $d(v_i) = 3$, то v_i не смежна со слабой 3-вершиной, $i \in \{3, 4\}$. Следовательно, вершина v вдоль границы грани f_2 передаёт заряд один раз и с учётом исключения из П1(b) не передаёт заряда вдоль границы грани f_3, тем самым $\mu(v) \geqslant 2 - 4 \cdot \frac{1}{2} = 0$.

Случай 3.1.2. Пусть v_1 — 4-вершина, смежная с 2-вершиной. Заметим, что вдоль ребра vv_1 заряд передаётся только вершине v_2. Докажем, что вершина v не передаёт заряда вдоль границы грани $f_4 = vv_4t_1t_2t_3 \ldots v_1$. Допустим противное. Тогда $d(v_4) = 3$. Если v передаёт заряд 2-вершине, смежной с v_1, то $r(f_4) = 6$, $d(t_1) = d(t_2) = 3$, $d(t_3) = 2$, v_1 — слабая 4-вершина в силу исключения из П1(b), тем самым конфигурация граней f_1, f_4 противоречит свойству (G9a). Таким образом, либо $d(t_1) = 2$, либо $d(t_1) = 3$, $d(t_2) = 2$. В любом случае в силу следствий 1 и 2 и свойства (G9b) вершина v не передаёт заряда вдоль ребра vv_3. Допустим, что v передаёт заряд вдоль ребра vv_4 дважды, иначе $\mu(v) \geqslant 2 - 4 \cdot \frac{1}{2} = 0$. Тогда из следствий 1–3 и свойства (G3) получаем $d(t_1) = 3$, $d(t_2) = 2$, $f_3 = vv_3s_1s_2s_3v_4$, где $d(s_1) = 2$, $d(s_2) = d(s_3) = 3$, $d(v_3) \geqslant 4$, $v_3 \in V^w$ в силу исключения из П1(b). Конфигурация грани f_1, вершины v_3 и цепи $v_4t_1t_2$ противоречит свойству (G9b).

Допустим, что вершина v передаёт заряд вдоль границ граней f_2, f_3, причём вдоль границы грани $f_2 = vv_2u_3r_1 \dots r_2v_3$ дважды, иначе $\mu(v) \geqslant 2 - 4 \cdot \frac{1}{2} = 0$, так как вдоль границы грани f_3 вершина v передаёт заряд не более одного раза. Заметим, что $d(r_1) \geqslant 3$ в силу следствия 1 для вершины u_3. Значит, $d(v_3) = 3$, $d(r_2) = 2$. Тогда по ребру vv_3 вершина v передаёт заряд только вершине r_2 в силу следствий 1–3 для вершин грани f_3. Следовательно, $f_3 = vv_3s_1s_2s_3 \dots v_4$, $d(v_4) = 3$, s_1 — 2-вершина или слабая 3-вершина, что противоречит свойству (G9b).

Случай 3.2. Вершина v передаёт заряд вершине u_1. Тогда $d(v_1) = 3$. Заметим, что ранг грани f_1 может быть 6 или 7. В силу свойства (G2) вершины v_3, v_4 имеют степень не менее 3 и не слабые 3-вершины. Следовательно, v может отдавать заряд по правилу П1(a) только вершине u_1. Учитывая уже разобранный случай 3.1, можем считать, что вершина v не отдаёт заряда вдоль ребра vv_3 вершине v_2. Докажем, что вдоль каждого ребра vv_3, vv_4 вершина v передаёт заряд на расстояние 3. Для этого достаточно показать, что вершина v не передаёт заряда на расстояние 4. Предположим противное для ребра vv_4 (для ребра vv_3 доказывается аналогично). Так как по следствию 1 вершина v_1 не смежна со второй 2-вершиной, $f_3 = vv_3s_1s_2s_3v_4$, $d(v_4) = d(s_2) = s(s_3) = 3$, $d(s_1) = 2$, $d(v_3) \geqslant 4$, $v_3 \in V^w$ ввиду исключения из П1(b). Но тогда вершина v смежна с тремя вершинами v_1, v_2, v_3, параметр d_3 которых равен 2, что противоречит свойству (G2). Таким образом, учитывая свойство (G2), вершина v отдаёт заряд вдоль каждого из рёбер vv_i, $i = 1, 3, 4$, не более одного раза. Значит, вершина v отдаёт заряд вдоль обоих рёбер vv_3, vv_4, иначе $\mu(v) \geqslant 2 - 4 \cdot \frac{1}{2} = 0$. Тогда в графе G имеются цепи vv_3x, vv_4y такие, что $d(v_3) = d(v_4) = 3$, x, y — слабые 3-вершины, что противоречит свойству (G10), так как v_1 — слабая 3-вершина. Отметим, что, исключив этот случай, мы доказали, что вершина v не отдаёт заряда по правилу П1(a) на расстояние 2.

Случай 3.3. Вершина v передаёт заряд вершине u_2. Тогда $d(v_1) = d(u_1) = 3$, $d(u_2) = 2$. В силу свойства (G2) имеем $d(u_3) \geqslant 4$, тем самым вершина v не отдаёт заряда вдоль ребра vv_3 вершине v_2, $d(v_3) \geqslant 3$, $d(v_4) \geqslant 3$ в силу следствия 3 для вершины v_1. Докажем, что вершина v отдаёт заряд вдоль каждого из рёбер vv_1, vv_3, vv_4 не более одного раза. Допустим противное для ребра vv_1. Тогда в силу свойства (G2) и исключения из П1(b) имеем $f_4 = vv_4t_1t_2t_3v_1$, $v_4 \in V^w$, $d(t_1) = 2$, $d(t_2) = d(t_3) = 3$. Конфигурация граней f_1 и f_4 противоречит свойству (G11). Теперь пусть вершина v отдаёт заряд дважды вдоль ребра vv_4 (случай для ребра vv_3 рассматривается аналогично). Тогда $d(v_4) = 3$ и из свойства (G2) и следствий 1–3 для вершин v_1, v_4 получаем, что $f_4 = vv_4t_1t_2t_3v_1$, $d(t_1) = 3$, $d(t_2) = 2$, $d(t_3) \geqslant 4$, $f_3 = vv_3s_1s_2s_3v_4$, $d(s_1) = 2$, $d(s_2) = d(s_3) = 3$. Ввиду исключения из П1(b) имеем $v_3 \in V^w$, что противоречит свойству (G10). Таким образом, v передаёт заряд по обоим рёбрам vv_3, vv_4, иначе $\mu(v) \geqslant 2-4\cdot\frac{1}{2} = 0$. Следовательно, $d(v_3) = d(v_4) = 3$ и в силу свойства (G2) одна из вершин v_3, v_4 смежна со слабой 3-вершиной, а другая — с 2-вершиной или слабой 3-вершиной, что противоречит свойству (G10).

2.4. Заряд $\mu(v)$ вершины степени 5. Пусть $d(v) = 5$. Тогда $\mu_0(v)$ равно 4. Обозначим через $f_1, \ldots, f_5$ грани, инцидентные v, в порядке их следования в её окружении, смежные с v вершины степени 2 обозначим через u_i, вершины степени не менее 3 — через v_j. Предположим, что вершина v передаёт заряд вдоль границы каждой грани f_i, $i = \overline{1,5}$, причём вдоль границ по крайней мере четырёх граней заряд от вершины v передаётся дважды, иначе $\mu(v) \geqslant 4-4\cdot 2\cdot\frac{1}{2} = 0$. Тем самым вдоль каждого инцидентного ребра вершина v отдаёт заряд и по крайней мере вдоль четырёх из них дважды. Каждая грань f_i, $i = \overline{1,5}$, инцидентна 2-вершине. В силу свойства (G2) имеем $2 \leqslant d_3(v) \leqslant 5$.

Случай 1. Пусть $d_3(v) = 5$. Тогда вершина v не смежна с 2-вершинами и передаёт заряд только по правилу П1(b). Следовательно, $r(f_i) = 6$, $d(v_i) = 3$, $i = \overline{1,5}$. По каждому ребру, ведущему в слабую 3-вершину, вершина v отдаёт заряд один раз, поэтому она смежна не более чем с одной слабой 3-вершиной. Так как $d(v_i) = 3$, $i = \overline{1,5}$, вершина v может передавать заряд на расстояние 4 не более одного раза. Следовательно, имеется не менее трёх рёбер, по которым v передаёт заряд дважды на расстояние 3. Значит, среди вершин $v_1, \ldots, v_5$ имеются 3-вершины, каждая из которых смежна с двумя слабыми 3-вершинами, что противоречит следствию 3.

Случай 2. Пусть $d_3(v) = 2$, т. е. вершина v смежна с тремя 2-вершинами и является слабой. Следовательно, вершина v не передаёт заряда по правилу П2. Покажем, что вдоль каждого из рёбер vv_1, vv_2 вершина v отдаёт заряд не более раза, что противоречит нашему предположению. Без потери общности предположим противное для ребра vv_1. Тогда $d(v_1) = 3$. В силу свойства (G2) вершина v_1 не смежна с 2-вершиной или слабой 3-вершиной. Следовательно, вершина v_1 инцидентна двум 6-граням. Без ограничения общности $f_1 = vv_1 \ldots u_1$ и вдоль границы f_1 вершина v два раза отдаёт заряд 2-вершине u_1, но тогда грань f_1 инцидентна 2-вершине, четырём 3-вершинам и слабой 5-вершине, что противоречит свойству (G3).

Случай 3. Пусть $d_3(v) = 3$. Без потери общности $f_1 = vv_1 \dots v_2$. Из свойства (G2) следует, что хотя бы одна из вершин v_1, v_2 не является слабой. Вдоль границы грани f_1 вершина v отдаёт заряд один раз, иначе из свойства (G2) следует, что 6-грань f_1 инцидентна 2-вершине, не смежной с v, и четырём 3-вершинам, что противоречит свойству (G3). Следовательно, вдоль границ других граней в окружении v заряд от неё передаётся дважды. Таким образом, 2-вершины u_1, u_2 не инцидентны одной грани, иначе в окружении вершины v имеется ещё одна грань, вдоль границы которой она отдаёт заряд один раз по тем же причинам, что описаны для грани f_1. Без потери общности считаем, что от вершины v вдоль ребра vv_1 заряд передаётся дважды. Тогда $d(v_1) = 3$. Рассмотрим возможные конфигурации грани f_1.

Случай 3.1. Пусть $f_1 = vv_1r_1r_2r_3v_2$, $d(r_1) = 2$ или $d(r_1) = 3$, $d(r_2)$=2. Тогда грань $f_5 = vu_1x_1x_2x_3v_1$ такова, что $d(x_i) = 3$, $i = 1, 2, 3$. Из свойства (G12) для грани f_5 следует, что v_3 не является слабой 3-вершиной. Следовательно, $f_4 = vv_3w_1w_2x_1u_1$, где $d(w_1) = d(w_2) = 3$, $d(v_3) = 3$ или v_3 — 4-вершина, смежная с 2-вершиной. Так как v_1 смежна с 2-вершиной или слабой 3-вершиной, конфигурация граней f_4, f_5 противоречит свойству (G13).

Случай 3.2. Пусть $f_1 = vv_1r_1r_2r_3v_2$, $d(r_1) = d(r_2) = 3$, $d(r_3) = 2$. Тогда v_2 — 4-вершина, смежная с 2-вершиной, $f_2 = vv_2s_1s_2s_3u_2$, $d(s_j) = 3$, $j = 1, 2, 3$, иначе вдоль ребра vv_2 вершина v не отдавала бы заряда. Рассмотрим грань f_3. Вдоль её границы вершина v передаёт заряд дважды. Если $f_3 = vu_2s_3t_1t_2v_3$, $d(t_1) = d(t_2) = 3$, v_3 — 4-вершина, смежная с 2-вершиной, или 3-вершина, то конфигурация граней f_1, f_2, f_3 противоречит свойству (G14). Следовательно, v_3 — 3-вершина, смежная с 2-вершиной, которая инцидентна грани f_3. Тогда грань $f_4 = vv_3w_1w_2w_3u_1$ такая, что $d(w_i) = 3$, $i = 1, 2, 3$. Покажем, что вдоль границы грани f_5 вершина v передаёт заряд один раз, что противоречит нашему предположению. Пусть $f_5 = vu_1w_3 \dots x_1v_1$. Так как 5-вершина v смежна с тремя вершинами u_1, u_2, v_3, у которых параметр d_3 равен 2, в силу свойства (G2) имеем $d(x_1) \geqslant 3$. Следовательно, $f_5 = vu_1w_3x_2x_1v_1$, $d(x_2) \geqslant 3$ в силу свойства (G2) для 3-вершины w_3. Остаётся заметить, что одна из вершин x_1, x_2 имеет степень не менее 4, так как если $d(x_1) = d(x_2) = 3$, то грань f_5, цепь $v_1r_1r_2r_3$ и вершина v_3 противоречат свойству (G12).

Случай 4. Пусть $d_3(v) = 4$, $f_i = vv_i \dots v_{i+1}$, $i = 1, 2, 3$. Тогда вершины v_2, v_3 и хотя бы одна из вершин v_1, v_4, скажем v_1, имеют степень 3, а ранги граней f_1, f_2, f_3 равны 6 (иначе при вершине v имеется ребро или грань, вдоль которой она не передаёт заряда). Можно считать, что среди вершин v_1, v_2, v_3 имеется слабая 3-вершина v_j, $j \in \{1, 2, 3\}$, так как в силу свойства (G2) вершина v не может передавать заряда дважды на расстояние 3 вдоль одного и того же ребра. Допустим, что v_j — единственная слабая 3-вершина, смежная с v. Предположим, что $j = 2$ (случай $j = 3$ рассматривается аналогично). Из свойства (G2) следует, что вдоль ребра vv_2 вершина v передаёт заряд один раз. Следовательно, вдоль остальных рёбер вершина v передаёт заряд дважды, тем самым $d(v_4) = 3$, кроме того, $f_3 = vv_3t_1t_2t_3v_4$, где $d(t_1) = d(t_3) = 3$, $d(t_2) = 2$, что противоречит свойству (G15). Пусть $j = 1$. Тогда вдоль границы грани f_2 вершина v передаёт заряд один раз, иначе её конфигурация противоречит свойству (G15). Следовательно, $d(v_4) = 3$, но тогда в силу свойства (G15) вдоль грани f_3 также заряд передаётся один раз; противоречие.

Таким образом, помимо v_j, $j \in \{1, 2, 3\}$, в окружении v имеется ещё одна слабая 3-вершина v_k. Обозначим 2-вершины, смежные с v_j, v_k, через w_j, w_k соответственно. Заметим, что в силу свойства (G2) помимо v_j, v_k вершина v не смежна со слабыми 3-вершинами. Хотя бы по одному из рёбер vv_j, vv_k, для определённости vv_j, вершина v передаёт заряд дважды. Следовательно, ввиду свойства (G2) без потери общности можно считать, что $j = 1$ и вершина w_1 инцидентна грани f_1. Рассмотрим грани f_2, f_3. Вдоль границы хотя бы одной из них вершина v передаёт заряд дважды. Из свойств (G2) и (G15) следует, что 2-вершина u этой грани находится на расстоянии 2 от v, т. е. $u = w_k$, а вдоль границы другой грани вершина v отдаёт заряд один раз. Значит, вдоль границы грани f_1 вершина v отдаёт заряд дважды, тем самым $f_1 = vv_1w_1x_1x_2v_2$, $d(x_1) = d(x_2) = d(v_2) = 3$. Остаётся заметить, что конфигурация грани f_1 противоречит свойству (G16), так как v смежна с 2-вершиной и слабой 3-вершиной v_k, $k \in \{2, 3, 4\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бородин О. В., Иванова А. О.** Почти правильные 2-раскраски вершин разреженных графов // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2009. — Т. 16, №2. — С. 16–20.
   Borodin O. V., Ivanova A. O. Near-proper vertex 2-colorings of sparse graphs // J. Appl. Industr. Math. — 2010. — Vol. 4, N 1. — P. 21—23.
2. **Бородин О. В., Иванова А. О.** Разбиение разреженных плоских графов на два подграфа малой степени // Сиб. электрон. мат. изв. — 2009. — Т. 6. — С. 13–16.
3. **Глебов А. Н., Замбалаева Д. Ж.** Путевые разбиения планарных графов // Сиб. электрон. мат. изв. — 2007. — Т. 4. — С. 450–459.

4. **Замбалаева Д. Ж.** Разбиение плоского графа с обхватом 7 на два звёздных леса // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2009. — Т. 16, № 3. — С. 20–46.
5. **Borodin O., Ivanova A.** List strong linear 2-arboricity of sparse graphs // J. Graph Theory. — 2011. — Vol. 67, N 2. — P. 83–90.
6. **Borowiecki M., Broere I., Frick M., Mihok P., Semanisin G.** A survey of hereditary properties of graphs // Discus. Math., Graph Theory. — 1997. — Vol. 17, N 1. — P. 5–50.
7. **Broere I., Dorfling M., Dunbar J. E., Frick M.** A path(ological) partition problem // Discus. Math., Graph Theory. — 1998. — Vol. 18, N 1. — P. 113–125.
8. **Broere I., Hajnal P., Mihok P., Semanisin G.** Partition problems and kernels of graphs // Discus. Math., Graph Theory. — 1997. — Vol. 17, N 2. — P. 311–313.
9. **Mihok J.** Additive hereditary properties and uniquely partitionable graphs //Graphs, hypergraphs and matroids. — Zielona Gora: Higher College of Engineering, 1985. — P. 49–58.

Глебов Алексей Николаевич,
e-mail: angle@math.nsc.ru

Замбалаева Долгор Жамьяновна,
e-mail: dolgor@ngs.ru

Статья поступила
25 декабря 2012 г.

Переработанный вариант —
21 ноября 2013 г.