ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Май—июнь 2014. Том 21, № 3. С. 53–63

УДК 519.85

ИССЛЕДОВАНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ И ПОСТРОЕНИЕ РАЗДЕЛЯЮЩЕЙ ГИПЕРПЛОСКОСТИ *)

О. В. Муравьёва

Аннотация. Рассматриваются методы матричной коррекции или коррекции всех параметров систем линейных уравнений и неравенств. Показано, что задача матричной коррекции несовместной системы линейных неравенств с условием неотрицательности сводится к задаче линейного программирования. Для решения системы линейных неравенств определяется мера устойчивости как минимальное изменение параметров, при котором данное решение не удовлетворяет системе. Рассматривается задача определения решения, наиболее устойчивого к изменению параметров. Полученные результаты применяются для построения разделяющей гиперплоскости в пространстве признаков, наиболее устойчивой к изменению признаков объектов.

Ключевые слова: устойчивость системы линейных неравенств, матричная коррекция, разделяющая гиперплоскость.

Введение

Системы линейных уравнений и неравенств с неточными данными рассматривались многими авторами. В [13] рассматривается разрешимость систем линейных уравнений и неравенств с интервальными данными, а также приведён обзор публикаций, посвящённых применению методов интервального анализа и теории нечётких множеств к анализу линейных систем. В [15] предлагаются методы нахождения так называемых робастно допустимых решений задачи линейного программирования, удовлетворяющих ограничениям при любой реализации параметров из множества неопределённости.

В настоящей работе рассматриваются методы матричной коррекции, основанные на том, что исходной неразрешимой задаче (в частности,

*) Исследование выполнено в рамках гос. задания Минобрнауки, № гос. рег. 01201153724.

системе линейных неравенств, не обладающей заданным свойством)

$$Ax \leqslant b \quad \text{или} \quad Ax \leqslant b,\ x \geqslant 0, \quad \text{где } A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ b \in \mathbb{R}^m,\ x \in \mathbb{R}^n,$$

ставится в соответствие класс скорректированных задач

$$(A+H)x \leqslant b+h \quad \text{или} \quad (A+H)x \leqslant b+h,\ x \geqslant 0,$$

описывающий независимое варьирование всех исходных данных системы. Среди скорректированных задач требуется найти задачу, обладающую данным свойством (как правило, совместную) и «ближайшую» в некотором смысле к исходной. В качестве критерия близости исходной и скорректированной задач используется одна из норм матрицы коррекции:

$$\|H\|_\infty = \max_{i,j} |h_{ij}|, \quad \|H\|_e = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} h_{ij}^2}, \quad \|H\|_2 = \max_{\|e\|_2=2} \|He\|_2.$$

Получим следующую формализацию задач минимальной матричной коррекции несовместных систем линейных неравенств:

$$\inf_{x,H,h}\{\|[-h,H]\|\colon (A+H)x \leqslant b+h\},$$

$$\inf_{x,H,h}\{\|[-h,H]\|\colon (A+H)x \leqslant b+h,\ x \geqslant 0\}.$$

Развитие методов матричной коррекции несовместных систем линейных уравнений и неравенств началось в восьмидесятые годы прошлого века. В одной из основных работ [10] рассматривается матричная коррекция несобственных задач линейного программирования. В [3, 4, 7, 8] рассматривается минимальная коррекция несовместных систем линейных уравнений и несобственных задач линейного программирования, в том числе с различными ограничениями на пространство параметров. В частности, в [3, 10] для евклидовой и спектральной норм соответственно доказано, что решение задачи матричной коррекции несовместной системы линейных уравнений сводится к задаче квадратичного программирования и может быть явно выражено через собственные значения и собственные векторы расширенной матрицы параметров.

В нашей работе используется критерий вида матричной нормы $\|H\|_\infty$, для которого многие задачи коррекции можно свести к задачам линейного программирования. Из публикаций по методам коррекции с таким критерием отметим работы [1, 2, 5, 6, 9], в которых исследована матричная коррекция несобственных задач линейного программирования в канонической форме и несовместных систем линейных уравнений.

Далее рассматривается коррекция несовместной системы линейных неравенств с условием неотрицательности и устойчивость решения совместной системы линейных неравенств. В разд. 3 методы матричной коррекции применяются для построения оптимальной разделяющей гиперплоскости.

1. Матричная коррекция несовместной системы линейных неравенств с условием неотрицательности

Дана несовместная система линейных неравенств с условием неотрицательности

$$Ax \leqslant b,\ x \geqslant 0, \quad A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ b \in \mathbb{R}^m,\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Сформулируем задачу минимальной коррекции всех параметров, в результате которой система становится совместной:

$$r(A,b) = \inf_{h,H,x}\{\|[-h,H]\|_\infty \colon (A+H)x \leqslant b+h,\ x \geqslant 0\}.$$

Величину $r(A,b)$ будем называть *радиусом несовместности системы* $Ax \leqslant b$, $x \geqslant 0$. Покажем, что задача коррекции сводится к задаче линейного программирования.

Лемма 1 [12]. *Система $Hx = d$ при заданных $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, $d \in \mathbb{R}^m$ имеет решение с минимальной матричной нормой*

$$\|H^*\|_\infty = \frac{\|d\|_\infty}{\|x\|_1} = \frac{\max\limits_i |d_i|}{\sum\limits_j |x_j|}, \quad H^* = \frac{1}{\sum\limits_j |x_j|}\, d\cdot(\operatorname{sign} x_1, \ldots, \operatorname{sign} x_n).$$

Теорема 1. *Решение задачи минимальной матричной коррекции несовместной системы линейных неравенств $Ax \leqslant b$ при условии неотрицательности $x \geqslant 0$ определяется формулами*

$$\inf_{h,H,x}\{\|[-h,H]\|_\infty \colon (A+H)x \leqslant b+h,\ x \geqslant 0\} = u^*,$$

$$x^* = \frac{1}{v^*}z^*, \qquad y^* = \frac{1}{v^*}w^*,$$

$$[-h^*,H^*] = \frac{1}{1+\sum\limits_j x_j^*}\left([b,-A]\begin{pmatrix}1\\ x^*\end{pmatrix} - y^*\right)(1, \operatorname{sign} x_1^*, \ldots, \operatorname{sign} x_n^*),$$

где $u^*, v^* \in \mathbb{R}$, $z^* \in \mathbb{R}^n$, $w^* \in \mathbb{R}^m$ — решение задачи линейного программирования

$$\begin{gathered}\min u,\\ u \geqslant (a_i, z) - vb_i + w_i, \quad i = 1, \ldots, m,\\ u \geqslant -(a_i, z) + vb_i - w_i, \quad i = 1, \ldots, m,\\ \sum_j z_j + v = 1, \quad v, z, w \geqslant 0.\end{gathered}$$

Доказательство. Перепишем задачу в виде

$$\inf_{x,y\geqslant 0;\, h,\, H} \left\{ \|[-h, H]\|_\infty \colon [-h, H] \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = -[-b, A] \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} - y \right\}$$

и применим лемму 1. Получим выражение для оптимальной матрицы:

$$[-h^*, H^*] = \frac{1}{1 + \sum\limits_j x_j} \left(-[-b, A] \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} - y \right) (1, \operatorname{sign} x_1, \ldots, \operatorname{sign} x_n),$$

а задача определения радиуса несовместности примет вид

$$\inf_{x,y\geqslant 0} \frac{\max\limits_i \left| \left(-[-b, A](1, x)^T - y \right)_i \right|}{\sum\limits_j x_j + 1} = \inf_{x,y\geqslant 0} \max_i \frac{|(a_i, x) - b_i + y_i|}{\sum\limits_j x_j + 1}.$$

Последняя минимаксная задача стандартным образом сводится к задаче линейного программирования. Введём новые переменные $v = \frac{1}{\sum\limits_j x_j + 1}$, $z = (z_1, \ldots, z_n)$, $z = vx$. Тогда $v\big(\sum\limits_j x_j + 1\big) = 1$ и $\sum\limits_j z_j + v = 1$. Обозначим $w = vy \in \mathbb{R}^m$, целевая функция $\frac{|(a_i,x) - b_i + y_i|}{\sum\limits_j |x_j| + 1}$ примет вид $|(a_i, z) - vb_i + w_i|$. Осталось ввести скалярную переменную $u = \max\limits_i |(a_i, z) - vb_i + w_i|$. Теорема 1 доказана.

2. Устойчивость решений системы линейных неравенств

Дана совместная система линейных неравенств $Ax \leqslant b$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$.

Определим меру устойчивости решения x^0 как величину минимального изменения параметров, в результате которого x^0 не является решением системы:

$$\Phi(x^0) = \inf_{H,h} \{ \|[-h, H]\|_\infty \colon\ (A + H)x^0 \nleqslant b + h \}.$$

Очевидным образом выполняется декомпозиция по строкам матрицы:

$$\Phi(x) = \min_i \Phi_i(x), \quad \Phi_i(x) = \min_{\Delta a,\, \Delta b} \{\|[-\Delta b, \Delta a]\|_\infty\colon (a_i + \Delta a)x = b_i + \Delta b\}.$$

Как показано в [11], решение задачи коррекции одного неравенства имеет вид

$$\min_{\Delta a, \Delta b} \{\|[-\Delta b, \Delta a]\|_\infty\colon (a + \Delta a)x = b + \Delta b\} = \frac{|b_i - (a_i, x)|}{\sum\limits_j |x_j| + 1}.$$

Тогда мера устойчивости фиксированного решения x^0 равна

$$\Phi(x^0) = \inf_{H,h} \{\|[-h, H]\|_\infty\colon\ (A + H)x^0 \nleqslant b + h\} = \min_i \frac{b_i - (a_i, x)}{\sum\limits_j |x_j| + 1}.$$

Далее найдём наиболее устойчивое решение системы

$$\Phi(x^*) = \sup_{x \in X} \Phi(x) = \sup_{x \in X} \min_i \frac{b_i - (a_i, x)}{\sum\limits_j |x_j| + 1}.$$

Теорема 2 [11]. *Решение системы линейных неравенств, наиболее устойчивое к изменению параметров, определяется формулами*

$$\sup_{x\colon Ax \leqslant b} \inf_{H,h} \{\|[-h, H]\|_\infty\colon (A + H)x \nleqslant b + h\} = u^*, \quad x^* = \frac{1}{t^*} s^*,$$

где $u^*, t^* \in \mathbb{R}$, $s^*, z^* \in \mathbb{R}^n$ *— решение задачи линейного программирования:*

$$\begin{gathered} \max u, \\ u \leqslant tb_i - (a_i, s), \quad i = 1, \ldots, m, \\ -z_j \leqslant s_j \leqslant z_j, \quad j = 1, \ldots, n, \\ \sum_j z_j + t = 1, \quad u, t \geqslant 0. \end{gathered}$$

Для системы линейных неравенств с условием неотрицательности задача определения наиболее устойчивого по параметрам решения также сводится к задаче линейного программирования.

Теорема 3. *Решение совместной системы $Ax \leqslant b$, $x \geqslant 0$, наиболее устойчивое к изменению параметров, определяется формулами*

$$\sup_{x\colon Ax\leqslant b, x\geqslant 0} \inf_{H,h} \{\|[-h,H]\|_\infty\colon (A+H)x \nleqslant b+h\} = u^*, \quad x^* = \frac{1}{t^*} z^*,$$

где $u^*, t^* \in \mathbb{R}$, $z^* \in \mathbb{R}^n$ — решение задачи линейного программирования:

$$\max u,$$
$$u \leqslant tb_i - (a_i, z), \quad i = 1, \ldots, m,$$
$$\sum_j z_j + t = 1, \quad u, z, t \geqslant 0.$$

Доказательство. Приведённая выше формула для определения меры устойчивости фиксированного решения x справедлива для любого решения системы линейных неравенств, в том числе и неотрицательного:

$$\Phi(x^0) = \inf_{H,h} \{\|[-h,H]\|_\infty\colon\ x^0 \text{ не является решением } (A+H)x \leqslant b+h\} = \min_i \frac{b_i - (a_i, x)}{\sum\limits_j x_j + 1}.$$

Требуется решить задачу

$$\Phi(x^*) = \sup_{x\colon Ax\leqslant b,\ x\geqslant 0} \min_i \frac{b_i - (a_i, x)}{\sum\limits_j x_j + 1}.$$

Введём новые переменные $t = \frac{1}{\sum\limits_j x_j + 1}$, $z = (z_1, \ldots, z_n)$, $z = tx$. Тогда $\sum\limits_j z_j + t = 1$. Целевая функция $\frac{b_i - (a_i,x)}{\sum\limits_j x_j + 1}$ примет вид $tb_i - (a_i, z)$. Осталось ввести скалярную переменную $u = \min\limits_i (tb_i - (a_i, z))$. Теорема 3 доказана.

3. Построение разделяющей гиперплоскости, устойчивой к изменению признаков объектов

Пусть даны два конечных множества точек в пространстве $\mathbb{R}^n$. Для этой пары множеств рассмотрим свойство линейной разделимости, т. е. существования линейной функции, принимающей значения разных знаков на объектах разных множеств.

Будем описывать эту задачу в терминах задачи распознавания (классификации). Точки будем называть объектами, координаты точек — признаками. Множество всех объектов разбито на два класса K_1 и K_2. Класс K_1 представлен объектами с векторами признаков $x^1, \dots, x^l$, K_2 — выборкой $x^{l+1}, \dots, x^m$. Требуется построить гиперплоскость, разделяющую объекты разных классов.

Разделяющая функция имеет вид $F(x) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n - b = (a, x) - b$. Если $x \in K_1$, то $F(x) \leqslant 0$, и $F(x) \geqslant 0$, если $x \in K_2$.

Пусть $X = \begin{bmatrix} x^1 & \dots & x^l & -x^{l+1} & \dots & -x^m \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$ — матрица параметров модели (информационная матрица), $(b, \dots, b, -b, \dots, -b)^T = bp$ — вектор, где $p = (1, \dots, 1, -1, \dots, -1)^T \in \mathbb{R}^m$.

Имеем систему m линейных неравенств относительно $n+1$ переменных a, b

$$\begin{cases} (a, x^i) \leqslant b, & i = 1, \dots, l, \\ (a, x^i) \geqslant b, & i = l+1, \dots, m, \end{cases} \qquad \text{или} \qquad Xa \leqslant bp.$$

Предположим, что эта система совместна и имеет несколько решений. Иначе говоря, объекты разных классов линейно разделимы, причём существует разделяющая гиперплоскость, не проходящая через точки обучающей выборки.

Одним из принципов выбора среди нескольких разделяющих гиперплоскостей оптимальной является максимизация расстояния (евклидова) от представителей классов до разделяющей гиперплоскости. В методе опорных векторов [14] строится разделяющая полоса наибольшей ширины. Разделяющая полоса определяется парой параллельных гиперплоскостей $L_1 : F(x) = (w, x) - w_0 = -1$ и $L_2 : F(x) = (w, x) - w_0 = 1$ таких, что

$$\begin{cases} F(x^i) \leqslant -1, & i = 1, \dots, l, \\ F(x^i) \geqslant 1, & i = l+1, \dots, m. \end{cases}$$

Ширина такой полосы равна $2/\|w\|$. В качестве разделяющей гиперплоскости выбирается $L : F(x) = (w, x) - w_0 = 0$. Построение решающего правила сводится к решению задачи квадратичного программирования:

$$\|w\|_2^2 \to \min_{w_0, w},$$
$$(w, x^i) - w_0 \leqslant -1, \quad i = 1, \dots, l,$$
$$(w, x^i) - w_0 \geqslant 1, \quad i = l+1, \dots, m.$$

Используем для выбора оптимальной разделяющей гиперплоскости методы матричной коррекции систем линейных уравнений и неравенств.

Рассмотрим, как изменяется свойство разделимости при изменении параметров задачи (информационной матрицы X). Предельное изменение любого параметра (элемента матрицы X), при котором функция остаётся разделяющей, назовём *радиусом устойчивости* данной гиперплоскости:

$$R(a,b) = \inf_H \{\|H\|_\infty \colon (X+H)a \nleqslant bp\}\,.$$

Очевидно, что

$$R(a,b) = \min_i \min_{h_i} \left\{\|h_i\|_\infty \colon (p_i x^i + h_i, a) = bp_i\right\},$$

где h_i — i-я строка матрицы H. Здесь существенно, что (a,b) является решением исходной системы, т. е. $Xa \leqslant bp$.

Применяя к каждой строке лемму 1, получим, что

$$\min_{h_i} \left\{\|h_i\|_\infty \colon (h_i, a) = bp_i - (p_i x^i, a)\right\} = \frac{|bp_i - (p_i x^i, a)|}{\sum\limits_j |a_j|}$$

и радиус устойчивости решения (a,b) равен

$$R(a,b) = \min_i \frac{bp_i - (p_i x^i, a)}{\sum\limits_j |a_j|}.$$

Здесь знак модуля в числителе можно убрать, так как для решений исходной системы линейных неравенств числитель является неотрицательной величиной.

Будем искать разделяющую гиперплоскость, для которой радиус устойчивости максимален:

$$\sup_{a,b\colon Xa\leqslant bp} R(a,b) = \sup_{a,b;\, Xa\leqslant bp} \inf_H \{\|H\|_\infty \colon (X+H)a \nleqslant bp\} = \\ = \sup_{a,b\colon Xa\leqslant bp} \min_i \frac{bp_i - (p_i x^i, a)}{\sum\limits_j |a_j|}.$$

Данная задача отличается от рассмотренной в предыдущем разделе фиксированным (некорректируемым) столбцом коэффициентов p. Введение дополнительного ограничения такого типа не изменяет класса задач, и задача определения наиболее устойчивой разделяющей гиперплоскости по минимаксному критерию также может быть сведена к задаче линейного программирования.

Теорема 4. *Если $u^*, t^* \in \mathbb{R}$, $s^*, r^* \in \mathbb{R}^n$ — решение задачи линейного программирования*

$$\max u,$$
$$0 \leqslant u \leqslant tp_i - (p_i x^i, s), \quad i = 1, \dots, m,$$
$$-r_j \leqslant s_j \leqslant r_j, \quad j = 1, \dots, n, \ \sum_j r_j = 1,$$

то $a^* = s^*$, $b^* = t^*$ — коэффициенты оптимальной разделяющей гиперплоскости, т. е. $R(a^*, b^*) = \sup\limits_{a,\, b\,:\, Xa \leqslant bp} R(a, b)$.

Доказательство. Введём новые переменные $c_j = |a_j|$, $j = 1, \dots, n$, с соответствующими ограничениями $-c_j \leqslant a_j \leqslant c_j$. Равенство $w = \frac{1}{\sum\limits_j c_j}$ влечёт $w \sum\limits_j c_j = 1$, что после введения ещё n переменных $r = (r_1, \dots, r_n)$, $r = wc$ даёт $\sum\limits_j r_j = 1$. Обозначим $s = wa \in \mathbb{R}^n$, $t = wb \in \mathbb{R}$, целевая функция $\frac{bp_i - (p_i x^i, a)}{\sum\limits_j |a_j|}$ примет вид $tp_i - (p_i x^i, s)$. Осталось ввести скалярную переменную $u = \min\limits_i (tp_i - (p_i x^i, s))$ и учесть, что (a, b) должно быть решением исходной системы $Xa \leqslant bp$, а значит, $Xs \leqslant tp$. Теорема 4 доказана.

Заключение

В статье предложен метод построения гиперплоскости, разделяющей два конечных множества точек в $\mathbb{R}^n$, основанный на теории матричной коррекции несовместных линейных систем. Задача вычисления коэффициентов гиперплоскости сведена к задаче линейного программирования относительно $2n + 2$ переменных, содержащей $2n + 2m + 1$ ограничений, где m — общее количество заданных точек.

Построенная таким образом гиперплоскость имеет наибольший радиус устойчивости среди всех разделяющих гиперплоскостей, т. е. для неё предельное изменение параметров (координат заданных точек), при котором свойство разделимости сохраняется, имеет наибольшее значение.

Показано, что в общем случае задача определения решения системы линейных неравенств, наиболее устойчивого к изменению любых параметров по минимаксному критерию, сводится к задаче линейного программирования.

Если исходная система линейных неравенств вместе с условием неотрицательности несовместна, строится задача минимальной коррекции параметров, в результате чего система становится совместной. В случае минимаксного критерия решение также можно найти методами линейного программирования.

Предложенный метод определения оптимальной разделяющей гиперплоскости можно обобщить на случай дополнительных ограничений: выделено точно заданное (не подлежащее коррекции) подмножество точек (фиксированные строки матрицы параметров) или помножество некорректируемых координат (фиксированные столбцы матрицы параметров).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Баркалова О. С.** Коррекция несобственных задач линейного программирования в канонической форме по минимаксному критерию // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 2012. — Т. 52, № 12. — С. 2178–2189.
2. **Ватолин А. А.** Коррекция расширенной матрицы несовместной системы линейных неравенств и уравнений // Математические методы оптимизации в экономико-математическом моделировании. — М.: Наука, 1991. — С. 240–249.
3. **Горелик В. А.** Матричная коррекция задачи линейного программирования с несовместной системой ограничений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 2001. — Т. 41, № 11. — С. 1697–1705.
4. **Горелик В. А., Ерохин В. И., Печёнкин Р. В.** Оптимальная матричная коррекция несовместных систем линейных алгебраических уравнений с блочными матрицами коэффициентов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. — 2005. — Т. 12, № 2. — С. 3–23.
5. **Горелик В. А., Ерохин В. И., Печёнкин Р. В.** Численные методы коррекции несобственных задач линейного программирования и структурных систем уравнений. — М.: ВЦ РАН, 2006. — 150 с.
6. **Горелик В. А., Ерохин В. И., Печёнкин Р. В.** Минимаксная матричная коррекция несовместных систем линейных алгебраических уравнений с блочными матрицами коэффициентов // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2006. — № 5. — С. 52–62.
7. **Горелик В. А., Золтоева И. А., Печёнкин Р. В.** Методы коррекции несовместных линейных систем с разреженными матрицами // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. — 2007. — Т. 14, № 2. — С. 62–75.
8. **Горелик В. А., Ибатуллин Р. Р.** Коррекция системы ограничений задачи линейного программирования с минимаксным критерием // Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамических процессов. — М.: ВЦ РАН, 2001. — С. 89–107.

9. **Горелик В. А., Муравьева О. В.** Необходимые и достаточные условия существования минимальной матрицы в задаче коррекции несовместной системы линейных уравнений // Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамических процессов. — М.: ВЦ РАН, 2000. — С. 14–20.
10. **Еремин И. И., Мазуров В. Д., Астафьев Н. Н.** Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. — М.: Наука, 1983. — 336 с.
11. **Муравьева О. В.** Возмущение и коррекция систем линейных неравенств // Управление большими системами. — 2010. — Вып. 28. — С. 40–57.
12. **Муравьева О. В.** Робастность и коррекция линейных моделей // Автоматика и телемеханика. — 2011. — № 3. — С. 98–112.
13. **Фидлер М., Недома Й., Рамик Я., Рон И., Циммерманн К.** Задачи линейной оптимизации с неточными данными. — М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2008. — 288 с.
14. **Cortes C., Vapnik V.** Support vector networks // Machine Learning. — 1995. — Vol. 20, N 3. — P. 273–297.
15. **Ben-Tal A., El Ghaoui L., Nemirovski A.** Robust optimization. — Princeton: Princeton Univ. Press, 2009. — 542 p.

Муравьёва Ольга Викторовна,
e-mail: muraveva@tidm.ru

Статья поступила
4 сентября 2013 г.

Переработанный вариант —
26 ноября 2013 г.