ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Май—июнь 2014. Том 21, № 3. С. 4–10

УДК 519.866.2

# ОБ ИСЧИСЛЕНИИ РЕНТНЫХ ОЦЕНОК *)

*В. А. Булавский, Н. В. Шестакова*

**Аннотация.** Предложены балансовая модель для исчисления рентных оценок земли и её модификации, рассмотрен вопрос о существовании и единственности решения. В подобных балансовых моделях можно определять рентные оценки, зависящие, главным образом, от природных свойств земли и от совокупности обстоятельств, в которых происходит её использование. Модели могут служить удобным инструментом для теоретического анализа проблем земельной ренты.

**Ключевые слова:** линейное программирование, балансовая модель, рентная оценка земли, цена.

## Введение

Исторически теория ренты развивалась как теория земельной ренты. В современных условиях проведение оценки сельскохозяйственных угодий на основе ренты часто связывается с целями налогообложения и обслуживания оборота земель в разных его проявлениях. Однако прежде всего рентное регулирование является важнейшей составляющей экономических отношений в сельском хозяйстве. В его сферу входят стимулирование рационального использования земель, выравнивание экономических условий хозяйствования в разных природно-климатических условиях, что связано с эффективностью сельскохозяйственного производства. Это определяет интерес к разработке экономико-математических моделей как для теоретического анализа формирования и динамики ренты, так и для целей прикладного характера.

Двойственные оценки, которые получают ограничения на землю в линейно-программных моделях оптимизации размещения сельскохозяйственного производства, по своему экономическому смыслу имеют рентный характер. Анализ таких оценок в многопродуктовых моделях распределительного типа, где присутствует только один ограниченный ресурс — земля, привёл к новым качественным выводам, в том числе относительно

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда (проект 13–02–00226–а).

взаимосвязи земельной ренты и цен на продукцию. Теоретические выводы, полученные из анализа линейно-программных задач, использованы при разработке балансовых моделей для исчисления оценок продукции, земельных и других ресурсов. В них реализована идея построения аналога двойственной задачи линейного программирования для некоторой фиксированной производственной программы. В частности, это может быть реально сложившееся размещение сельскохозяйственного производства, если оно рационально в общих чертах.

## 1. Базовая модель.

Базовая балансовая модель для расчёта рентных оценок земли формулируется следующим образом. Рассматривается экономическая система, состоящая из $n$ самостоятельных подсистем, называемых в дальнейшем *объектами*. Предполагается, что $n \geqslant 2$. В экономической системе производится $m$ видов сельскохозяйственных продуктов (товаров), причём это производство разнесено по объектам: объём производства товара $k$ в объекте $i$ равен $d_{ik}$, а общие объёмы производства в системе задаются формулами

$$D_k = \sum_{i=1}^{n} d_{ik}. \tag{1}$$

Предполагается, что $D_k \neq 0$ при всех $k$. Обозначим через $P_i > 0$ площадь используемых в сельском хозяйстве земельных ресурсов в объекте $i$, а через $\delta_{ki}$ — её долю, используемую для производства товара $k$. Пусть каким-то образом (вне рамок модели) назначена общая сумма $R$, оценивающая всю площадь в экономической системе. Идёт ли речь о рентных оценках, кадастровой оценке земли, налогообложении или ещё о чём-то, в рамках рассматриваемой модели не имеет значения. Целью модели является разнести эту общую сумму по отдельным объектам, составляющим экономическую систему, учитывая исключительно объёмы и размещение производства продукции и затраты главного производственного фактора — земли.

Обозначим через $R_i,\ i = 1, \ldots, n$, часть общей суммы $R$, отнесённую к объекту $i$, так что

$$\sum_{i=1}^{n} R_i = R. \tag{2}$$

Распределим заданную сумму $R$ между продуктами в соответствии с долей земли, используемой для их производства. В объекте $i$ из суммы $R_i$

на производство товара $k$ приходится $\delta_{ki}R_i$, а на производство всего товара $k$ —

$$\sum_{j=1}^{n} \delta_{kj}R_j = M_k, \quad k = 1, \ldots, m. \tag{3}$$

Выразим оценку земли в $i$-м объекте $R_i$ через оценки производящихся в нём продуктов. Так как в объекте $i$ производится доля $d_{ik}/D_k$ товара $k$, из суммы $M_k$ на объект $i$ приходится её часть, равная $M_k(d_{ik}/D_k)$, и если просуммировать по всем видам продукции, то с учётом (3) получим балансовое уравнение

$$R_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}R_j, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

где

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \delta_{kj}d_{ik}/D_k, \quad i = 1, \ldots, n, \ j = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Для дальнейшего анализа сделаем два достаточно естественных предположения. Во-первых, рассматриваемая экономическая система не распадается в том смысле, что объекты и товары нельзя разделить на непересекающиеся группы так, чтобы в первой группе объектов производились только товары первой группы, а во второй группе объектов — только товары второй группы. При нарушении этого условия сколько-нибудь обоснованный раздел общей суммы $R$ между двумя группами объектов возможен лишь за рамками модели с привлечением какой-либо дополнительной информации. Во-вторых, неотрицательные числа $\delta_{kj}$ и $d_{jk}$ обращаются в нуль только одновременно (продукт не может быть произведён без использования земли и затраты земли сопряжены с фактическим производством продукции). В сделанных предположениях строго положительные числа в квадратной неотрицательной матрице $A$ порядка $n$ с элементами (5) расположены симметрично и, следовательно, путём одинаковой перестановки строк и столбцов матрица $A$ не может быть приведена к блочно-треугольной форме. Значит, матрица $A$ неприводима.

**Теорема 1.** *Система* (4) *при условии* (2) *однозначно определяет строго положительные оценки* $R_1, R_2, \ldots, R_n$.

Доказательство. Так как матрица $A$ неотрицательна и неприводима, согласно теореме Перрона — Фробениуса у неё имеется простое положительное собственное число, равное её спектральному радиусу. Этому числу соответствуют строго положительные правый и левый собственные векторы. Ввиду (1), (5) и определения $\delta_{kj}$ получаем

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \delta_{kj} = 1, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Поскольку для спектрального радиуса неотрицательной матрицы $A$ верны оценки

$$\min_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \leqslant \rho(A) \leqslant \max_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij},$$

имеет место равенство $\rho(A) = 1$, строка $e^T = (1, 1, \ldots, 1)$ служит левым собственным вектором, а определяемый однозначно с точностью до множителя правый собственный вектор даёт решение системы (4). Однозначность его нормировки обеспечивается условием (2). Таким образом, модель (2), (4) однозначно разносит общую сумму $R$ по объектам со строго положительными долями $R_1, R_2, \ldots, R_n$. Если речь идёт о рентных оценках земли (или о её кадастровой оценке), то обычно используются величины, отнесённые к единице площади, т. е. величины $r_i = R_i/P_i$.

При изменении значения исходного параметра $R$ соотношения между оценками $r_i$ не изменяются. Их можно трактовать как качественные оценки земли, показывающие её сравнительную производительную способность в объектах при заданных условиях. Критерием является общая продуктивность земли. Существующие методики земельнооценочных работ основаны на сравнительной оценке по урожайности одной (ведущей) сельскохозяйственной культуры или некоторой их совокупности. В последнем случае возникает много проблем, связанных с разной требовательностью культур к почвенно-климатическим условиям и с необходимостью перевода продукции в условные зерновые или кормовые единицы. Выделение основных культур также неоднозначно.

Реальное производство продукции сопряжено с затратами не только главного производственного фактора — земли, оценку которой производим, но и с затратами других производственных факторов. Объёмы этих затрат исчисляются в денежном выражении. Можно указать два мотива учёта дополнительных затрат в виде поправок к оценкам $R_i$ или $r_i$. Во-первых, затраты дополнительных факторов (при их рациональном использовании) повышают производительность земли и тем самым повышают полученную в базовой модели оценку $R_i$. Во-вторых, эти затраты могут быть вынужденными или обусловленными какими-либо свойствами земли в данном объекте. Оба этих обстоятельства служат стимулом для снижения оценки $R_i$. Однако баланс (2) должен сохраняться, так что на самом деле поправки будут для некоторых объектов отрицательными, а для некоторых — положительными. Используемая для их определения балансовая модель имеет ту же матрицу $A$, что и система (4). В сделанных выше предположениях относительно матрицы поправки определяются однозначно [1].

## 2. Обобщённая модель.

Для прикладных целей используется балансовая модель, объединяющая базовую модель с моделью для расчёта поправок, что позволяет однозначно определять как рентные оценки земли $v_i$, $i = 1, \ldots, n$, так и цены на производимую продукцию $u_k$, $k = 1, \ldots, m$.

Обозначим через $C_i$ общие затраты на дополнительные факторы в объекте $i = 1, \ldots, n$, через $C_k$ — общие затраты на производство всего продукта $k = 1, \ldots, m$, а через $C$ — общие затраты в целом по системе объектов: $\sum\limits_{i=1}^{n} C_i = \sum\limits_{k=1}^{m} C_k = C$, $C + R = U$, где $U$ — общий уровень цен.

Модель формулируется следующим образом.

$$\sum_{k=1}^{m} d_{ik} u_k - P_i v_i = C_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

$$D_k u_k - \sum_{i=1}^{n} p_{ik} v_i = C_k, \quad k = 1, \ldots, m, \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_i v_i = R. \tag{8}$$

Здесь $p_{ik}$ — площадь земли, используемая в объекте $i$ для производства $k$-го продукта.

В этой модели в явном виде представлены финансовые балансы в территориальном (6) и продуктовом (7) разрезах. Уравнение (8) обеспечивает соблюдение баланса, аналогичного балансу (2) в базовой модели, и устанавливает связь финансовых показателей рассматриваемой и внешней к ней экономических систем. Оно может быть записано в другом, эквивалентном, виде, если в качестве параметра выбирается общий уровень цен $U$: $\sum\limits_{k=1}^{m} D_k u_k = U$.

В соответствии с условием (7) цена на $k$-й продукт определяется по такой же формуле, как и в двойственной задаче к линейно-программной модели оптимизации размещения сельскохозяйственного производства, о которой шла речь выше: $u_k = \overline{s}_k + \overline{v}_k$, где $\overline{s}_k$ — средние полные затраты, а $\overline{v}_k$ — неизвестная средняя рентная оценка в расчёте на единицу продукции. Таким образом, цены на продукцию и рентные оценки земли в модели взаимосвязаны, взаимозависимы и находятся совместно в одном расчёте.

Получаемые в результате решения задачи (6)–(8) рентные оценки земли в территориальных объектах $v_i$ могут быть представлены в следующем виде:

$$v_i = t_i + \Delta_i, \quad t_i > 0.$$

Первые слагаемые $t_i$ совпадают с оценками $r_i$, получаемыми по базовой модели, т. е. зависят только от продуктивности земель. Вторые слагаемые $\Delta_i$ — это поправки, связанные с зависимостью эффективности затрат в сельском хозяйстве от природно-климатических условий, как и для системы (4). Они, как указано выше, могут принимать и положительные, и отрицательные значения. Такое представление рентной оценки позволяет целенаправленно анализировать факторы, влияющие на её составляющие, с целью уменьшения внутрисистемного перераспределения средств для элиминирования различий в экономических условиях производства между объектами с точки зрения возмещения затрат и получения нормальной прибыли. Поскольку значения слагаемых $t_i$ строго положительны, можно определить минимальное значение общего уровня ренты $R$, а значит, и минимальное значение общего уровня цен $U$, при которых становятся возможными бездотационные финансовые отношения, т. е. все оценки $v_i$ будут неотрицательными, из следующего соотношения:

$$R^{\min} = R \max_{i:\Delta_i<0} \frac{|\Delta_i|}{t_i}.$$

Оценка земли в том объекте, на котором реализовался максимум, будет нулевой, а в остальных — положительной.

Учитывая, что поправки $\Delta_i$ остаются неизменными при любых значениях $R$, а $t_i$ связаны с $R$ прямой пропорциональной зависимостью, легко находятся новые значения оценок $v_i$:

$$\widehat{v}_i = \Delta_i + \frac{R^{\min}}{R} t_i.$$

Подобным образом можно найти новые значения цен на продукцию $\widehat{u}_k$ [2].

Цены и рентные оценки экономически поддерживают заданное размещение производства, в то же время последующий анализ на основе найденных показателей позволяет наметить в нём рациональные сдвиги.

Сельское хозяйство ввиду своей специфики, в частности, неэластичности предложения земли и малой эластичности спроса на его продукцию, является той отраслью, в которой во всех развитых странах проводится государственное регулирование цен и доходов. Для этих целей могут служить расчётные стоимостные показатели — цены на продукцию, оценки земли и других ресурсов. Поэтому модели для их исчисления востребованы и в условиях развития рыночных отношений.

Представленные модели имеют целый ряд модификаций и могут служить удобным аналитическим инструментом для теоретического анализа проблем земельной ренты.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Булавский В. А., Вирченко М. И., Шестакова Н. В.** Модель дифференциации рентных оценок // Сиб. журн. индустр. математики. — 2007. — Т. 10, № 3. — С. 29–36.
2. **Булавский В. А., Вирченко М. И., Шестакова Н. В.** Модель для расчёта экономических показателей // Сиб. вестн. с.–х. науки. — 2010. — № 8. — С. 89–95.

*Булавский Владимир Александрович*,
e-mail: vbulavsky@hse.ru
*Шестакова Надежда Васильевна*,
e-mail: nadine@math.nsc.ru

Статья поступила
19 августа 2013 г.