ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Март—апрель 2014. Том 21, № 2. С. 24–32

УДК 519.175.3

ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ПОМЕЧЕННЫХ ПОЛНОБЛОЧНО-КАКТУСНЫХ ГРАФОВ

В. А. Воблый, А. К. Мелешко

Аннотация. Получены точные и асимптотические формулы для числа помеченных полноблочно-кактусных графов, а также для числа помеченных эйлеровых полноблочно-кактусных графов с заданным количеством вершин.

Ключевые слова: перечисление, полноблочный граф, кактус, полноблочно-кактусный граф, асимптотика.

Кактусом называется связный граф, в котором нет рёбер, лежащих более чем на одном простом цикле [7, с. 93]. Все блоки кактуса — рёбра или циклы. Кактусы раньше назывались *деревьями Хусими*. *Полноблочным графом* называется граф, у которого все блоки — полные графы. Он называется также *графом Хусими* или *блок-графом* [13]. Граф *полноблочно-кактусный*, если у него все блоки или полные графы, или циклы [14].

Класс полноблочно-кактусных графов — естественное расширение классов кактусов и полноблочных графов. Графы из этого класса обладают многими интересными свойствами [12, 14, 15]. Ряд задач алгоритмической теории графов, как, например, задача k-доминирования, являющихся в общем случае NP-полными задачами, могут быть решены в классе полноблочно-кактусных графов полиномиальными алгоритмами [12]. Помеченные кактусы и полноблочные графы перечислены в [10, 11]. Кроме того, в [2, 3] перечислены помеченные эйлеровы кактусы и эйлеровы полноблочные графы.

В статье выводятся точные и асимптотические формулы числа помеченных полноблочно-кактусных графов, а также числа помеченных эйлеровых полноблочно-кактусных графов.

Теорема 1. *Пусть F_n — число помеченных полноблочно-кактусных* *графов с n вершинами. При $n \geqslant 4$ верна формула*

$$F_n = \frac{1}{n}P_{n-1}(n) + (n-1)! \sum_{p=1}^{[\frac{n-1}{3}]} \sum_{i=0}^{n-3p-1} \binom{n-i-2p-2}{p-1} \frac{P_i(n)n^{p-1}}{2^p p! i!}, \qquad (1)$$

где $P_i(x)$ — многочлен Белла одной переменной [8].

Доказательство. Отметим, что множества полноблочных графов и кактусов имеют непустое пересечение, так как деревья и кактусы, у которых все блоки — рёбра или треугольники, являются одновременно полноблочными графами и кактусами. Пусть C_n — число помеченных связных графов с n вершинами, а B_n — число помеченных блоков с n вершинами. Введём производящую функцию $B(z) = \sum\limits_{n=3}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}$. В [1] доказано, что $C_n = \frac{(n-1)!}{n}[z^{n-1}]\exp(nB'(z))$.

Обозначая через $\overline{B}(z)$ экспоненциальную производящую функцию для числа блоков помеченных полноблочно-кактусных графов, получим

$$F_n = \frac{(n-1)!}{n}[z^{n-1}]\exp(n\overline{B}'(z)) = \frac{(n-1)!}{n}[z^{-1}]\exp(n\overline{B}'(z))z^{-n}.$$

Так как у полноблочно-кактусного графа все блоки или полные графы, или циклы, а число помеченных циклов с n вершинами равно $(n-1)!/2$, имеем

$$\overline{B}(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{2}(n-1)!\frac{z^n}{n!},$$

$$\overline{B}'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2}z^n = e^z - 1 + \frac{z^3}{2(1-z)}.$$

Следовательно,

$$F_n = \frac{(n-1)!}{n}[z^{-1}]\exp(n(e^z-1))\exp\left(\frac{nz^3}{2(1-z)}\right)z^{-n}. \qquad (2)$$

Многочлен Белла одной переменной определяется через числа Стирлинга 2-го рода и имеет следующую производящую функцию:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)x^k, \quad \exp(x(e^z-1)) = \sum_{i=0}^{\infty} P_i(x)\frac{z^i}{i!}.$$

Таким образом, разлагая вторую экспоненту в степенной ряд, найдём

$$F_n = \frac{(n-1)!}{n}[z^{-1}]\sum_{i=0}^{\infty} \frac{P_i(n)}{i!}z^i \left(1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{n^p z^{3p}}{2^p(1-z)^p p!}\right)z^{-n}.$$

С помощью известного ряда [5, с. 141]

$$(1-z)^{-p} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{r+p-1}{p-1} z^r \tag{3}$$

получим

$$F_n = \frac{P_{n-1}(n)}{n} + (n-1)![z^{-1}] \sum_{i=0}^{\infty} \frac{P_i(n)}{i!} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{n^{p-1}}{2^p p!} \sum_{r=0}^{\infty} \binom{r+p-1}{p-1} z^{3p+r+i-n}$$

$$= \frac{P_{n-1}(n)}{n} + (n-1)! \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{P_i(n) n^{p-1}}{2^p p! i!} \binom{n-i-2p-2}{p-1}.$$

Учитывая, что биномиальный коэффициент при $p-1 > n-i-2p-2$ обращается в нуль, завершим доказательство теоремы.

Заметим, что первое слагаемое в (1) равно числу помеченных полноблочных графов [13].

Лемма 1. *Граф эйлеров только тогда, когда каждый его блок — эйлеров граф.*

Доказательство. Если все блоки графа — эйлеровы графы, т. е. их вершины имеют чётные степени, то и сам граф имеет все вершины с чётными степенями, так как при склейке в точке сочленения двух вершин блоков с чётными степенями получится вершина с чётной степенью.

Докажем теперь, что если граф эйлеров, то и все его блоки — эйлеровы графы. Используем индукцию по числу блоков. Пусть граф состоит из двух блоков, тогда он имеет только одну точку сочленения [4, с. 111]. Но в силу леммы о рукопожатиях граф не может иметь только одну вершину нечётной степени. Таким образом, для графа, состоящего из двух блоков, лемма верна.

Допустим теперь, что лемма верна для графа, состоящего из k блоков, $k > 1$, и докажем, что она верна для графа, состоящего из $k+1$ блоков. Известно, что в любом связном графе, состоящем из нескольких блоков, существует концевой блок, который имеет только одну точку сочленения [6, с. 92]. После отсоединения такого блока от графа вершина, ранее склеенная с точкой сочленения, не может иметь нечётной степени, так как она была бы единственной вершиной с нечётной степенью в графе, что противоречит лемме о рукопожатиях. Следовательно, концевой блок, а также часть графа, оставшаяся после отсоединения концевого блока, имеют все вершины с чётными степенями. В силу предположения индукции, все блоки этой части графа имеют только вершины чётной степени. Поэтому и весь граф состоит из блоков с чётными степенями вершин. Лемма 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть EF_n — число помеченных эйлеровых полноблочно-кактусных графов с n вершинами. При $n \geqslant 4$ верна формула*

$$EF_n = \frac{1}{n}\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r\binom{n-1}{r}P_r\left(\frac{n}{2}\right)P_{n-1-r}\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$+(n-1)!\sum_{l=1}^{[\frac{n-1}{3}]}\sum_{r=0}^{n-3l-1}\sum_{k=0}^{n-r-3l-1}(-1)^r\frac{P_k(\frac{n}{2})P_r(\frac{n}{2})n^{l-1}}{k!r!l!2^l}\binom{n-r-k-2l-2}{l-1},$$

где $P_i(x)$ — многочлен Белла одной переменной.

Доказательство. Отметим, что первое слагаемое в формуле для EF_n равно числу помеченных эйлеровых полноблочных графов [3].

Так как у эйлеровых полноблочно-кактусных графов нет блоков, состоящих из одного ребра [2], а все блоки-полные графы имеют нечётное числом вершин, получим

$$\overline{B}(z) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{2}(n-1)!\frac{z^n}{n!},$$

$$\overline{B}'(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{2k}}{(2k)!} + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{\infty}z^k = \operatorname{ch} z - 1 + \frac{z^3}{2(1-z)}.$$

Следовательно,

$$EF_n = \frac{(n-1)!}{n}[z^{-1}]\exp\left(n\left(\operatorname{ch} z - 1 + \frac{z^3}{2(1-z)}\right)\right)z^{-n}, \tag{4}$$

$$EF_n = \frac{(n-1)!}{n}[z^{-1}]\exp\left(n\frac{e^z-1}{2}\right)\exp\left(n\frac{e^{-z}-1}{2}\right)\exp\left(\frac{nz^3}{2(1-z)}\right)z^{-n}.$$

Применяя производящую функцию для многочленов Белла одной переменной и разлагая третью экспоненту в степенной ряд, найдём

$$EF_n = \frac{(n-1)!}{n}[z^{-1}]\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(\frac{n}{2})}{k!}z^k\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{P_r(\frac{n}{2})}{r!}z^r\sum_{l=0}^{\infty}\frac{n^l z^{3l}}{2^l(1-z)^l l!}z^{-n}.$$

Используя соотношение (3), имеем

$$EF_n = \frac{1}{n}\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r\binom{n-1}{r}P_{n-1-r}\left(\frac{n}{2}\right)P_r\left(\frac{n}{2}\right)$$
$$+\frac{(n-1)!}{n}[z^{-1}]\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^r\frac{P_k(\frac{n}{2})P_r(\frac{n}{2})n^l}{k!r!l!2^l}\binom{p+l-1}{l-1}z^{k+3l+r-n+p}$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{r=0}^{n-1}\binom{n-1}{r}P_{n-1-r}\left(\frac{n}{2}\right)P_r\left(\frac{n}{2}\right)$$
$$+(n-1)!\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^r\frac{P_k(\frac{n}{2})P_r(\frac{n}{2})n^{l-1}}{k!r!l!2^l}\binom{n-k-r-2l-2}{l-1}.$$

Учитывая, что биномиальный коэфициент при $l-1>n-k-r-2l-2$ обращается в нуль, получим требуемое утверждение. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Для числа F_n помеченных полноблочно-кактусных графов с n вершинами при $n\to\infty$ верна асимптотическая формула*

$$F_n \sim c_1 n^{-5/2}a_1^n n!,$$

где $c_1 \approx 0.1178070871,\ a_1 \approx 4.261224133$.

Доказательство. Используем теорему Флажоле — Седжвика [9, теорема VIII.8]. Обозначим

$$F(N,n) = [z^N]\{a(z)(b(z))^n\} = \frac{1}{2\pi i}\oint a(z)(b(z))^n\frac{dz}{z^{N+1}}.$$

Теорема Флажоле — Седжвика [9]. *Пусть функции $a(z)$ и $b(z)$ удовлетворяют следующим условиям:*

(i) *функции $a(z)=\sum_{j\geqslant 0} a_j z^j$ и $b(z)=\sum_{j\geqslant 0} b_j z^j$ аналитические в точке $z=0$ и имеют неотрицательные коэффициенты, кроме того, $b(0)\neq 0$;*

(ii) НОД$\{j \mid b_j>0\}=1$;

(iii) *если $R\leqslant\infty$ — радиус сходимости $b(z)$, то радиус сходимости $a(z)$ не меньше R.*

Пусть $T=\lim_{x\to R-0}\frac{xb'(x)}{b(x)}$, $0<\lambda<T$, r — единственный положительный корень уравнения $r\frac{b'(r)}{b(r)}=\lambda$, и пусть $\sigma=\frac{d^2}{dr^2}(\ln b(r)-\lambda\ln r)$.

Тогда для целого $N=\lambda n$ при $n\to\infty$ и $N\to\infty$ верна асимптотическая формула

$$F(N,n)\sim a(r)\frac{(b(r))^n}{r^{N+1}\sqrt{2\pi n\sigma}}.$$

В нашем случае в силу формулы (2) имеем

$$F_n = \frac{(n-1)!}{n}[z^n]\left\{z\left(\exp\left(e^z - 1 + \frac{z^3}{2(1-z)}\right)^n\right)\right\} = \frac{(n-1)!}{n}F(N,n),$$

где $N = n,\ \lambda = 1,\ a(z) = z,\ b(z) = \exp\left(e^z - 1 + \frac{z^3}{2(1-z)}\right)$.

Так как ряд для $\overline{B}(z)$ сходится при $|z| < 1$, оператор формального вычета является контурным интегралом. Очевидно, что функции $a(z)$ и $b(z)$ аналитические в точке $z = 0$ и $b(0) = e^{-1}$. Функция $b(z)$ имеет положительные коэффициенты, поскольку $b(z) = \exp(\overline{B}(z))$ и $\overline{B}(z)$ — производящая функция для числа помеченных блоков частного вида. В силу того, что $b_2 > 0$, $b_3 > 0$, имеем НОД$\{j \mid b_j > 0\} = 1$. Так как $z = 1$ — ближайшая к началу координат особая точка $b(z)$, радиус сходимости R функции $b(z)$ равен 1. Очевидно, что $a(z)$ имеет бесконечный радиус сходимости. Таким образом, условия (i)–(iii) теоремы Флажоле — Седжвика выполнены.

Найдём

$$T = \lim_{x\to 1-0}\frac{xb'(x)}{b(x)} = \lim_{x\to 1-0}\exp\left(e^z - 1 + \frac{z^3}{2(1-z)}\right) = +\infty, \quad 0 < \lambda < T.$$

В нашем случае уравнение $r\frac{b'(r)}{b(r)} = \lambda$ имеет вид $r\left(e^r + \frac{3r^2-2r^3}{2(1-r)^2}\right) = 1$. Решая это уравнение с помощью Maple, находим его единственный положительный корень $r \approx 0.4457376225$. Вычисляя величину

$$\sigma = \left(\frac{b'(r)}{b(r)}\right)' + \frac{\lambda}{r^2} = \left(e^r + \frac{3r^2 - 2r^3}{2(1-r)^2}\right)' + \frac{1}{r^2} = e^r + \frac{r^3 - 3r^2 + 3r}{(1-r)^3} + \frac{1}{r^2},$$

получим $\sigma \approx 11.46772568$. Также с помощью Maple вычислим

$$c_1 = \frac{a(r)}{r\sqrt{2\pi\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \approx 0.1178070871, \quad a_1 = \frac{b(r)}{r} \approx 4.261224133.$$

Таким образом, при $n \to \infty$ имеем асимптотику

$$Ca_n = \frac{(n-1)!}{n}F(N,n) \sim \frac{(n-1)!}{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}n^{-1/2}\left(\frac{b(r)}{r}\right)^n \sim n!c_1n^{-5/2}a_1^n.$$

Теорема 3 доказана.

Следствие 1. *Почти все помеченные полноблочно-кактусные графы не являются кактусами.*

Доказательство. Известно [1, теорема 2], что для числа Ca_n помеченных кактусов с n вершинами при $n \to \infty$ верна асимптотическая формула $Ca_n \sim cn^{-5/2}a^n n!$, где $c \approx 0.1201498132$, $a \approx 4.188654598$. Следовательно, в силу теоремы 3 имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Ca_n}{F_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{cn^{-5/2}a^n}{c_1 n^{-5/2} a_1^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{c}{c_1}\left(\frac{a}{a_1}\right)^n = 0,$$

т. е. асимптотически почти все помеченные полноблочно-кактусные графы не кактусы.

Теорема 4. *Для числа EF_n помеченных эйлеровых полноблочно-кактусных графов с n вершинами при $n \to \infty$ верна асимптотическая формула*

$$EF_n \sim c_2 n^{-5/2} a_2^n n!,$$

где $c_2 \approx 0.1077647029$, $a_2 \approx 2.551467441$.

Доказательство. Воспользуемся опять теоремой Флажоле — Седжвика. Формулу (4) можно представить в виде $EF_n = \frac{(n-1)!}{n} F(N,n)$, где $N = n$, $\lambda = 1$, $a(z) = z$, $b(z) = \exp\left(\operatorname{ch} z - 1 + \frac{z^3}{2(1-z)}\right)$. Функции $a(z)$ и $b(z)$ аналитические в точке $z = 0$, и $b(0) = 1$. Радиус сходимости $b(z)$ равен 1. Повторяя рассуждения доказательства теоремы 3, видим, что условия (i)–(iii) теоремы Флажоле — Седжвика выполнены. Найдём

$$T = \lim_{x\to 1-0} \frac{xb'(x)}{b(x)} = \lim_{x\to 1-0} x\left(\exp\left(\operatorname{sh} x + \frac{3x^2 - 2x^3}{2(1-x)^2}\right)\right) = +\infty, \ 0 < \lambda < T.$$

Уравнение $r\frac{b'(r)}{b(r)} = \lambda$ имеет вид $r\left(\operatorname{sh} r + \frac{3r^2-2r^3}{2(1-r)^2}\right) = 1$. Решая его с помощью Maple, находим единственный положительный корень $r \approx 0.5372618604$, лежащий в круге сходимости $b(z)$. Вычисляя величину

$$\sigma = \left(\frac{b'(r)}{b(r)}\right)' + \frac{\lambda}{r^2} = \left(\operatorname{sh} r + \frac{3r^2 - 2r^3}{2(1-r)^2}\right)' + \frac{1}{r^2} = \operatorname{ch} r + \frac{r^3 - 3r^2 + 3r}{(1-r)^3} + \frac{1}{r^2},$$

получим $\sigma \approx 13.70462195$. Также с помощью Maple вычислим

$$c_2 = \frac{a(r)}{r\sqrt{2\pi\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \approx 0.1077647029, \quad a_2 = \frac{b(r)}{r} \approx 2.551467441.$$

Таким образом, при $n \to \infty$ имеем асимптотику

$$EF_n = \frac{(n-1)!}{n} F(N,n) \sim \frac{(n-1)!}{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} n^{-1/2} \left(\frac{b(r)}{r}\right)^n \sim n! c_2 n^{-5/2} a_2^n.$$

Теорема 4 доказана.

В таблице представлены числа F_n и EF_n, вычисленные с помощью формул из теорем 1 и 2 (для $n = 2$ и $n = 3$ вычисление непосредственное).

n	2	3	4	5	6	7	8	9
F_n	1	4	32	383	6127	123155	2986041	84856924
EF_n	0	1	3	28	240	3091	43680	756883

Авторы благодарят Л. М. Коганова за ценное замечание.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Воблый В. А.** Об одной формуле для числа помеченных связных графов // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2012. — Т. 19, №4. — С. 48–59.
2. **Воблый В. А.** Перечисление помеченных эйлеровых кактусов // Мат. XI Междунар. семинара «Дискретная математика и её приложения». — М.: МГУ, 2012. — С. 275–277.
3. **Воблый В. А., Мелешко А. К.** Перечисление помеченных эйлеровых полноблочных графов // Мат. XV Межвуз. семинара «Комбинаторные конфигурации и их приложения» (Кировоград, 2013). — Кировоград: Изд-во Кировоградского нац. тех. ун-та, 2013. — С. 15–18.
4. **Зыков А. А.** Основы теории графов. — М.: Наука, 1987. — 382 с.
5. **Прудников А. П. и др.** Интегралы и ряды. Т. 1. — М.: Наука, 1981. — 800 с.
6. **Татт У.** Теория графов. — М.: Мир, 1988. — 424 с.
7. **Харари Ф., Палмер Э.** Перечисление графов. — М.: Мир, 1977. — 324 с.
8. **Carlitz L.** Single variable Bell polynomials // Collect. Math. — 1962. — Vol. 14. — P. 13–25.
9. **Flajolet Ph., Sedgewick R.** Analytic combinatorics. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009. — 810 p.
10. **Ford G. W., Uhlenbeck G. E.** Combinatorial problems in theory graphs. I // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. — 1956. — Vol. 42. — P. 13–25.
11. **Husimi K.** Note on Mayer's theory of cluster integrals // J. Chem. Phys. — 1950. — Vol. 18. — P. 682–684.
12. **Lan J. K., Chang G. J.** Algorithmic aspects of k-domination in graphs // Discrete Appl. Math. — 2013. — Vol. 161. — P. 1513–1520.
13. **Leroux P.** Enumerative problems inspired by Mayer's theory of cluster integrals // Electron. J. Comb. — 2004. — Vol. 11, N 32.
14. **Randerath B., Volkmann L.** A characterization of well covered block-cactus graphs // Australasian J. Comb. — 1994. — Vol. 9. — P. 307-314.

15. **Wang F.-H., Wang Y.-L., Chang J.-M.** The lower and upper forcing geodetic numbers of block-cactus graphs // Eur. J. Oper. Res. — 2006. — Vol. 175. — P. 238–245.

Воблый Виталий Антониевич,
e-mail: vitvobl@yandex.ru
Мелешко Анна Константиновна,
e-mail: konstantin_meleshko@rambler.ru

Статья поступила
22 июля 2013 г.