ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Май—июнь 2014. Том 21, № 3. С. 76–81

УДК 519.2+621.391

О МУЛЬТИРАСКРАСКЕ РЁБЕР УНИЦИКЛИЧЕСКИХ ГРАФОВ *)

А. В. Пяткин

Аннотация. *Мультираскраской* рёберно взвешенного графа называется такое назначение интервалов его рёбрам, что интервалы смежных рёбер не пересекаются по внутренним точкам, а длина каждого интервала равна весу ребра. Минимальная длина объединения всех интервалов называется *рёберным мультихроматическим числом* графа. Очевидной его нижней оценкой является максимальная взвешенная степень вершины, т. е. сумма весов инцидентных ей рёбер. Известны примеры, когда мультихроматическое число в полтора раза превышает нижнюю оценку, и существует гипотеза, что больше оно её превосходить не может. В настоящей работе эта гипотеза доказывается для класса унициклических графов.

Ключевые слова: рёберная раскраска, мультираскраска, взвешенные графы, интервалы, задача open shop.

Введение

Будем говорить, что граф $G = (V, E)$ *рёберно взвешенный*, если каждому его ребру $e \in E$ приписано целое положительное число $w(e)$, называемое *весом* e. Через $E(v)$ обозначим множество всех рёбер, инцидентных вершине v. *Взвешенной степенью вершины* v называется величина $d(v) = \sum\limits_{e\in E(v)} w(e)$, а *взвешенной степенью графа* G — величина $\Delta(G) = \max\{d(v) \mid v \in V(G)\}$.

Под *интервалом* с концами a и b в работе понимается отрезок числовой прямой $[a, b] = \{x \in R \mid a \leqslant x \leqslant b\}$. Будем говорить, что интервал *нормальный*, если a и b являются целыми неотрицательными числами, причём $b \geqslant a$. Далее в статье рассматриваются только нормальные интервалы. Число a будем называть *левым*, а число b — *правым* концами интервала $I = [a, b]$ и обозначать через $l(I)$ и $r(I)$ соответственно.

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 12–01–00090, 12–01–00093, 12–01–00184 и 13–07–00070).

Длиной интервала $[a, b]$ называется величина $b - a$. *Мультираскраской* рёбер графа G называется назначение каждому ребру некоторого интервала, длина которого равна весу этого ребра; такой интервал называется *мультицветом* данного ребра. Говорим, что мультираскраска *правильная*, если мультицвета смежных рёбер не пересекаются по внутренним точкам. Максимум разности $r(I) - l(J)$ по всем мультицветам I и J, использованным в мультираскраске, будем называть числом цветов этой раскраски. *Рёберным мультихроматическим числом* $\mu'(G)$ называется минимальное число цветов, необходимое для правильной мультираскраски всех рёбер графа. Ясно, что $\mu'(G) \geqslant \Delta(G)$. Заметим, что если веса всех рёбер равны 1, то $\mu'(G) = \chi'(G)$, где $\chi'(G)$ — хроматический индекс графа G.

Аналогичная задача мультираскраски вершин рассмотрена В. Г. Визингом в [1] (отличие — под $[a, b]$ понимается множество $\{a, a+1, \ldots, b\}$). Заметим, что все результаты, полученные в нашей работе, легко переформулировать в терминологии дискретных интервалов. Это делается с помощью биекции, сопоставляющей нормальному интервалу $[i-1, i]$ число i (интервалу $[a, b]$ сопоставляется множество $\{a+1, a+2, \ldots, b\}$). В [1] доказаны аналоги теорем Витавера, Нордхауза и Гаддума, а также получен ряд других интересных результатов о мультираскраске вершин. В [2] рассмотрена задача мультираскраски инциденторов взвешенного неориентированного графа. Её можно интерпретировать как частный случай рёберной мультираскраски двудольного графа, в котором все вершины одной из долей имеют степень два, причём веса обоих рёбер, примыкающих к каждой из вершин этой доли, совпадают. В [2] получен ряд верхних и нижних оценок для рёберного мультихроматического числа таких графов (наиболее интересная из них — $\mu'(G) \leqslant \lfloor 5\Delta(G)/4 \rfloor$).

Отметим также, что задача поиска рёберного мультихроматического числа графа является обобщением известной задачи open shop. Напомним, что в задаче open shop задано n работ, которые следует выполнить на m машинах, причём известна длительность p_{ij} выполнения i-й работы на j-й машине для всех $i = 1, 2, \ldots, n,\ j = 1, 2, \ldots, m$. Требуется составить кратчайшее расписание выполнения работ (без прерываний) так, чтобы в любой момент времени каждая работа выполнялась не более чем на одной машине и каждая машина выполняла не более одной работы. Если рассмотреть полный двудольный граф $K_{m,n}$ с долями $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ и $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ и весами рёбер $w(u_i v_j) = p_{ij}$, то нетрудно заметить, что рёберное мультихроматическое число этого графа в точности равно длине минимального расписания задачи open

shop. Действительно, назначение ребру $u_i v_j$ мультицвета $[a, b]$ означает, что i-я работа начала выполняться на машине j в момент времени a и закончила выполнение в момент времени b. Условие правильности мультираскраски эквивалентно условию корректности получаемого расписания, минимальная длина которого совпадает с мультихроматическим числом графа.

Одним из классических результатов о рёберной раскраске является теорема Шеннона [3] о том, что рёберное хроматическое число не может превосходить степень графа более чем в полтора раза. Любопытно, что в задаче open shop также есть «фольклорная» гипотеза [4], что длина оптимального расписания не может превосходить тривиальной нижней оценки (максимум из длин работ и нагрузок машин) более чем в полтора раза. Поскольку тривиальная нижняя оценка для задачи open shop совпадает с взвешенной степенью приведённого выше двудольного графа, имеет смысл выдвинуть гипотезу об обобщении теоремы Шеннона для мультираскрасок.

Гипотеза. *Для любого взвешенного мультиграфа G выполнено неравенство $\mu'(G) \leqslant \lfloor 3\Delta(G)/2 \rfloor$.*

Очевидно, что эта оценка достигается на любом треугольнике с одинаковыми весами рёбер. Заметим, что в отличие от случая обычной рёберной раскраски эта оценка может достигаться в случае двудольных графов и даже деревьев. Достаточно рассмотреть подразбиение звезды $K_{1,2t+1}$ и положить веса рёбер, примыкающих к центру, равными 1, а веса висячих рёбер — $2t$. Нетрудно убедиться, что в этом случае $\Delta = 2t + 1$ и $\mu' = \lfloor 3\Delta/2 \rfloor = 3t + 1$.

Граф G *унициклический*, если он связный и $|V(G)| = |E(G)|$. Нетрудно показать, что унициклический граф содержит единственный цикл C, при удалении рёбер которого получается лес, каждая компонента связности которого содержит ровно одну вершину из цикла C. Для вершины v цикла C компоненту связности (дерево) графа $G \setminus E(C)$, содержащую вершину v, будем обозначать через T_v.

Основным результатом данной статьи является доказательство вышеприведённой гипотезы для мультираскраски рёбер унициклических графов.

1. Мультираскраска рёбер унициклических графов

Пусть $I = [0, \lfloor 3\Delta/2 \rfloor]$. Говорим, что интервалы $I_1, I_2, \ldots, I_k$ *правильно уложены* в отрезок I, если они не пересекаются по внутренним точкам и для каждого интервала I_j выполняется условие $l(I_j) \leqslant \lfloor \Delta/2 \rfloor$ или

условие $r(I_j) \geqslant \Delta$ (другими словами, ни один из I_j не лежит полностью в отрезке $[\lfloor\Delta/2\rfloor + 1, \Delta - 1]$). Говорим, что интервалы $I_1, \ldots, I_k$ *плотно уложены* вправо (соответственно влево) от точки a, если $l(I_1) = a$ и $r(I_j) = l(I_{j+1})$ (соответственно $r(I_1) = a$ и $l(I_j) = r(I_{j+1})$) для всех $j = 1, 2, \ldots, k-1$.

Нам потребуется лемма о продолжении правильной укладки.

Лемма 1. *Пусть $w_1, \ldots, w_k$ — длины интервалов $I_1, \ldots, I_k$, сумма их не превосходит Δ, и пусть I_1, I_2, I_3 правильно уложены в отрезок $I = [0, \lfloor 3\Delta/2\rfloor]$ так, что $l(I_1) = 0$ и $r(I_2) = \lfloor 3\Delta/2\rfloor$. Тогда интервалы $I_4, I_5, \ldots, I_k$ можно правильно уложить в отрезок I так, что ни один из них не пересекается с интервалами I_1, I_2, I_3 по внутренним точкам.*

Доказательство. Имеем $l(I_3) \leqslant \lfloor\Delta/2\rfloor$ или $r(I_3) \geqslant \Delta$, так как интервал I_3 уложен правильно. Ввиду симметрии относительно точки $\lfloor 3\Delta/2\rfloor/2$ достаточно рассмотреть только случай $l(I_3) \leqslant \lfloor\Delta/2\rfloor$. Укладку интервалов $I_4, I_5, \ldots, I_k$ осуществим в три шага.

Шаг 1. Уложим плотно интервалы $I_4, I_5, \ldots, I_{k_1}$ влево от $l(I_2)$, k_1 — номер первого интервала, для которого $l(I_{k_1}) < \Delta$ (если это условие не выполняется ни для одного интервала, то $k_1 = k$; аналогичная оговорка делается и для остальных шагов).

Шаг 2. Если $k_1 \neq k$, то уложим плотно интервалы $I_{k_1+1}, I_{k_1+2}, \ldots, I_{k_2}$ вправо от $r(I_3)$, где k_2 — номер первого интервала такого, что $r(I_{k_2}) > \lfloor\Delta/2\rfloor$ (если $r(I_3) > \lfloor\Delta/2\rfloor$, то полагается $k_2 = k_1$ и шаг 2 пропускается).

Шаг 3. Если $k_2 \neq k$, то уложим плотно интервалы $I_{k_2+1}, I_{k_2+2}, \ldots, I_k$ вправо от $r(I_1)$.

Покажем, что полученная укладка будет правильной. Из условий шагов 1 и 2 вытекает, что ни один из интервалов не лежит полностью в отрезке $[\lfloor\Delta/2\rfloor + 1, \Delta - 1]$. Докажем, что интервалы не пересекаются по внутренним точкам. Заметим, что $l(I_{k_1}) \geqslant r(I_3)$ и, более того, если $k_1 \neq k_2$, то $l(I_{k_1}) \geqslant r(I_{k_2})$. Действительно, в противном случае из условия $l(I_3) \leqslant \lfloor\Delta/2\rfloor$ следует, что $\sum_{j=2}^{k_2} w_j \geqslant \lfloor 3\Delta/2\rfloor - \lfloor\Delta/2\rfloor + 1 > \Delta$. Итак, если $k \in \{k_1, k_2\}$, то укладка правильна.

Осталось показать, что $r(I_{k_3}) \leqslant l(I_3)$. Действительно, если нарушается это условие, то $w_2 + \sum_{j=4}^{k_1} w_j > \lfloor\Delta/2\rfloor$ и $w_1 + w_3 + \sum_{j=k_1+1}^{k_3} w_j > \lfloor\Delta/2\rfloor$, а значит, сумма всех w_j больше Δ, что противоречит условию леммы. Таким образом, укладка правильна. Лемма 1 доказана.

Замечание. Отметим, что лемма 1 остаётся верной, если длины

некоторых из интервалов I_1, I_2, I_3 равны 0 (другими словами, если их просто нет в начальной укладке).

Теперь можно доказать основной результат этой статьи.

Теорема 1. *Пусть $G = (V, E)$ — взвешенный унициклический граф. Тогда $\mu'(G) \leqslant \lfloor 3\Delta/2 \rfloor$, где Δ — взвешенная степень графа G.*

Доказательство. Усилим требование правильности раскраски условием: ни один мультицвет не лежит полностью в отрезке $[\lfloor \Delta/2 \rfloor + 1, \Delta - 1]$. Другими словами, построим такую мультираскраску рёбер, при которой мультицвета при каждой вершине будут правильно уложены в отрезок $I = [0, \lfloor 3\Delta/2 \rfloor]$.

Обозначим единственный цикл графа G через C. Сначала раскрасим рёбра цикла. Если цикл чётный, то он разбивается на два паросочетания P_1 и P_2. Красим рёбра из P_1 мультицветами подходящей длины с левым концом 0, а рёбра из P_2 — мультицветами с правым концом $\lfloor 3\Delta/2 \rfloor$. Нетрудно убедиться, что такая раскраска правильная в указанном выше усиленном смысле. Если цикл нечётный, то выберем в нём ребро e максимального веса. Оставшийся путь разбивается на два паросочетания P_1 и P_2. Красим рёбра из P_1 мультицветами подходящей длины с левым концом 0, а рёбра из P_2 — мультицветами с правым концом $\lfloor 3\Delta/2 \rfloor$. Раскрасим ребро e мультицветом длины $w(e)$ с правым концом Δ. Покажем, что полученная раскраска правильна (в усиленном смысле). Обозначим через e_1 и e_2 соседей ребра e из паросочетаний P_1 и P_2 соответственно. Поскольку $w(e) + w(e_1) \leqslant \Delta$, мультицвета рёбер e и e_1 не пересекаются по внутренним точкам. Если мультицвета рёбер e и e_2 пересекаются по внутренним точкам, то $w(e) \geqslant w(e_2) \geqslant \lfloor \Delta/2 \rfloor + 1$. Поскольку $w(e) + w(e_2) \leqslant \Delta$, этого быть не может. Таким образом, раскраска цикла C правильна. Продолжим её на весь остальной граф.

Рассмотрим дерево T_v, где v — некоторая вершина цикла C. При вершине v предраскрашены два ребра, причём их мультицвета правильно уложены в отрезок I и хотя бы один из них имеет левый конец 0 или правый конец $\lfloor 3\Delta/2 \rfloor$. Таким образом, по лемме 1 существует мультираскраска остальных рёбер из $E(v)$, правильная в усиленном смысле. Двигаясь по дереву T_v от вершины v к листьям, на каждом шаге имеем одно правильно предраскрашенное ребро при текущей вершине, что позволяет каждый раз применять лемму 1. Аналогичным образом красятся рёбра остальных деревьев T_v. Теорема 1 доказана.

Благодарность. Автор благодарит рецензента за существенное упрощение доказательства леммы 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Визинг В. Г.** О мультираскраске вершин взвешенных графов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 2007. — Т. 14, № 4. — С. 17–26.
2. **Визинг В. Г.** О мультираскраске инциденторов взвешенного неориентированного мультиграфа // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2012. — Т. 19, № 4. — С. 35–47.
   Vizing V. G. Multicoloring the incidentors of a weighted undirected multigraph // J. Appl. Industr. Math. — 2012. — Vol. 6, N 4. — P. 514—521.
3. **Shannon C. E.** A theorem on coloring the lines of a network // J. Math. Phys. — 1949. — Vol. 28. — P. 148–151.
4. **Woeginger G. J.** Open problems in the theory of scheduling // Bull. EATCS. — 2002. — N 76. — P. 67–83.

Пяткин Артём Валерьевич,
e-mail: artem@math.nsc.ru

Статья поступила
13 июня 2013 г.

Переработанный вариант —
24 июля 2013 г.