ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Март—апрель 2014. Том 21, № 2. С. 84–101

УДК 519.865.3

АЛГОРИТМЫ ПОЛИЭДРАЛЬНОЙ КОМПЛЕМЕНТАРНОСТИ ДЛЯ ОТЫСКАНИЯ РАВНОВЕСИЯ В ЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЯХ КОНКУРЕНТНОЙ ЭКОНОМИКИ *)

В. И. Шмырёв

Аннотация. Статья представляет собой обзор работ автора в области конечных алгоритмов для отыскания равновесных состояний в линейных моделях обмена. Представлен оригинальный подход, базирующийся на полиэдральной комплементарности. Он может рассматриваться как реализация основной идеи симплекс-метода линейного программирования. Подход не имеет аналогов и позволяет разработать конечные алгоритмы не только для классической модели обмена, но и для различных её вариаций. Помимо этого он позволил выявить особое свойство монотонности, присущее этим моделям. Подобное имеет место в задачах линейной комплементарности с положительными главными минорами матрицы ограничений (класс $[P]$).

Ключевые слова: модель обмена, экономическое равновесие, вектор цен, полиэдральная комплементарность, неподвижная точка, монотонность отображения, конечный алгоритм.

1. Задача полиэдральной комплементарности

Рассматриваются многогранники в $\mathbb{R}^n$, т. е. множества, описываемые системами линейных уравнений и неравенств. Говорим, что многогранники некоторой совокупности ω образуют *полиэдральный комплекс*, если любая грань многогранника из ω также принадлежит ω. Многогранники комплекса именуются *клетками*. Отношение между клетками «Ω_1 — грань Ω_2» является отношением частичного порядка:

$$\Omega_1 \text{ — грань } \Omega_2 \Longleftrightarrow \Omega_1 \prec \Omega_2.$$

Пусть даны полиэдральные комплексы ω и ξ с одинаковым числом клеток r. Пусть $R \subset \omega \times \xi$ — взаимно однозначное соответствие между клетками комплексов: $R = \big\{(\Omega_i, \Xi_i)\big\}_{i=1}^{r}$, где $\Omega_i \in \omega$, $\Xi_i \in \xi$.

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 12–01–00667–а).

Говорим, что комплексы ω и ξ находятся *в двойственности по соответствию* R, если порядки в комплексах как частично-упорядоченных множествах взаимно противоположны:

$$\Omega_i \prec \Omega_j \Longleftrightarrow \Xi_i \succ \Xi_j.$$

Задача полиэдральной комплементарности — найти точку, принадлежащую обеим клеткам пары (Ω_i, Ξ_i):

$$p^* \text{ — решение } \Longleftrightarrow p^* \in \Omega_i \cap \Xi_i \text{ для некоторого } i.$$

Это естественное обобщение линейной комплементарности, когда (в невырожденном случае) комплексы формируются из граней двух симплексных конусов.

Следует подчеркнуть, что задача полиэдральной комплементарности задаётся тройкой $\{\omega, \xi, R\}$. Два комплекса могут быть в двойственности по разным взаимно однозначным соответствиям.

Пример 1. Задача линейной комплементарности

$$\begin{array}{rcl} Mx \geqslant q & \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{rl} 3x_1 - 2x_2 & \geqslant 6, \\ -x_1 + 2x_2 & \geqslant -3, \end{array} \right. \\ x \geqslant 0 & \Rightarrow & \quad x_1, x_2 \geqslant 0, \end{array}$$

$$(x, Mx - q) = 0.$$

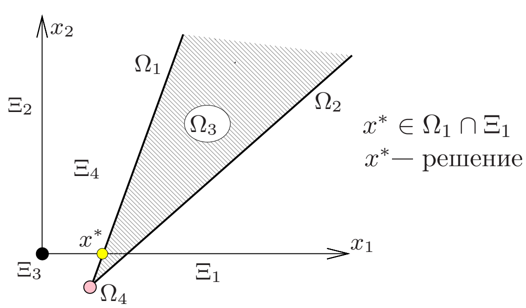

Рис. 1. Линейная комплементарность

Симплексные конусы $\Omega = \{x \mid Mx \geqslant q\}$ и $\Xi = \mathbb{R}^2_+$ формируют два комплекса, имеющих по 4 клетки. Задача порождает 4 пары (Ω_i, Ξ_i). Рис. 1 иллюстрирует задачу. Решением задачи является точка $x^* = (2, 0)$, принадлежащая Ω_1 и Ξ_1.

Пример 2. Задача полиэдральной комплементарности.

Рис. 2 иллюстрирует задачу полиэдральной комплементарности. Здесь каждый из комплексов содержит 7 клеток. Точка x^*, принадлежащая клеткам Ω_6 и Ξ_6, — решение задачи.

Задача полиэдральной комплементарности как отдельный объект исследований введена автором в [9].

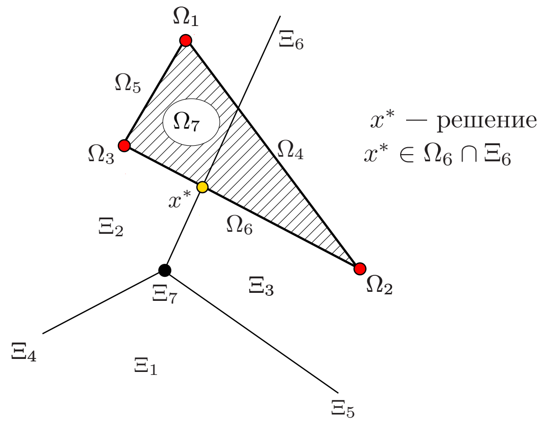

Рис. 2. Полиэдральная комплементарность

2. Линейная модель обмена

Для демонстрации основной идеи подхода рассмотрим линейную модель обмена в общепринятом описании.

В модели имеется n товаров и m участников. Пусть $J = \{1, \ldots, n\}$ и $I = \{1, \ldots, m\}$ — множества номеров товаров и участников соответственно. Каждый участник $i \in I$ располагает вектором начальных запасов $w^i \in \mathbb{R}^n_+$ и должен выбрать вектор потребления $x^i \in \mathbb{R}^n_+$, максимизируя линейную функцию полезности (c^i, x^i):

$$\text{участник } i \quad \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} w^i \in \mathbb{R}^n_+ \text{ — начальные запасы,} \\ x^i \in \mathbb{R}^n_+ \text{ — вектор потребления,} \\ c^i \in \mathbb{R}^n_+ \text{ — вектор коэффициентов полезности.} \end{array} \right.$$

Обмен товарами осуществляется по некоторым неотрицательным ценам p_j, которые образуют вектор цен $p \in \mathbb{R}^n_+$. Тем самым возникает задача участника i

$$\begin{gathered} (c^i, x^i) \to \max, \\ (p, x^i) \leqslant (p, w^i), \\ x^i \geqslant 0. \end{gathered}$$

Пусть $\widetilde{x}^i$ — решение этой задачи. Вектор $\widetilde{p} \neq 0$ является *равновесным вектором цен*, если существуют решения задач участников $\widetilde{x}^i$, $i = 1, \ldots, m$, такие, что

$$\sum_{i \in I} \widetilde{x}^i = \sum_{i \in I} w^i.$$

Для простоты считаем суммарные запасы каждого товара равными 1, т. е. $\sum_i w^i = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$. Нормализуем также вектор p, считая сумму p_j равной 1, тем самым ограничивая изменение вектора p пределами стандартного симплекса

$$\sigma = \Big\{ p \in \mathbb{R}^n_+ \mid \sum_{j \in J} p_j = 1 \Big\}.$$

Для простоты предполагаем, что $c^i > 0$, $i \in I$. Этого достаточно для существования равновесия [21].

3. Идея подхода

Известно, что проблема отыскания равновесия в линейной модели обмена может быть сведена к задаче линейной комплементарности [22]. Рассматривемый подход в большей степени отвечает сути проблемы экономического равновесия и приводит к более общей конструкции полиэдральной комплементарности.

Приводимое ниже изложение следует статье [8].

Проблему равновесия можно рассматривать с двух разных точек зрения.

3.1. Традиционная точка зрения. Баланс спроса и предложения. На предъявленный вектор цен p экономика реагирует формированием векторов спроса и предложения:

$$p \begin{array}{l} \nearrow \text{ спрос } D(p), \\ \searrow \text{ предложение } S(p). \end{array}$$

Баланс товаров является условием равновесия:

$$\widehat{p} \text{ — равновесный вектор цен } \Longleftrightarrow S(\widehat{p}) = D(\widehat{p}).$$

3.2. Новая точка зрения. Рассматриваемый подход базируется на введении нового понятия структуры потребления.

Определение. Множество $\mathcal{B} \subset I \times J$ называется *структурой*, если для любого $i \in I$ существует $(i, j) \in \mathcal{B}$.

Говорим, что потребление, задаваемое векторами $\{x^i\}$, *согласовано со структурой* $\mathcal{B}$, если

$$(i, j) \notin \mathcal{B} \Longrightarrow x^i_j = 0.$$

Для произвольной структуры $\mathcal{B}$ вводятся два множества векторов цен — *зоны структуры*:

$$\mathcal{B} \begin{array}{l} \nearrow \Xi(\mathcal{B}) - \textit{зона предпочтительности} \text{ структуры } \mathcal{B}, \\ \searrow \Omega(\mathcal{B}) - \textit{зона сбалансированности} \text{ структуры } \mathcal{B}. \end{array}$$

Зона $\Xi(\mathcal{B})$ является множеством цен, при которых участники предпочитают связи, задаваемые структурой, игнорируя бюджетные ограничения и условия баланса товаров.

Зона $\Omega(\mathcal{B})$ является множеством цен, при которых возможны выполнения бюджетов и баланс товаров, но игнорируются предпочтения участников.

Ясно, что

$$p - \text{равновесный вектор цен} \Longleftrightarrow \exists \mathcal{B} : p \in \Omega(\mathcal{B}) \cap \Xi(\mathcal{B}).$$

Введённое понятие структуры аналогично понятию базисного множества в линейном программировании. Для обычной системы ограничений задачи линейного программирования

$$\sum_{j \in J} a^j x_j = b, \quad x_j \geqslant 0,\ j \in J,$$

базисное множество $\mathcal{B} \subset J$ задаёт структуру соответствующего решения: $x_j = 0,\ j \notin \mathcal{B}$, и $\mathcal{B}$ определяет решение единственным образом. Только такие базисные решения и рассматриваются в симплекс-методе.

Возникает вопрос о семействе $\mathfrak{B}$ тех структур, которыми можно ограничиться при отыскании равновесия в модели обмена: $\mathcal{B} \in \mathfrak{B} \Longrightarrow \mathfrak{B}$?

3.3. Параметрическая транспортная задача модели. При заданном векторе цен p рассмотрим следующую *транспортную задачу модели:*

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} z_{ij} \ln c^i_j \to \max$$

при условиях

$$\{z_{ij}\} \in Z(p) \left| \begin{array}{ll} \sum\limits_{j \in J} z_{ij} = (p, w^i), & i \in I, \\ \sum\limits_{i \in I} z_{ij} = p_j, & j \in J, \\ z_{ij} \geqslant 0, & (i,j) \in I \times J. \end{array} \right.$$

Уравнения этой задачи представляют собой финансовый баланс в разрезе участников и товаров. Переменные z_{ij} вводятся формулами $z_{ij} = p_j x^i_j$.

Это классическая транспортная задача. Вектор цен p является параметром задачи. При введённых предположениях о $\{w^i\}$ эта задача разрешима при всех $p \in \sigma$.

Ответ на вопрос о семействе $\mathfrak{B}$ таков: $\mathfrak{B}$ — совокупность всех двойственно допустимых базисных множеств транспортной задачи модели и всевозможных их подмножеств, являющихся структурами.

3.4. Полиэдральные комплексы модели. Для структуры $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}$ описание зон $\Omega(\mathcal{B})$ и $\Xi(\mathcal{B})$ состоит в следующем:

$$\mathcal{B} \in \mathfrak{B} \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} \text{a) } \Omega(\mathcal{B}) \subset \sigma \text{ — зона сбалансированности структуры:} \\ \Omega(\mathcal{B}) = \{p \in \sigma \mid \exists z \in Z(p):\ z_{ij} = 0,\ (i,j) \notin \mathcal{B}\}, \\ \\ \text{b) } \Xi(\mathcal{B}) \subset \sigma^\circ \text{ — зона предпочтительности структуры:} \\ \Xi(\mathcal{B}) = \left\{ q \in \sigma^\circ \ \mid \max\limits_k \dfrac{c^i_k}{q_k} = \dfrac{c^i_j}{q_j},\ (i,j) \in \mathcal{B} \right\}, \end{array}\right.$$

где σ° — относительная внутренность симплекса σ.

Несложно дать более детальное описание приведённых множеств. Для $q \in \Xi(\mathcal{B})$ получаем линейную систему

$$\begin{aligned} \frac{q_k}{c^i_k} &= \frac{q_j}{c^i_j}, \quad (i,k) \in \mathcal{B},\ (i,j) \in \mathcal{B}, \\ \frac{q_l}{c^i_l} &\geqslant \frac{q_j}{c^i_j}, \quad (i,l) \notin \mathcal{B},\ (i,j) \in \mathcal{B}. \end{aligned}$$

Таким образом, $\Xi(\mathcal{B})$ является пересечением многогранника с σ°.

Чтобы получить описание зоны $\Omega(\mathcal{B})$, используем хорошо известные средства теории транспортных задач. Для $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}$ введём граф $\Gamma(\mathcal{B})$ с множеством вершин $G = \{1, 2, \ldots, m+n\}$ и множеством дуг $\{(i, m+j) \mid (i,j) \in \mathcal{B}\}$. Пусть τ — число компонент связности $\Gamma(\mathcal{B})$, и пусть G_ν — множество вершин ν-й компоненты, $I_\nu = I \cap G_\nu$ и $J_\nu = \{j \in J \mid (m+j) \in G_\nu\}$. Несложно показать, что должна выполняться следующая система линейных уравнений для $p \in \Omega(\mathcal{B})$:

$$\sum_{j \in J_\nu} p_j = \sum_{i \in I_\nu} (p, w^i), \quad \nu = 1, \ldots, \tau.$$

При выполнении этих условий значения z_{ij} получаются из

$$z \in Z(p), \quad z_{ij} = 0,\ (i,j) \notin \mathcal{B},$$

как линейные функции параметра p: $z_{ij} = z_{ij}(p)$.

Теперь для $p \in \Omega(\mathcal{B})$ получаем дополнительно систему линейных неравенств

$$z_{ij}(p) \geqslant 0, \quad (i,j) \in \mathcal{B}.$$

Таким образом, зона $\Omega(\mathcal{B})$ описывается системой линейных уравнений и неравенств, т. е. является многогранником.

Ясно, что $\omega = \{\Omega(\mathcal{B})\}$ и $\xi = \{\Xi(\mathcal{B})\}$ — полиэдральные комплексы и пары $(\Omega(\mathcal{B}), \Xi(\mathcal{B}))$, $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}$, задают взаимно однозначное соответствие, по которому эти комплексы находятся в двойственности.

Особенностью данного случая является лишь то, что клетки комплекса ξ рассматриваются в σ°. Возникающая задача полиэдральной комплементарности эквивалентна задаче отыскания равновесного вектора цен модели. Таким образом, проблема равновесия сведена к проблеме полиэдральной комплементарности.

Следует отметить, что

$$\bigcup_{\mathcal{B} \in \mathfrak{B}} \Omega(\mathcal{B}) = \sigma, \quad \bigcup_{\mathcal{B} \in \mathfrak{B}} \Xi(\mathcal{B}) = \sigma^\circ.$$

4. Иллюстративный пример

Рассматривается модель, в которой 2 участника и 3 товара:

$$c^1 = (1,2,3),\ w^1 = (1/2, 2/3, 1/3), \quad c^2 = (3,2,1),\ w^2 = (1/2, 1/3, 2/3).$$

Векторы c^1 и c^2 можно умножать на положительный множитель, что не меняет модели: $c^1 \sim (1/6, 2/6, 3/6)$, $c^2 \sim (3/6, 2/6, 1/6)$. Поэтому c^1 и c^2 могут рассматриваться как точки симплекса цен σ.

Зоны предпочтительности участников получаем, соединяя точки c^1 и c^2 с вершинами симплекса σ. При этом получаем дополнительно точку c^{12}. Возникает полиэдральный комплекс ξ, содержащий 17 клеток. Три из них — вершины c^1, c^2 и c^{12}. Они отвечают структурам $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ и $\mathcal{B}_{12}$, которые являются базисными множествами транспортной задачи модели. Структуры изображаются в виде $(m \times n)$-матриц с элементами $\{\times, \cdot\}$, где $\times$ отвечает элементам структуры:

$$\mathcal{B}_1 = \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ \cdot & \cdot & \times \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_2 = \begin{pmatrix} \times & \cdot & \cdot \\ \times & \times & \times \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_{12} = \begin{pmatrix} \cdot & \times & \times \\ \times & \times & \cdot \end{pmatrix}.$$

На рис. 3 изображены рядом оба комплекса ξ и ω. Следует заметить, что точки границы симплекса не принадлежат клеткам комплекса ξ.

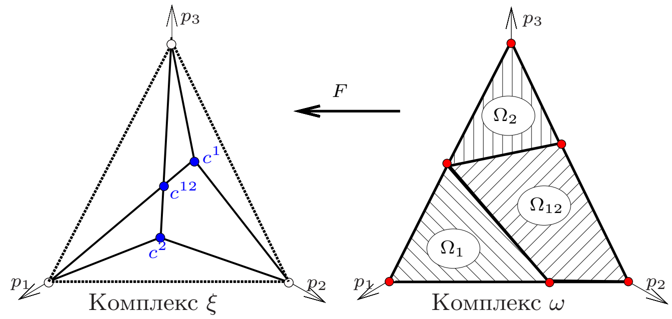

Рис. 3. Полиэдральные комплексы примера

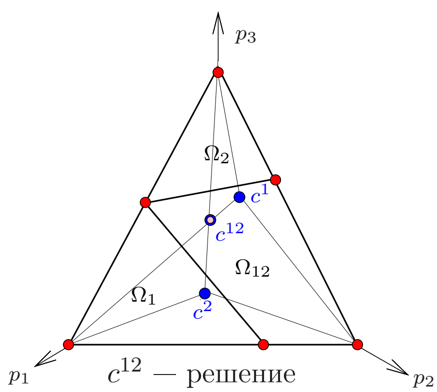

Рис. 4. Иллюстрация задачи комплементарности

Рис. 4 иллюстрирует возникающую задачу полиэдральной комплементарности. Из рис. 4 видно, что точка c^{12} принадлежит $\Omega_{12} = \Omega(\mathcal{B}_{12})$. Таким образом, c^{12} — решение задачи комплементарности. Теперь легко получить состояние равновесия модели:

равновесная структура $\widetilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}_{12}$,

равновесный вектор цен

$$\widetilde{p} = c^{12} = (3/8, 2/8, 3/8),$$

$$(\widetilde{p}, w^1) = 23/48, \quad \widetilde{x}^1 = (0,\ 5/12,\ 1),$$

$$(\widetilde{p}, w^2) = 25/48, \quad \widetilde{x}^2 = (1,\ 7/12,\ 0).$$

5. Связь с неподвижными точками. Свойство монотонности.

5.1. Задачу полиэдральной комплементарности можно переформулировать в виде задачи о неподвижной точке. Для этого следует ввести точечно-множественное отображение $F : \sigma \longrightarrow 2^{\sigma^\circ}$ формулой

$$F(p) = \Xi(\mathcal{B}), \quad p \in \Omega^\circ(\mathcal{B}),$$

где $\Omega^\circ(\mathcal{B})$ — относительная внутренность клетки $\Omega(\mathcal{B})$.

Теорема. *Неподвижные точки отображения F, и только они, задают равновесные векторы цен модели*:

$$p^* \text{ — равновесный вектор цен} \iff \exists \mathcal{B} \in \mathfrak{B} :\ p^* \in \Omega(\mathcal{B}) \cap \Xi(\mathcal{B}).$$

5.2. Монотонность отображения. Отображение F кусочно-постоянно. В приведённом иллюстративном примере обращает на себя внимание определённое свойство убывания этого отображения. На рис. 5 точки c^{12} и c^2 и соответствующие им множества Ω_{12}, Ω_2 расположены в обратном порядке: направление движения от c^{12} к c^2 в некотором смысле противоположно направлению из Ω_{12} в Ω_2. Это же имеет место и для пары точек c^1, c^{12} и отвечающей им пары множеств Ω_1, Ω_{12}.

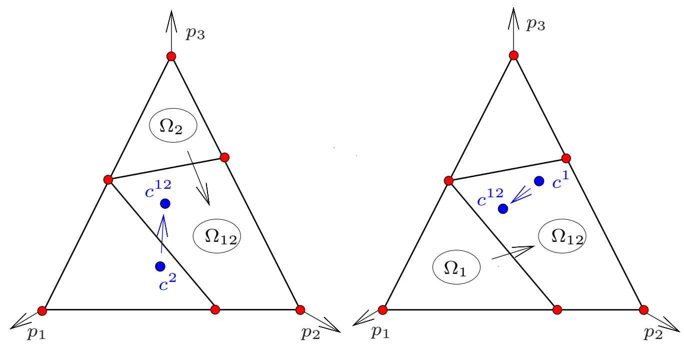

Рис. 5. Иллюстрация свойства убывания

Это означает, что направления движения в пространстве аргументов и пространстве образов противоположны друг другу, что характерно для убывающей функции.

5.3. Монотонность в $\mathbb{R}^n$. Как известно, монотонные отображения в $\mathbb{R}^n$ определяются неравенством

$$(p^1 - p^2, F(p^1) - F(p^2)) \geqslant 0 \quad \text{для любых } p^1,\ p^2.$$

В $\mathbb{R}^1$ это определение даёт возрастающие функции. Поэтому такие отображения следовало бы именовать *возрастающими* , а отображения, определяемые неравенством противоположного знака, — *убывающими*. Рис. 6 иллюстрирует кусочно-постоянное убывающее отображение:

$$(p^1 - p^2, F(p^1) - F(p^2)) \leqslant 0 \quad \text{для любых } p^1,\ p^2.$$

Здесь h — нормаль границы между Ω_1 и Ω_2: $(h, \Omega_2 \boldsymbol{-} \Omega_1) \geqslant 0$.

Заметим, что здесь и местами далее используется так называемое вычитание множеств по Минковскому: $A \boldsymbol{-} B = \{a - b \mid a \in A,\ b \in B\}$. Обычно для обозначения этой операции используют простой минус, однако представляется целесообразным использовать его в несколько изменённом виде, как выше.

Кусочно-постоянные возрастающие отображения потенциальны [4, 5]: для кусочно-постоянного возрастающего отображения G существует выпуклая (кусочно-линейная) функция g такая, что $G = \partial g$. То же самое верно и для кусочно-постоянных убывающих отображений, но в этом случае потенциальная функция является вогнутой: для кусочно-постоянного убывающего отображения F найдётся (кусочно-линейная) вогнутая функция f такая, что $F = -\partial(-f)$.

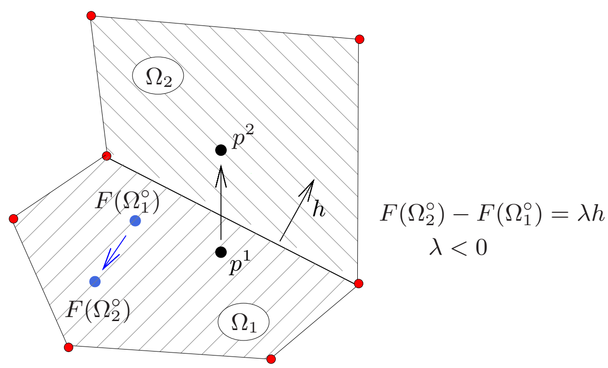

Рис. 6. Убывающее отображение в $\mathbb{R}^2$

Формула принимает прежний вид, если для вогнутой функции f под ∂f понимать субдифференциал выпуклой функции $g = -f$ со знаком минус: $\partial f = -\partial(-f)$.

В силу потенциальности задача о неподвижной точке для кусочно-постоянного убывающего отображения сводится к оптимизационной задаче [5]:

$$\varphi(x) = 1/2(x, x) - f(x) \to \min .$$

Здесь f — вогнутая потенциальная функция отображения F, следовательно, функция φ выпукла.

5.4. Логарифмически убывающие отображения на симплексе. Особый вид монотонности характерен для линейной модели обмена с фиксированными бюджетами [6, 7]. В такой модели каждый участник располагает всеми товарами в одинаковых количествах: $w_j^i = \lambda_i$ для всех $j \in J$. В этом случае легко показать, что $\ln q \in \partial f(p)$ для любого $q \in F(p)$, где f — вогнутая функция, задающая для каждого вектора цен $p \in \sigma$ оптимальное значение в транспортной задаче модели. Таким образом, возникающее отображение F является в указанном смысле потенциальным и логарифмически убывающим:

$$(p^1 - p^2, \ln F(p^1) - \ln F(p^2)) \leqslant 0, \quad p^1, p^2 \in \sigma.$$

Это позволяет для такой модели проблему отыскания равновесия свести к оптимизационной задаче на σ°:

$$\varphi(p) = (p, \ln p) - f(p) \to \min$$

с выпуклой функцией φ [6, 7, 24]. Получаем аналог с рассмотрениями в $\mathbb{R}^n$ — функция $(p, \ln p)$ выполняет роль функции $1/2(x, x)$.

Используя тот факт, что неподвижные точки произвольного отображения F являются таковыми и для обратного отображения F^{-1}, можно использовать и иную оптимизационную задачу [15, 24] с вогнутой функцией $\psi(q) = f^* \ln q$, где f^* — функция, сопряжённая к вогнутой функции f. При этом для вогнутых функций сопряжённые функции вводятся равенством $f^*(z) = \inf\limits_p \{(z, p) - f(p)\}$. Отметим, что такое сведéние проблемы равновесия к оптимизационной задаче принципиально отлично от предложенного в [1]. Кусочно-линейный характер функций f и f^* позволяет предложить для решения приведённых задач оптимизации конечные алгоритмы, использующие идеи субоптимизации [2], что даёт конечные алгоритмы отыскания равновесия в модели обмена с фиксированными бюджетами [7, 15, 24].

Для общего случая модели обмена (с переменными бюджетами) свойство убывания возникающего отображения сохраняется, но приобретает более сложный характер [3].

5.5. Монотонность в задаче полиэдральной комплементарности. Для задачи полиэдральной комплементарности с комплексами $\xi = \{\Xi_i\}$ и $\omega = \{\Omega_i\}$ введём в рассмотрение множества $\Theta_i = \Omega_i - \Xi_i$.

Говорим, что задача *обладает свойством убывания*, если

$$i \neq j \implies \Theta_i^\circ \cap \Theta_j^\circ = \varnothing.$$

В случае линейной модели обмена получаем

$$\Theta(\mathcal{B}) = \Omega(\mathcal{B}) - \Xi(\mathcal{B}), \quad \mathcal{B}_1 \neq \mathcal{B}_2 \implies \Theta^\circ(\mathcal{B}_1) \cap \Theta^\circ(\mathcal{B}_2) = \varnothing.$$

6. Метод встречных траекторий

Эта процедура в главном подобна симплекс-методу: $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}$ является аналогом базисного множества. На каждом шаге процесса относительно имеющейся структуры $\mathcal{B}$ проверяется, не является ли она уже равновесной, и если это не так, то осуществляется переход к некоторой «соседней» структуре.

6.1. Пусть $(\Omega(\mathcal{B}), \Xi(\mathcal{B}))$ — пара клеток в задаче полиэдральной комплементарности рассматриваемой модели, $L(\mathcal{B}) \supset \Xi(\mathcal{B})$ и $M(\mathcal{B}) \supset \Omega(\mathcal{B})$ — аффинные носители этих клеток.

Условие общности положения: $L(\mathcal{B}) \cap M(\mathcal{B})$ — *одноточечное множество.*

Пусть это условие выполнено для стартовой структуры $\mathcal{B}^\circ$. Этого достаточно, чтобы оно выполнялось на всех шагах в дальнейшем.

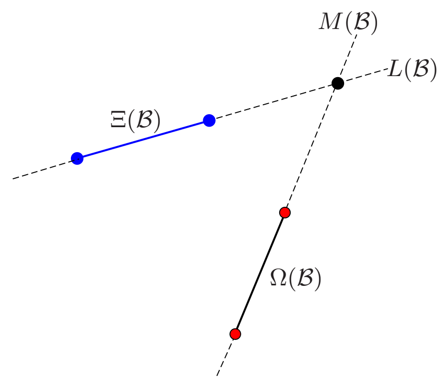

Рис. 7. Общность положения

6.2. Шаг процесса. К началу шага имеются структура $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}$ и точки $p \in \Omega(\mathcal{B})$, $q \in \Xi(\mathcal{B})$. Шаг начинается с определения «идеальной» точки $r = r(\mathcal{B})$ как точки пересечения аффинных носителей клеток $\Omega(\mathcal{B})$ и $\Xi(\mathcal{B})$. Для этого решается соответствующая система линейных уравнений.

Если оказалось, что $r \in \Omega(\mathcal{B})$ и $r \in \Xi(\mathcal{B})$, то r — искомый равновесный вектор цен модели. В противном случае рассматриваются точки $p(t) = p + t(r-p)$, $q(t) = q + t(r-q)$, $t \in [0,1)$. Можно показать, что вследствие предположения $c^i > 0$, $i \in I$, при условиях $p(t) \in \Omega(\mathcal{B})$ и $q(t) \in \Xi(\mathcal{B})$ существует $t^* = \max t$.

В рассматриваемом случае $t^* < 1$. Возможны варианты:

t^* лимитируется условием $p(t) \in \Omega(\mathcal{B}) \Longrightarrow$ структура $\mathcal{B}$ сокращается,

t^* лимитируется условием $q(t) \in \Xi(\mathcal{B}) \Longrightarrow$ структура $\mathcal{B}$ расширяется.

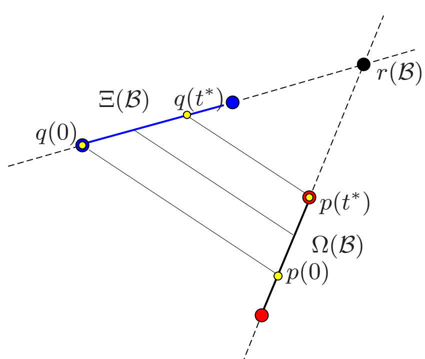

Рис. 8. Иллюстрация шага процесса

Ситуация, когда оба условия оказываются лимитирующими для t^*, рассматривается как вырожденная. Для полученной новой структуры $\mathcal{B}$ процедура повторяется.

На рис. 8 приведена иллюстрация одного шага процесса, когда реализуется первый вариант: точка $p(t^*)$ достигла границы клетки $\Omega(\mathcal{B})$, в то время как $q(t^*)$ ещё внутри клетки $\Xi(\mathcal{B})$. Следовательно, структура $\mathcal{B}$ сократится.

6.3. Иная геометрическая интерпретация. Речь идёт об отыскании такой структуры $\mathcal{B}^*$, что $0 \in \Theta(\mathcal{B}^*) = \Omega(\mathcal{B}^*) - \Xi(\mathcal{B}^*)$.

Рассмотрим движущиеся точки $\theta(t) = p(t) - q(t)$. Они движутся пря-

молинейно к точке 0, пересекая различные множества $\Theta(\mathcal{B})$. Процесс стартует из точки $\theta^\circ = p^\circ - q^\circ$.

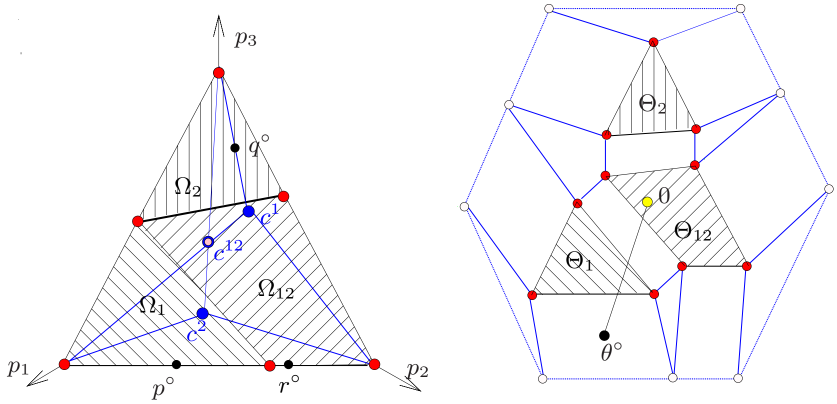

Рис. 9. Иная геометрическая интерпретация

Эта геометрическая интерпретация говорит о том, что рассматриваемый метод является аналогом известного метода Лемке для задач линейной комплементарности [23].

6.4. Условие невырожденности. *Размерность граней многогранных множеств* $\Theta(\mathcal{B}), \mathcal{B} \in \mathfrak{B}$, *по которым отрезок* $[\theta^\circ, 0]$ *пересекает эти множества, не меньше* $n-2$.

Это предположение — аналог известного предположения невырожденности в линейном программировании при рассмотрении симплекс-метода. При его выполнении процесс встречных траекторий однозначно определён при фиксации начальных точек p^0, q^0. На одном шаге процесса число элементов в текущем множестве $\mathcal{B}$ изменяется лишь на единицу.

Теорема. *Процесс встречных траекторий при выполнении условия невырожденности конечен.*

7. Другие модели

Предложенный подход полиэдральной комплементарности позволил получить конечные алгоритмы отыскания равновесия в различных вариациях и обобщениях классической модели обмена.

7.1. Модель с ограничениями сверху на объёмы закупок. В случае фиксированных бюджетов рассматривалась модель обмена, в которой на объёмы закупок x_j^i наложены дополнительные ограничения

финансового типа: $p_j x^i_j \leqslant \beta^i_j$ [11]. Потенциальность возникающего отображения в этом случае позволяет предложить два конечных алгоритма, в определённом смысле двойственных друг другу и базирующихся на идеях субоптимизации [2].

Более сложной является модель, в которой закупки ограничиваются в натуральном выражении: $x^i_j \leqslant b^i_j$. Эта модель рассматривалась в общем случае (с переменными бюджетами) в [10]. Возникающее отображение в этом случае уже не обладает свойством монотонности, и процесс встречных траекторий приобретает более сложный характер — на некоторых шагах возможно движение не к «идеальной» точке, а в противоположном направлении. В этом аналогия с общим процессом Лемке для задач линейной комплементарности [23], когда нет положительности главных миноров матрицы ограничений задачи. Показано, что процесс даёт равновесное состояние при условии специального старта.

7.2. Модель кооперации. Модель является в известном смысле антиподом модели обмена и призвана оттенить качественные особенности модели обмена. От модели обмена она отличается тем, что участник i теперь минимизирует свою линейную целевую функцию (c^i, x^i), $c^i \geqslant 0$, отражающую степень «неудовольствия» от выбора своего вектора x^i. Модель исследовалась для случая фиксированных бюджетов [6, 7, 24]. В этом случае задача участника имеет вид

$$\left.\begin{array}{c} (c^i, x^i) \to \min \\ (p, x^i) \geqslant \lambda_i \\ x^i \geqslant 0 \end{array}\right| \implies \text{задача участника } i.$$

Участников модели можно интерпретировать как фирмы, работающие в условиях вменённого дохода, величина которого задаётся набором чисел λ_i. Речь идёт о выборе таких цен на товары, при которых фирмы, руководствуясь лишь своими предпочтениями, выпускают суммарно товары в заданных количествах. Качественная особенность модели состоит в том, что возникающее отображение F в отличие от модели обмена уже является не убывающим, а возрастающим. Потенциальность отображения сохраняется, но потенциальная функция f является не вогнутой, а выпуклой, и функция φ, вводимая при рассмотрении модели обмена, оказывается разностью двух выпуклых функций. Тем не менее для этой модели удалось предложить конечные алгоритмы отыскания равновесия.

7.3. Обобщённая модель обмена. Эта модель синтезирует в себе модель обмена и модель кооперации. Множество участников модели состоит из участников-потребителей $i \in I$ и участников-фирм $k \in K$.

Участники-фирмы поставляют дополнительные объёмы товаров на рынок. При этом k-я фирма, как и в модели кооперации, обязана поставить на рынок товары на сумму не менее заданной положительной величины λ_k (вменённый доход). Задача фирмы формулируется, как и в модели кооперации.

Участник-потребитель i характеризуется не только начальным запасом товаров w^i, но и начальным запасом денег α_i. Его общий бюджет после продажи своего запаса товаров равен $\alpha_i + (p, w^i)$.

Состояние равновесия характеризуется некоторым вектором цен $\widetilde{p}$ и набором векторов $\widetilde{x}^i$ и $\widetilde{x}^k$, $i \in I$, $k \in K$, являющихся оптимальными решениями соответствующих задач участников при $p = \widetilde{p}$ и удовлетворяющих условию баланса товаров: $\sum\limits_{i\in I} \widetilde{x}^i = \sum\limits_{k\in K} \widetilde{x}^k + \sum\limits_{i\in I} w^i$.

Исследован частный случай модели, когда товары в определённых количествах уже имеются на рынке, а у участников-потребителей есть только деньги, и бюджеты участников фиксированы [14]. Модель наследует свойство монотонности, присущее классической модели обмена с фиксированными бюджетами, и возникающее в схеме полиэдральной комплементарности отображение одного комплекса в другой является потенциальным и логарифмически убывающим. Потенциальной функцией является оптимальное значение транспортной задачи модели с целевой функцией $\sum\limits_{i\in I}\sum\limits_{j\in J} z_{ij} \ln c^i_j - \sum\limits_{k\in K}\sum\limits_{j\in J} z_{kj} \ln c^k_j \to \max$. Предложенный конечный алгоритм реализует схему субоптимизации [2].

7.4. Дробно-линейная модель обмена. Это модель обмена, в которой функции предпочтения участников дробно-линейные

$$f_i(x) = \frac{(c^i, x) + c^i_\circ}{(d^i, x) + d^i_\circ},$$

где $c^i, d^i \in \mathbb{R}^n$, $c^i_\circ, d^i_\circ \in \mathbb{R}^1$ заданы. При этом предполагается, что $d^i \geqslant 0$ и $d^i_\circ > 0$. Таким образом, функции f_i определены на всём $\mathbb{R}^n_+$

В этом случае усложняется вопрос о существовании равновесных состояний. Но процесс встречных траекторий по-прежнему является монотонным. Модель исследовалась в работах [16, 17].

7.5. Линейная модель производства-обмена. Эта модель близка к обобщённой модели обмена, но каждая фирма использует для производства товаров некоторый ресурс, имеющийся у фирмы в ограниченном количестве. Задан вектор $c^k = \left(c^k_1, \ldots, c^k_n\right)$, компоненты которого задают удельные затраты ресурса при производстве различных товаров. Если

запас ресурса у фирмы k составляет ζ_k единиц, то план производства k-й фирмы x^k должен удовлетворять условию $(c^k, x^k) \leqslant \zeta_k$. Фирма стремится максимизировать доход. Таким образом, свой выбор x^k фирма осуществляет в соответствии с оптимальным решением оптимизационной задачи:

$$\left.\begin{array}{c} (p, x^k) \to \max \\ (c^k, x^k) \leqslant \zeta_k \\ x^k \geqslant 0 \end{array}\right| \Longrightarrow \text{ задача } k\text{-й фирмы.}$$

Определение состояния равновесия остаётся прежним.

Эта модель изучалась в [18, 19]. Особенностью применения схемы полиэдральной комплементарности является то, что усложняется характер рассматриваемых комплексов и возникающего точечно-множественного отображения — клетки комплекса ω рассматриваются в $\mathbb{R}^{2n}$, а отображение уже не является кусочно-постоянным, как это было в иных вариантах модели. Для случая фиксированных бюджетов обоснован конечный алгоритм метода встречных траекторий. Отмечается возможность использования предложенного алгоритма для построения итеративного процесса в случае переменных бюджетов по аналогии с процессом для классической модели обмена [20].

7.6. Вариант линейной модели Эрроу — Дебре. В общей модели Эрроу — Дебре возможен переток финансов от фирм к потребителям. Потребители как бы являются акционерами фирм и их бюджеты формируются с учётом долей, которые потребители имеют в доходах фирм. Простейший линейный вариант такой модели рассмотрен в [12, 13]. В модели производства-обмена дополнительно задаются коэффициенты ϑ^i_k — доля потребителя i в доходе фирмы k. В результате в бюджет потребителя i добавляется дополнительно величина $\sum\limits_{k \in K} \lambda_k \vartheta^i_k$, где λ_k — доход фирмы k. Для такого варианта модели подход полиэдральной комплементарности в сочетании с идеей последовательного наращивания числа фирм позволил предложить конечный алгоритм отыскания равновесия.

Автор выражает искреннюю признательность И. В. Романовскому за полезные советы и ценные рекомендации.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гейл Д.** Теория линейных экономических моделей. — М.: Изд-во иностр. лит., 1963. — 418 с.

2. **Шмырёв В. И.** Методы минимизации квазивыпуклой функции на многограннике // Оптимизация. — 1971. — Т. 1. — С. 82–117.
3. **Шмырёв В. И.** Монотонность в линейных моделях обмена // Оптимизация. —1981. — Т. 27. — С. 77–95.
4. **Шмырёв В. И.** О потенциальности кусочно-постоянных монотонных отображений // Оптимизация. — 1981. — Т. 27. — С. 65–76.
5. **Шмырёв В. И.** Об отыскании неподвижных точек кусочно-постоянных монотонных отображений в $\mathbb{R}^n$ // Докл. АН СССР. — 1981. — Т. 259, № 2. — С. 299–301.
   Shmyrev V. I. On the determination of fixed points of piecewise constant monotone mappings in $\mathbb{R}^n$ // Sov. Math. Dokl. — 1981. — Vol. 24, N 1. — P. 88–90.
6. **Шмырёв В. И.** Об одном подходе к отысканию равновесия в простейших моделях обмена // Докл. АН СССР. — 1983. — Т. 268, № 5. — С. 1062–1066.
   Shmyrev V. I. On an approach to the determination of equilibrium in elementary exchange models // Sov. Math. Dokl. — 1983. — Vol. 27, N 1. — P. 230–233.
7. **Шмырёв В. И.** Алгоритмы отыскания равновесия в моделях обмена с фиксированными бюджетами // Оптимизация. — 1983. — Т. 31. — С. 137–155.
8. **Шмырев В. И.** Алгоритм поиска равновесия в линейной модели обмена // Сиб. мат. журн. — 1985. — Т. 26, № 2. — С. 163–175.
   Shmyrev V. I. An algorithm for the search of equilibrium in the linear exchange model // Sib. Math. J. — 1985. — Vol. 26. — P. 288–300.
9. **Шмырёв В. И.** Задача полиэдральной комплементарности // Оптимизация. — 1988. — Т. 44. — С. 82–95.
10. **Шмырёв В. И.** Об отыскании равновесия в линейной модели обмена с ограничениями сверху на переменные // Оптимизация. — 1988. — Т. 42. — С. 86–117.
11. **Шмырёв В. И.** Об отыскании равновесия в линейной модели обмена с фиксированными бюджетами и дополнительными ограничениями финансового типа // Оптимизация. — 1989. — Т. 45. — С. 66–86.
12. **Шмырёв В. И.** Алгоритм полиэдральной комплементарности для одного класса линейных моделей Эрроу — Дебре // 4-й Сиб. конгресс по прикл. и индустр. математике (ИНПРИМ–2000). Тез. докл. Ч. III. — Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 2000. — С. 166–167.
13. **Шмырёв В. И.** Нахождение равновесия в одном классе моделей производства-обмена // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. — 2003. — Т. 10, № 1. — С. 65–91.
14. **Шмырёв В. И.** Обобщённая линейная модель обмена // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. — 2006. — Т. 13. — С. 74–102.
    Shmyrev V. I. A generalized linear exchange model // J. Appl. Industr.

Math. — 2008. — Vol. 2, N 1. — P. 125–142.

15. **Шмырёв В. И.** Об одном алгоритме отыскания равновесия в линейной модели обмена с фиксированными бюджетами //Сиб. журн. индустр. математики. — 2008. — Т. 11, № 2. — С. 139–154.
16. **Шмырёв В. И.** Дробно-линейная модель обмена. Ч. 1. Существование и признак равновесия // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2010. — Т. 17, № 1. — С. 75–96.
17. **Шмырёв В. И.** Дробно-линейная модель обмена. Ч. 2. Метод встречных траекторий для модели с фиксированными бюджетами // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2010. — Т. 17, № 2. — С. 79–96.
18. **Шмырёв В. И.** Линейная модель производства-обмена. Полиэдральные комплексы и признак оптимальности // Сиб. журн. индустр. математики. — 2011. — Т. 14, № 2. — С. 124–131.
    Shmyrev V. I. A linear production-exchange model, polyhedral complexes and a criterion for an equilibrium // J. Appl. Industr. Math. — 2012. — Vol. 6, N 2. — P. 240–247.
19. **Шмырёв В. И.** Линейная модель производства-обмена. Метод встречных траекторий // Сиб. журн. индустр. математики. — 2011. — Т. 14, № 4. — С. 136–146.
    Shmyrev V. I. A method of meeting paths for the linear production-exchange model // J. Appl. Industr. Math. — 2012. — Vol. 6, N 4. — P. 490–500.
20. **Шмырёв В. И., Шмырева Н. В.** Итеративный алгоритм нахождения равновесия в линейной модели обмена // Тр. Ин-та математики СО РАН. — 1994. — Т. 28. — С. 130–146.
    Shmyrev V. I. Shmyreva N. V. An iterative algorithm for searching an equilibrium in the linear exchange model // Sib. Adv. Math. — 1996. — Vol. 6, N 1. — P. 87–104.
21. **Gale D.** The linear exchange model // J. Math. Econ. — 1976. — Vol. 3, N 2. — P. 205–209.
22. **Eaves B. C.** A finite algorithm for linear exchange model // J. Math. Econ. — 1976. — Vol. 3, N 2. — P. 197–204.
23. **Lemke C. E.** Bimatrix equilibrium points and mathematical programming // Manage. Sci. — 1965. — Vol. 2, N 7. — P. 681–689.
24. **Shmyrev V. I.** An algorithmic approach for searching an equilibrium in fixed budget exchange models // Russian contributions to game theory and equilibrium theory. — Berlin: Springer-Verl., 2006. — P. 217–235.

Шмырёв Вадим Иванович,
e-mail: shvi@math.nsc.ru

Статья поступила
15 марта 2013 г.
Переработанный вариант —
4 февраля 2014 г.