ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Март—апрель 2014. Том 21, № 2. С. 76–83

УДК 519.87

СОВЕРШЕННЫЕ 2-РАСКРАСКИ БЕСКОНЕЧНЫХ ЦИРКУЛЯНТНЫХ ГРАФОВ СО СПЛОШНЫМ НАБОРОМ ДИСТАНЦИЙ [*)]

О. Г. Паршина

Аннотация. Исследуются совершенные раскраски бесконечных циркулянтных графов с набором дистанций, образующих отрезок натуральных чисел $[1, n]$. Для этих графов получено полное описание совершенных раскрасок в два цвета и перечислены все их допустимые параметры.

Ключевые слова: совершенная раскраска, циркулянтный граф.

Введение

Исследуются совершенные 2-раскраски бесконечных циркулянтных графов с набором дистанций, образующих целочисленный отрезок $[1, n]$. Граф бесконечной n-мерной прямоугольной решётки допускает естественный гомоморфизм на любой циркулянтный граф с n дистанциями (см., например, [5]). Поэтому разнообразие параметров совершенных раскрасок (как и самих раскрасок) в решётке гораздо богаче, чем в циркулянтных графах.

Раскраска графа в два цвета называется *сплошной* (ν_1, ν_2)*-раскраской*, если она периодическая с минимальной длиной периода $\nu_1 + \nu_2$ и минимальный период с точностью до циклического сдвига имеет следующий вид: сначала подряд идут ν_1 вершин цвета 1, потом — ν_2 вершин цвета 2. В [5] получено полное описание параметров сплошных совершенных 2-раскрасок произвольных циркулянтных графов. В [4] приведена бесконечная серия несплошных 2-раскрасок таких графов с новыми параметрами. В [6] полностью охарактеризованы параметры совершенных 2-раскрасок двумерной решётки, а в [2] — трёхмерной. Четырёхмерный

[*)]Исследование выполнено при финансовой поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры России» на 2009–2013 гг. (соглашение № 8227) и грантом НШ-1939.2014.1 Президента России для ведущих научных школ.

случай остаётся нерешённым. Близкими к циркулянтным являются графы, в группе автоморфизмов которых содержатся элементы большого порядка, например, граф призмы и лестницы Мёбиуса. Исследованию совершенных раскрасок этих графов посвящены работы [1, 3].

Нетрудно показать, что любая совершенная раскраска произвольного циркулянтного графа обязательно периодическая (см., например, [5]). Это позволяет сводить задачу поиска раскраски к вполне конечному перебору. В нашем случае (сплошной набор дистанций) такой перебор приводит к полному решению.

1. Определения и обозначения

Обозначим через $C_\infty(d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n)$ бесконечный граф, множество вершин которого совпадает с множеством целых чисел, а рёбрами соединены вершины, находящиеся на расстоянии $d \in \{d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n\}$. Степень этого графа равна $2n$.

По графу $C_\infty(d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n)$ построим соответствующий ему циркулянтный граф длины t и обозначим его через $C_t(d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n)$. Множество его вершин совпадает с множеством элементов группы Z_t, и для любой вершины мультимножество инцидентных ей рёбер имеет вид $\{(v, v + d_i \mod \mathrm{t}) \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$.

В статье рассмотрен случай, когда $d_i = i$ для всех $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Граф $C(n) = C_\infty(1, 2, 3, \ldots, n)$ называется *бесконечным циркулянтным графом со сплошным набором дистанций*, или *сплошным циркулянтным графом*. Соответствующий ему циркулянтный граф длины t обозначим через $C_t(n)$.

Пусть k — натуральное число. *Раскраской вершин графа $G(V, E)$ в k цветов* называется отображение $\varphi : V \to \{1, 2, \ldots, k\}$. Если при этом $\varphi(v) = s$ для вершины v, то говорят, что s — её *цвет*.

Раскраска вершин графа в два цвета (чёрный и белый) называется *совершенной* с матрицей параметров $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, если каждая чёрная вершина соседствует ровно с a чёрными и b белыми вершинами, а каждая белая — с d белыми и c чёрными вершинами. Из того, что степень графа $C(n)$ равна $2n$, следуют равенства: $a + b = 2n$, $c + d = 2n$, или $a = 2n - b$, $d = 2n - c$. Таким образом, матрица параметров раскраски легко восстанавливается лишь по значениям параметров b и c. Не теряя общности, можно считать, что $b \geqslant c$. Если соответствующая совершенная раскраска существует, то пара (b, c) называется *допустимой* для данного графа. Далее под раскраской графа всегда будем подразумевать раскраску его вершин.

Для удобства иногда будем обозначать вершину чёрного цвета единицей, а белого — нулём. Запись 1^k0^l будет изображать последовательность подряд идущих вершин, в которой сначала идут k чёрных вершин, а затем — l белых вершин.

Для исследования совершенных раскрасок графов широко используется понятие гомоморфизма.

Гомоморфизмом графа $G_1(V_1, E_1)$ на граф $G_2(V_2, E_2)$ называется сюръективное отображение $h : V_1 \to V_2$, взаимно однозначно переводящее единичную окрестность вершины в единичную окрестность её образа.

Утверждение 1. *Если существует гомоморфизм графа G_1 на G_2, то совершенная раскраска графа G_2 с матрицей параметров M порождает совершенную раскраску G_1 с матрицей параметров M.*

Доказательство. Покрасим каждую вершину графа G_1 цветом, которым покрашен её образ в графе G_2. Тогда по определению гомоморфизма полученная раскраска графа G_1 будет совершенной с той же матрицей параметров, что и у совершенной раскраски графа G_2. Утверждение 1 доказано.

Утверждение 1 даёт метод построения совершенных раскрасок графа по совершенным раскраскам других, обычно более просто устроенных графов. Например, известно, что существует естественный гомоморфизм графа $C(n)$ на псевдограф $C_t(n)$, соответствующий гомоморфизму Z на Z_t. Такой гомоморфизм позволяет перейти от бесконечных графов к графам конечной длины, что в ряде случаев очень упрощает ход работы.

2. Основная теорема

Основным результатом статьи является следующая

Теорема 1. *Для графа $C(n)$ пара натуральных чисел (b, c) допустима тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий*:

(i) $b + c = 2n + 1$;

(ii) b, c — *чётные и* $b + c \in \{2n, 2n + 2\}$;

(iii) b, c — *нечётные,* $b = c,\ b + c \in \{2n, 2n + 2\}$.

Предваряя доказательство теоремы, заметим, что будут перечислены не только все допустимые параметры, но и полностью описаны все совершенные раскраски графа $C(n)$.

Доказательство. Сначала докажем, что если пара (b, c) допустима, то $b + c \in \{2n, 2n + 1, 2n + 2\}$.

Для этого рассмотрим две соседние разноокрашенные вершины u_i и u_{i+1}. Без ограничения общности можно считать, что вершина u_i чёрная. В состав окружения вершины u_i входят две вершины, не лежащие в окружении вершины u_{i+1}: u_{i-n} и сама u_{i+1}. Аналогично в составе окружения u_{i+1} имеются вершины u_{i+n+1} и u_i, не принадлежащие окружению вершины u_i. Рассмотрим все возможные варианты раскрасок пары вершин (u_{i-n}, u_{i+n+1}).

$(1,0)$. Цветовые составы окружений u_i и u_{i+1} совпадают: $c = a = 2n - b \Leftrightarrow b + c = 2n$.

$(1,1)$. В окружении u_{i+1} на одну чёрную вершину больше, чем в окружении u_i: $c = a + 1 = 2n - b + 1 \Leftrightarrow b + c = 2n + 1$.

$(0,1)$. В окружении u_i на две белых вершины больше, чем в окружении u_{i+1}: $b = d + 2 = 2n - c + 2 \Leftrightarrow b + c = 2n + 2$.

$(0,0)$. Аналогичен случаю $(1,1)$.

Теперь для каждого значения суммы $b + c$ построим совершенные раскраски графа $C(n)$.

1. Рассмотрим случай $b + c = 2n + 1$, являющийся наиболее простым. Матрица параметров совершенной раскраски, соответствующей данной паре (b, c), имеет вид $M_1 = \begin{pmatrix} 2n-b & b \\ c & 2n-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2n-b & b \\ 2n-b+1 & b-1 \end{pmatrix}$.

Лемма 1. *Пусть $\{u_i \mid i$ — целое $\}$ — множество вершин графа $C(n)$, и пусть матрица параметров совершенной раскраски имеет вид M_1. Тогда длина периода совершенной раскраски графа $C(n)$ с матрицей параметров M_1 равна $T = 2n + 1$.*

Необходимо показать, что вершины на расстоянии $2n + 1$ окрашены одинаково. Для этого рассмотрим две соседние вершины u_i и u_{i+1} и цветовые составы их окружений. Как говорилось выше, в состав окружения вершины u_i входят две вершины, не лежащие в окружении вершины u_{i+1}: u_{i-n}, и сама u_{i+1}. Аналогично в составе окружения u_{i+1} имеются вершины u_{i+n+1} и u_i, не принадлежащие окружению вершины u_i. Если вершины u_i и u_{i+1} окрашены одинаково ($\varphi(u_i) = \varphi(u_{i+1})$), то цветовые составы их окружения должны совпадать, т. е. вершины u_{i-n} и u_{i+1+n} (находящиеся на расстоянии $2n + 1$) окрашены одинаково.

Пусть u_i и u_{i+1} окрашены в разные цвета, и пусть $\varphi(u_i) = 1$. Из вида матрицы M_1 ясно, что u_i имеет в своём окружении на одну белую вершину больше, чем u_{i+1}, которая является именно этой белой вершиной. Сама u_i является чёрной вершиной, входящей в состав окружения u_{i+1}, но не входящей в своё окружение. В остальном же цветовые составы окружений этой пары вершин совпадают, а так как их окружения имеют

$2n-2$ общие вершины, u_{i-n} и u_{i+1+n} имеют одинаковый цвет. Таким образом, для того чтобы совершенная раскраска соответствовала матрице параметров M_1, необходимо, чтобы на расстоянии $T = 2n+1$ находились одинаково окрашенные вершины. Лемма 1 доказана.

Нетрудно убедиться, что раскраска с периодом вида 1^c0^b соответствует матрице параметров M_1. Рассмотрим гомоморфизм из множества вершин графа $C(n)$ на множество вершин графа $C_T(n)$. Известно, что совершенная раскраска графа $C_T(n)$ порождает совершенную раскраску графа $C(n)$, причём матрицы параметров этих раскрасок совпадают. Из того, что $C_T(n)$ — полный граф, следует, что, раскрасив в произвольном порядке b его вершин белым цветом, а c вершин — чёрным, получим совершенную раскраску с матрицей M_1. Обратным гомоморфизмом получим совершенную раскраску графа $C(n)$ с той же матрицей параметров. Таким образом, для матрицы M_1 найдена серия совершенных раскрасок с периодом длины $T = 2n + 1$, в котором произвольным образом расположены b белых и c чёрных вершин.

2. Пусть $b + c = 2n$. В этом случае матрица параметров имеет вид $M_2 = \begin{pmatrix} 2n-b & b \\ 2n-b & b \end{pmatrix}$.

Лемма 2. *Пусть $\{u_i \mid i$ — целое $\}$ — множество вершин графа $C(n)$, и пусть матрица параметров совершенной раскраски имеет вид M_2. Тогда верны утверждения*:

(i) *если $\varphi(u_i) \neq \varphi(u_{i+1})$, то $\varphi(u_{i-n}) = \varphi(u_i)$, а $\varphi(u_{i+1+n}) = \varphi(u_{i+1})$;*

(ii) *если $\varphi(u_i) = \varphi(u_{i+1})$, то $\varphi(u_{i-n}) = \varphi(u_{i+1+n})$;*

(iiii) *если $\varphi(u_i) \neq \varphi(u_{i+n})$, то $\varphi(u_{i-1}) = \varphi(u_i)$, а $\varphi(u_{i+n+1}) = \varphi(u_{i+n})$.*

Доказательство. Из вида матрицы M_2 следует, что цветовой состав окружения каждой вершины не зависит от её цвета. Таким образом, пп. (i) и (ii) очевидны. Рассмотрим п. (iii). Предположим, что $\varphi(u_{i-1}) \neq \varphi(u_i)$, тогда из (i) следует, что $\varphi(u_{i+n}) = \varphi(u_i)$, а это противоречит (iii). Аналогично $\varphi(u_{i+n+1}) = \varphi(u_{i+n})$. Лемма 2 доказана.

Найдём периоды раскрасок, соответствующих матрице M_2.

Будем называть цепь вершин вида $\{u_i \mid i = ks,\ s$ — целое$\}$ *k-цепью.* Если все вершины такой цепи окрашены одинаково, то будем говорить, что это *однородная* k-цепь, а если цвета вершин в ней чередуются, то назовем её *чередующейся.*

Рассмотрим n-цепи в графе $C(n)$. Если все такие n-цепи однородные, то длина периода раскраски равна n. Если нет, то существует i такое, что $\varphi(u_i) \neq \varphi(u_{i+n})$. Будем считать без ограничения общности, что $\varphi(u_i) = 1$.

Тогда согласно лемме 2(iii) имеем

$$\varphi(u_{i-1}) = \varphi(u_i) = 1, \quad \varphi(u_{i+n+1}) = \varphi(u_{i+n}) = 0.$$

Далее из леммы 2(ii) следует, что $\varphi(u_{i+2n+1}) = \varphi(u_i) = 1$. В силу леммы 2(iii) имеем $\varphi(u_{i+2n+2}) = \varphi(u_{i+2n+1}) = 1$. Продолжая эту процедуру, получаем две одинаковые чередующиеся $(n+1)$-цепи. Пусть u_{i+n+2} — чёрная вершина. Тогда согласно лемме 2(i) вершина u_{i+1} белая. Согласно лемме 2(ii) вершина u_{i+2n+3} не может быть чёрной. Если u_{i+n+2} белая, то из леммы 2(ii) следует, что вершина u_{i+1} чёрная (так как уже известно, что вершина u_{i+2n+2} чёрная). Продолжая, снова получаем чередующиеся $(n+1)$-цепи, т. е. имеем раскраску графа с длиной периода $T = 2n+2$, в котором число чёрных вершин равно числу белых вершин, и на расстоянии $n+1$ находятся разноокрашенные вершины.

Рассмотрим гомоморфизм графа $C(n)$ на граф $C_{2n+2}(n)$. В данном случае матрицы параметров имеют вид $\begin{pmatrix} n & n \\ n & n \end{pmatrix}$ и $b = c$.

Теперь рассмотрим аналогичный гомоморфизм графа $C(n)$ на мультиграф $C_n(n)$. Пусть в графе $C_n(n)$ s белых и t чёрных вершин. Тогда каждая белая вершина смежна ровно с $2s$ белыми и $2t$ чёрными вершинами, это значит, что числа b и c чётные.

Таким образом, получили два возможных периода раскраски графа $C(n)$, причём если длина периода T равна n, то b и c обязательно чётные. Если $T = 2n+2$, то b и c могут быть нечётными, но в этом случае $b = c$ и совершенная раскраска графа состоит из чередующихся $(n+1)$-цепей, взятых в произвольном порядке.

Нетрудно убедиться, что раскраска $1^{c/2}0^{b/2}$ соответствует матрице параметров M_2. Более того, из вида мультиграфа $C_n(n)$ ясно, что любая раскраска с периодом $T = n$, в котором произвольным образом расположено $b/2$ белых и $c/2$ чёрных вершин, является совершенной с матрицей параметров M_2.

3. Пусть $b + c = 2n+2$. Матрица параметров совершенной раскраски в этом случае имеет вид $M_3 = \begin{pmatrix} 2n-b & b \\ 2n-b+2 & b-2 \end{pmatrix}$.

Лемма 3. *Пусть $\{u_i \mid i$ — целое $\}$ — множество вершин графа $C(n)$, и пусть матрица параметров совершенной раскраски имеет вид M_3. Тогда верны следующие утверждения*:

(a) *если $\varphi(u_i) \neq \varphi(u_{i+1})$, то $\varphi(u_{i-n}) = \varphi(u_{i+1})$, $\varphi(u_{i+1+n}) = \varphi(u_i)$;*

(b) *если $\varphi(u_i) = \varphi(u_{i+1})$, то $\varphi(u_{i-n}) = \varphi(u_{i+1+n})$;*

(c) *если $\varphi(u_i) \neq \varphi(u_{i+1+n})$, то $\varphi(u_{i+1}) = \varphi(u_i)$, а $\varphi(u_{i+n}) = \varphi(u_{i+1+n})$.*

П. (b) леммы выполняется по соображениям из доказательства леммы 1.

Пусть $\varphi(u_i) \neq \varphi(u_{i+1})$. Будем считать вершину u_i чёрной ($\varphi(u_i) = 1$). Тогда из вида матрицы параметров M_3 следует, что в окружении вершины u_i должно быть на две белые вершины больше, чем в окружении вершины u_{i+1}, а это значит, что $\varphi(u_{i-n}) = 0$, $\varphi(u_{i+1+n}) = 1$. Если цвета исходных вершин инвертировать, то получим аналогичные равенства: $\varphi(u_{i-n}) = 1$, $\varphi(u_{i+1+n}) = 0$. Таким образом, п. (a) выполнен.

Перейдём к п. (c). Предположим, что $\varphi(u_{i+1}) \neq \varphi(u_i)$, тогда из п. (a) следует, что $\varphi(u_{i+1+n}) = \varphi(u_i)$, а это противоречит условию п. (c). Аналогично получим равенство $\varphi(u_{i+1+n}) = \varphi(u_{i+n})$. Лемма 3 доказана.

Найдём периоды раскрасок, соответствующих матрице M_3. Для этого рассмотрим $(n+1)$-цепи в графе $C(n)$. Если все $(n+1)$-цепи однородные, то длина периода раскраски равна $n+1$. Иначе существует i такое, что $\varphi(u_i) \neq \varphi(u_{i+n+1})$. Без ограничения общности предположим, что вершина u_i чёрная, тогда вершина u_{i+n+1} белая. Поэтому согласно лемме 3(c) имеем $\varphi(u_{i+1}) = \varphi(u_i) = 1$, $\varphi(u_{i+n}) = \varphi(u_{i+n+1}) = 0$. Далее, из леммы 3(b) следует, что $\varphi(u_{i+2n+1}) = \varphi(u_i) = 1$. В силу леммы 3(c) имеем $\varphi(u_{i+2n}) = \varphi(u_{i+2n+1}) = 1$. Продолжая эту процедуру, получаем две одинаковые чередующиеся n-цепи. Пусть u_{i+n+2} — чёрная вершина. Тогда согласно лемме 3(a) u_{i+2n+2} белая, и согласно лемме 3(b) вершина u_{i+2} не может быть чёрной (так как вершина u_{i-n+1} белая). Если u_{i+n+2} белая, то из леммы 3(b) следует, что вершина u_{i+2n+2} чёрная, и из леммы 3(c) следует, что u_{i+2} чёрная. Продолжая, снова получаем чередующиеся n-цепи, т. е. имеем раскраску графа с длиной периода $T = 2n$, в котором число чёрных вершин равно числу белых вершин, и на расстоянии n находятся разноокрашенные вершины.

Рассмотрим гомоморфизм граф $C(n)$ на псевдограф $C_{2n}(n)$. В данном случае матрицы параметров имеют вид $\begin{pmatrix} n-1 & n+1 \\ n+1 & n-1 \end{pmatrix}$ и $b = c$.

Теперь рассмотрим аналогичный гомоморфизм графа $C(n)$ на мультиграф $C_{n+1}(n)$. Пусть в графе $C_{n+1}(n)$ s белых и t чёрных вершин. Тогда каждая чёрная вершина смежна ровно с $2s$ белыми и $2(t-1)$ чёрными вершинами, значит, числа b и c чётные.

Тем самым получено два возможных периода раскраски графа $C(n)$, причём если длина периода T равна $n+1$, то b и c обязательно чётные. Если $T = 2n$, то b и c могут быть нечётными, но в этом случае $b = c$ и раскраска вершин графа состоит из чередующихся n-цепей, взятых в произвольном порядке.

Нетрудно убедиться, что раскраска $1^{c/2}0^{b/2}$ соответствует матрице параметров M_3. Более того, из вида мультиграфа $C_{n+1}(n)$ ясно, что любая раскраска с периодом $T = n + 1$, в котором произвольным образом расположено $b/2$ белых и $c/2$ чёрных вершин, тоже соответствует M_3.

Таким образом, перечислены не только все допустимые параметры совершенных 2-раскрасок бесконечных циркулянтов со сплошным набором дистанций, но и все совершенные раскраски исследуемых графов в два цвета. Теорема 1 доказана.

Дальнейший интерес представляет обобщение результатов данной статьи на раскраски рассмотренных графов в большее число цветов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Августинович С. В., Лисицына М. А.** Совершенные 2-раскраски транзитивных кубических графов // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2011. — Т. 18, № 2. — С. 3–17.
   Avgustinovich S. V., Lisitsyna M. A. Perfect 2-colorings of transitive cubic graphs // J. Appl. Industr. Math. — 2011. — Vol. 5, N 4. — P. 519–528.
2. **Лисицына М. А.** Совершенные 3-раскраски графов призмы и лестницы Мёбиуса // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2013. — Т. 20, № 1. — С. 28—36.
   Lisitsyna M. A. Perfect 3-colorings of prism and Möbius ladder graphs // J. Appl. Industr. Math. — 2013. — Vol. 7, N 2. — P. 215–220.
3. **Хорошилова Д. Б.** О параметрах совершенных 2-раскрасок циркулянтных графов // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2011. — Т. 18, № 6. — С. 82–89.
4. **Хорошилова Д. Б.** О циркулярных совершенных раскрасках в два цвета // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2009. — Т. 16, № 1. — С. 80–92.
5. **Axenovich M. A.** On multiple coverings of the infinite rectangular grid with balls of constant radius // Discrete Math. — 2003. — Vol. 268, N 1–3. — P. 31–48.

Паршина Ольга Геннадьевна,
e-mail: parolja@gmail.com

Статья поступила
22 мая 2013 г.

Переработанный вариант —
8 июля 2013 г.