ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—август 2014. Том 21, № 4. С. 42–53

УДК 519.8

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ АНАЛИЗ ОДНОЙ ЗАДАЧИ МАРШРУТИЗАЦИИ [*)]

А. М. Истомин

Аннотация. Рассматривается задача маршрутизации транспортных средств, состоящая в нахождении совокупности последовательностей обхода клиентов с минимальными транспортными затратами при условии выполнения ограничений на максимальное число клиентов в каждом маршруте (вместимость транспортного средства). Для решения задачи известна эвристика ITP (Iterated Tour Partitioning). Эта эвристика является 2-приближённым алгоритмом в случае детерминированных входных данных и $(2-c)$-приближённым алгоритмом $(c>0)$ в случае, если координаты вершин графа являются независимыми случайными величинами с равномерным распределением на единичном квадрате. Оценка точности $2-c$ эвристики ITP обоснована для равномерного распределения в круге единичной площади.

Ключевые слова: задача маршрутизации транспортных средств, приближённый алгоритм, вероятностный анализ, гарантированная оценка точности.

Введение

В работе рассматривается евклидова задача маршрутизации транспортных средств, в которой клиенты $X_1,\dots,X_n$ и склад Y представлены точками на плоскости и для вычисления расстояния между ними используется евклидова метрика. Заявки всех клиентов единичны. Предполагается, что имеется неограниченное количество транспортных средств заданной вместимости $Q\in\mathbb{N}$. Маршрут каждого транспортного средства (*тур*) начинается и заканчивается на складе Y, при этом число клиентов, обслуживаемых одним туром, не должно превосходить Q. Стоимость решения полагается равной сумме длин всех туров. Необходимо

[*)] Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 12–01–00090а, 12–01–00093а, 12–01–33028а и 13–07–00070а), а также целевых программ СО РАН (интеграционный проект № 7Б) и Президиума РАН (проект № 227).

удовлетворить заявки всех клиентов, минимизируя при этом стоимость решения. В литературе эта задача известна под названием Euclidean Unit Demand Vehicle Routing Problem, и далее будем использовать для её обозначения аббревиатуру VRP.

В [7] показана NP-трудность задачи VRP и исследована возможность построения приближённого решения с гарантированной точностью. Предложена нижняя оценка оптимального решения, использующая естественную связь VRP с соответствующей задачей коммивояжёра (TSP). На основе этой оценки для случая фиксированного значения Q построена полиномиальная аппроксимационная схема. Другими словами, показано, что в этом случае для любого $\varepsilon > 0$ существует $(1+\varepsilon)$-приближённый полиномиальный алгоритм.

В той же статье для нахождения приближённого решения задачи VRP предложена эвристика ITP (Iterated Tour Partitioning), также демонстрирующая связь задач VRP и TSP. Данная эвристика получает на вход некоторое решение задачи коммивояжёра на графе с $n+1$ вершинами — n клиентов и депо задачи VRP. Решение задачи TSP подразбивается на участки, содержащие не более Q вершин, которые затем используются при построении маршрутов транспортных средств задачи VRP.

Стоит отметить, что и для задачи нескольких коммивояжёров (PSP), ещё одной классической проблемы, часто упоминаемой в одном контексте с TSP и VRP, решение задачи TSP может быть использовано для построения приближённого решения [2]. Ещё один пример использования задачи TSP для построения решения задачи маршрутизации (в широком смысле этого словосочетания) найден в [1]. В этой статье исследуется задача выбора простого циклического маршрута и плана загрузки транспортного средства таких, что максимизируется прибыль от купли и продажи загруженных товаров различных видов во всех заданных пунктах обхода. Предложены полиномиальные алгоритмы решения исходной задачи с гарантированной погрешностью для ряда типов загрузки.

В [3] рассмотрена вероятностная постановка задачи VRP, в которой веса рёбер (дуг) входного графа являются независимыми случайными величинами с общей функцией распределения. Предложен алгоритм нахождения приближённого решения и условия его асимптотической точности.

В [7] проводился вероятностный анализ VRP в предположении, что места размещения клиентов определяются случайно расположенными точками на плоскости и Q является функцией от числа клиентов n. Показано, что предложенная нижняя оценка асимптотически оптимальна в случае $Q = o(\sqrt{n})$ или $n = o(Q^2)$. Прямым следствием этого факта является асимптотическая оптимальность эвристики ITP в указанных случаях. В общем случае алгоритм ITP может приводить к решению, отличающемуся от оптимального в два раза.

В данной работе так же, как и в [6], рассматривается естественная вероятностная постановка, в которой точки $X_1, \ldots, X_n, Y$ соответствуют одинаково распределённым на плоскости случайным величинам с известным законом распределения.

В статье показано, что эвристика ITP с вероятностью 1 является $(2 - \widehat{c})$-приближённым алгоритмом решения задачи VRP ($\widehat{c} > 0$) в том случае, когда склад и клиенты являются независимыми случайными величинами с равномерным распределением на круге единичной площади, если число клиентов стремится к бесконечности. Было бы интересно распространить этот результат на ещё более широкий класс распределений, в том числе на распределения, носитель которых не является компактным множеством.

1. Предварительные сведения

В разделе приводится сводка результатов из [6] и вводятся определения и обозначения, необходимые для формулировки основных результатов.

Как уже сказано, рассматриваем граф, вершины $X_1, \ldots, X_n$ и Y которого являются точками евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$. Произвольную точку плоскости будем обозначать через $\overline{x}$.

Решением задачи VRP будем называть пару (K, V), где K — количество использованных транспортных средств, а $V = \big\{v_k = \big(Y, i_1^k, i_2^k, \ldots, i_{s^k}^k, Y\big) \mid k \in \{1, \ldots, K\}\big\}$ — набор соответствующих туров.

Пусть $c_{i,j}$ — расстояние между клиентами X_i и X_j, а $c_{Y,j}$ — расстояние между складом Y и клиентом X_j. Как отмечено ранее, расстояние между точками задаётся евклидовой метрикой на плоскости.

Пусть $R = \sum\limits_{i=1}^{n} 2c_{Y,i}/Q$ — *радиальная стоимость*, $c(\mathrm{TSP})$ — длина оптимального решения задачи TSP, $c(\mathrm{VRP})$ — стоимость оптимального решения задачи VRP.

Если не оговорено иное, то подразумевается, что входом задач VRP и TSP является один и тот же полный граф с вершинами $Y, X_1, \ldots, X_n$. Будем обозначать через ITP(γ) эвристику ITP, которая требует на входе γ-оптимального решения TSP [7]. Пусть $c(\mathrm{VRP}^{\mathrm{ITP}(\gamma)})$ — стоимость решения задачи VRP, полученного при помощи эвристики ITP(γ). Можно говорить об алгоритме ITP(1) (далее — просто ITP), входом которого является точное решение TSP. Это точное решение может быть найдено, например, методом ветвей и границ. Кроме того, для задачи коммивояжёра в евклидовом пространстве существует PTAS [4], позволяющая для любого $\varepsilon > 0$ получить $(1+\varepsilon)$-точное решение. Сложность нахождения такого решения при фиксированном ε полиномиальна, хотя и весьма велика, что делает неэффективным применение PTAS на практике. Тем не менее для любого $\varepsilon > 0$ можно найти решение VRP с помощью эвристики $\mathrm{ITP}(1+\varepsilon)$ за полиномиальное время.

Следующая лемма устанавливает верхнюю оценку стоимости решения, полученного при помощи эвристики ITP.

Лемма 1 [6]. $c(\mathrm{VRP}^{\mathrm{ITP}}) \leqslant R + c(\mathrm{TSP})$.

Введём несколько обозначений, необходимых для описания нижней оценки оптимума VRP.

Пусть $v_k = \big(Y, i_1^k, i_2^k, \ldots, i_{s^k}^k, Y\big)$ — произвольный тур одного транспортного средства из решения VRP. Для любой пары клиентов i и j, лежащих в туре v_k, через l_{ij}^k обозначим длину пути от i к j, определённого туром v_k, который не проходит через Y. Если i или j не лежат в туре v_k, то полагаем $l_{ij}^k = 0$.

Пусть (K, V) — решение задачи VRP. Положим $d_i^k = 1$, если i лежит в туре $v_k \in V$, и $d_i^k = 0$ — в противном случае, для всех пар (k, i), $1 \leqslant k \leqslant K$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Обозначим

$$QC(K,V) = \sum_{k=1}^{K} \sum_{i,j \in \{1,\ldots,n\}} l_{ij}^k \frac{d_i^k d_j^k}{\left(\sum\limits_{t=1}^{n} d_t^k\right)^2}.$$

Определение 1. Пусть (K, V) — решение задачи VRP. Тур $v_k \in V$ будем называть *наполовину полным*, если он содержит по крайней мере $Q/2$ клиентов. Обозначим через A множество клиентов в наполовину полных турах. Будем говорить, что решение (K, V) *обладает свойством полноты*, если $|A| \geqslant n - Q/2$.

Лемма 2 [6]. *Существует оптимальное решение задачи* VRP, *обладающее свойством полноты.*

Обозначим через QC максимальное значение среди всех $QC(K, V)$ таких, что (K, V) — оптимальное решение задачи VRP, обладающее свойством полноты.

Следующая лемма даёт нижнюю оценку оптимума задачи VRP.

Лемма 3 [6]. $c(\mathrm{VRP}) \geqslant \max\{R + QC, c(\mathrm{TSP})\}$.

Исходя из оценок, приведённых в леммах 1 и 3, можем оценить точность решения, получаемого при использовании эвристики ITP.

Следствие 1 [6].

$$\frac{c(\mathrm{VRP}^{\mathrm{ITP}})}{c(\mathrm{VRP})} \leqslant \frac{R + c(\mathrm{TSP})}{\max\{R + QC, c(\mathrm{TSP})\}} \leqslant 2 - \frac{QC}{c(\mathrm{TSP})}.$$

Перейдём к вероятностному анализу задачи.

Пусть $Y, X_1, \ldots, X_n, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределённых точек плоскости, распределение которых имеет компактный носитель.

Через $\mathrm{VRP}^{\mathrm{ITP}}_{(n)}$ обозначим решение задачи VRP на входе с множеством клиентов $X_1, \ldots, X_n$ и складом Y, полученное с помощью эвристики ITP. Пусть $\mathrm{VRP}^{*}_{(n)}$ — оптимальное решение на этом входе.

Через $c(\mathrm{TSP}(X^{(n)}))$ обозначим оптимальное решение задачи TSP на входе с множеством клиентов $X_1, \ldots, X_n$.

Начнём с известного факта, приведённого в [5], который сформулируем в качестве следующей теоремы.

Теорема 1 [5]. *Пусть $f(\overline{x})$ — плотность абсолютно непрерывной части распределения. Существует константа $\beta > 0$, не зависящая от распределения X_i, такая, что*

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{c(\mathrm{TSP}(X^{(n)}))}{\sqrt{n}} = \beta \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(\overline{x})^{1/2}\, d\overline{x}\right) = 1.$$

Нахождение точного значения β является открытой проблемой, но в [5] показано, что $0.62 \leqslant \beta \leqslant 0.93$.

Следующая величина является характеристикой того, насколько плотно расположены точки $X_1, \ldots, X_n$.

Замечание 2. Через $G_n(c)$ будем обозначать количество точек среди $X_1, \ldots, X_n$, имеющих соседа на расстоянии не более $c/\sqrt{n}$.

Далее приведём результат, необходимый для оценки величины QC.

Лемма 4 [6]. *Пусть $p \in (0, 1]$ и $c(p) > 0$ таковы, что*

$$\lim_{n\to\infty} P(G_n(c(p)) \geqslant pn) = 0.$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(QC \geqslant c(p)\left(\frac{1}{6}-2p\right)\sqrt{n}\right) = 1.$

На основании теоремы 1, леммы 4 и следствия 1 получаем оценку точности решения задачи VRP, полученного с использованием эвристики ITP.

Следствие 1. *Пусть* $p \in (0,1]$ *и* $c(p) > 0$ *таковы, что*

$$\lim_{n\to\infty} P(G_n(c(p)) \geqslant np) = 0.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{c(VRP_{(n)}^{ITP})}{c(VRP_{(n)})} \leqslant 2 - c(p)\frac{\frac{1}{6}-2p}{\beta \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(\overline{x})^{1/2} d\overline{x}}\right) = 1.$$

Лемма 5 [6]. *Для любого* $p \in (0,1]$ *существует константа* $c(p) > 0$ *такая, что*

$$\lim_{n\to\infty} P(G_n(c(p)) \geqslant pn) = 0\ .$$

При этом в качестве $c(p)$ *можно выбрать любое число из промежутка* $\left(0, \frac{1}{3\sqrt{2}}\sqrt{p}\right]$.

Из леммы 1 и следствия 2 вытекает

Теорема 2 [6]. *Пусть* $Y, X_1, \ldots, X_n, \ldots$ *— последовательность независимых, одинаково распределённых точек плоскости, имеющих равномерное распределение на еденичном квадрате. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{c(VRP_{(n)}^{ITP})}{c(VRP_{(n)})} \leqslant 2 - \frac{\check{c}}{\beta}\right) = 1,$$

где $\check{c} = \max\limits_{0<p\leqslant 1} \left\{\frac{1}{3\sqrt{2}}\sqrt{p}\left(\frac{1}{6}-2p\right)\right\}$.

В разд. 2 доказано утверждение, аналогичное лемме 5, которое позволит на основании следствия 2 распространить результат теоремы 2 на равномерное распределение на круге единичной площади.

2. Равномерное распределение на круге единичной площади

Начнём с доказательства аналога леммы 5 для распределения в круге единичной площади.

Лемма 6. *Пусть $X_1, \dots, X_n, \dots$ — последовательность независимых случайных величин, имеющих равномерное распределение на круге единичной площади. Для любого $p \in (0,1]$ существует константа $c(p) > 0$ такая, что*

$$\lim_{n\to\infty} P(G_n(c(p)) \geqslant np) = 0,$$

при этом в качестве $c(p)$ можно выбрать любое число из промежутка $\left(0, \frac{2}{5\sqrt{21}}\sqrt{p}\right]$.

Доказательство. Обозначим через $\Omega = B(1/\sqrt{\pi})$ рассматриваемый круг. Пусть $f(\overline{x})$ — плотность распределения, равная единице внутри области Ω и нулю — вне. Зафиксируем $0 < p \leqslant 1$ и введём параметр $\alpha > 0$, значение которого определим позже.

Пусть заданы числа $\{n(1) = 1,\ n(k) = 5(k-1),\ k \geqslant 2\}$. Определим по ним величины $S_k = \sum\limits_{i=1}^{k} n(i) = 1 + \frac{5}{2}k(k-1),\ k = 1, 2, 3, \dots$ В целях упрощения доказательства предположим, что для некоторого K выполнено $S_K = \alpha pn$. Данное предположение не ограничивает общности, поскольку если это не так, можно взять K такое, что $S_K \leqslant \alpha pn \leqslant S_{K+1}$.

Построим сетку, покрывающую Ω так, что (i) Ω разбивается на K концентричных колец, (ii) центр каждого кольца совпадает с центром круга Ω, (iii) кольцо k имеет радиусы R_{k-1} и R_k (меньший и больший соответственно, они будут определены ниже, $R(0)$ считается равным нулю), (iv) каждое кольцо k разбито на $n(k)$ одинаковых секторов линиями, выходящими из центра круга Ω (рис. 1).

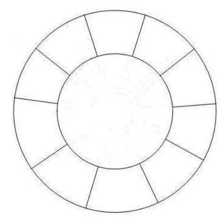

Рис. 1. Разбиение кольца

Мера всех секторов во всех кольцах относительно распределения с плотностью $f(\overline{x})$ одинакова. Это условие обеспечивается выбором подходящего набора радиусов $\{R_k \mid k = 1, \dots, K\}$. Соотношения для вычисления радиусов приведены далее.

Замечание 3. Поскольку мера всего множества Ω равна единице и Ω разбито на S_k секторов одинаковой меры, заключаем, что (a) мера каждого сектора равна $\frac{1}{S_K}$, (b) $\int\limits_{B(R_k)} f(\overline{x})\, d\overline{x} = \frac{S_k}{S_K}$, где $B(R_k)$ — замкнутый круг радиуса R_k с центром в центре Ω.

С учётом данного замечания и того, что для равномерного распределения на круге единичной площади функция плотности в нём тождественно равна единице, получаем

$$\frac{S_k}{\alpha p n} = \frac{S_k}{S_K} = \int\limits_{B(R_k)} f(\overline{x})\, d\overline{x} = \int\limits_{B(R_k)} d\overline{x} = \pi R_k^2,$$

$$R_k = \frac{\sqrt{S_k}}{\sqrt{\alpha\pi p n}} = \frac{\sqrt{1+\frac{5}{2}k(k-1)}}{\sqrt{\alpha\pi p n}}, \quad k = 1,\dots,K.$$

Рассмотрим произвольный сектор из разбиения Ω (рис. 2). Для дальнейшего анализа нам требуется оценить снизу минимум расстояния между противоположными сторонами по всем секторам разбиения, т. е. минимум расстояния между сторонами AB и DC, а также минимум расстояния между AD и BC.

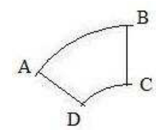

Рис. 2

Введём следующие обозначения:

$$\delta_k^1 = R_k - R_{k-1}, \quad k = 1,\dots,K,$$

$$\delta_k^2 = 2\sin\left(\frac{\pi}{n(k)}\right) R_{k-1}, \quad k = 2,\dots,K\ .$$

Отметим, что для сектора, лежащего в k-м кольце разбиения, $k \geqslant 2$, δ_k^1 и δ_k^2 — минимумы расстояний между AB, DC и AD, BC соответственно (см. рис. 2).

Для величин δ_k^1 и δ_k^2 имеем

$$\begin{aligned}\delta_k^1 &= R_k - R_{k-1}\\ &= \frac{\sqrt{S_k}}{\sqrt{\alpha\pi p n}} - \frac{\sqrt{S_{k-1}}}{\sqrt{\alpha\pi p n}} = \frac{\sqrt{1+\frac{5}{2}k(k-1)}}{\sqrt{\alpha\pi p n}} - \frac{\sqrt{1+\frac{5}{2}(k-1)(k-2)}}{\sqrt{\alpha\pi p n}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha\pi p n}}\left(\sqrt{1+\frac{5}{2}k(k-1)} - \sqrt{1+\frac{5}{2}(k-1)(k-2)}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_k^2 &= 2\sin\left(\frac{\pi}{n(k)}\right) R_{k-1} = 2\sin\left(\frac{\pi}{5(k-1)}\right)\frac{\sqrt{1+\frac{5}{2}(k-1)(k-2)}}{\sqrt{\alpha\pi p n}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha p n}}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sin\left(\frac{\pi}{5(k-1)}\right)\sqrt{1+\frac{5}{2}(k-1)(k-2)}.\end{aligned}$$

При $k \geqslant 2$ получаем $\delta_k^1 \geqslant 0.817\frac{1}{\sqrt{\alpha p n}}$, а при $k \geqslant 3$ будет $\delta_k^2 \geqslant 0.854\frac{1}{\sqrt{\alpha p n}}$.

Пусть $R = \frac{4}{5}\frac{1}{\sqrt{\alpha p n}}$. Тогда $R \leqslant \min\left\{\min\limits_{k\geqslant 3}\left\{\delta_k^1, \delta_k^2\right\}, \delta_2^1\right\}$.

Для произвольного сектора D построенной сетки *окрестностью радиуса* R будем называть все секторы, расстояние до которых от сектора D не превосходит R. Под *расстоянием между множествами* подразумевается величина $\rho(A,B) = \inf\{|x-y| \mid x \in A,\ y \in B\}$.

Пусть D — произвольный сектор нашего разбиения. Поскольку R фиксировано, окрестность сектора D радиуса R будем называть просто окрестностью сектора D.

Утверждение 1. *Окрестность сектора D состоит не более чем из 12 элементов.*

Доказательство. Этот факт является следствием геометрических соображений, а также оценок величин δ_k^1 и δ_k^2, приведённых выше.

Рассмотрим случаи возможного положения сектора D (рис. 3).

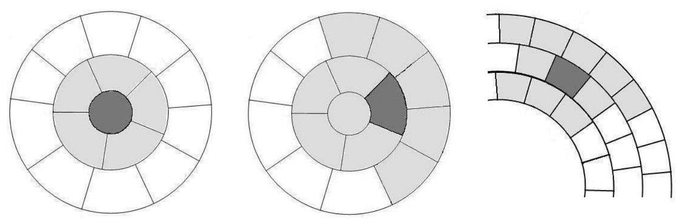

Рис. 3. Возможные положения сектора

Если сектор D лежит в первом кольце (т. е. является кругом в центре нашего построения), то в его окрестности, как видно из оценки величины δ_2^1, находятся все секторы из второго кольца, а также он сам.

Если сектор D лежит во втором кольце, то в его окрестности находятся все секторы из первого, второго кольца, а также не более пяти секторов третьего кольца. Это объясняется тем, что в этом случае угол раствора сектора D не более чем в два раза больше, чем угол раствора любого сектора из третьего кольца: $\Delta_k = \frac{n(k+1)}{n(k)} = \frac{k}{k-1} \leqslant 2$, если $k \geqslant 2$. Поэтому D может иметь общую границу с не более чем тремя секторами третьего кольца. Кроме них в окрестность D может попасть ещё не более двух секторов третьего кольца (исходя из определения окрестности). В окрестности D не может быть секторов из четвёртого кольца ввиду определения числа R, а также оценки величины δ_3^1.

Если сектор D лежит в k-м кольце, $k \geqslant 3$, то в его окрестности находятся три сектора из k-го кольца, не более четырёх секторов из $(k-1)$-го кольца и не более пяти секторов из $(k+1)$-го кольца. Это следует из того, что растворы углов секторов соседних колец отличаются не более чем в два раза, а также из оценок величин δ^1_{k-1}, δ^1_{k+1} и R.

В любом из возможных случаев окрестность D содержит не более двенадцати элементов. Утверждение 1 доказано.

Продолжим доказательство леммы 6. Предполагаем, что n точек расположены произвольно в соответствии с заявленным законом распределения. Эти точки нумеруются произвольным образом, после чего они обходятся и производится выбор секторов. Будем называть сектор *выбранным* с номером i, если он содержит случайно выбранную точку с номером i. При подсчёте числа выбранных секторов подразумевается, что каждый сектор выбран столько раз, сколько случайных точек он содержит. Назовём выбранный сектор *изолированным*, если в его окрестности больше нет выбранного сектора. Иначе сектор будем называть *неизолированным*. Справедлива последовательность:

$$P\left(G_n(R\sqrt{n}) \geqslant pn\right) = P(\text{по крайней мере } pn \text{ точек имеют соседа на расстоянии не более } R) \leqslant P(\text{по крайней мере } pn \text{ выбранных секторов имеют выбранного соседа}) = P(\text{по крайней мере } pn \text{ выбранных секторов являются неизолированными}).$$

Поскольку i-й сектор выбран произвольно и независимо от других секторов, вероятность того, что он является соседним по отношению к уже выбранным секторам ограничена сверху величиной $\frac{12(i-1)}{\alpha pn}$, не превосходящей величину $\frac{12}{\alpha p}$, которая уже не зависит от расположения предыдущих выбранных секторов.

Из утверждения 2 следует, что если i-й сектор оказался неизолированным, то он может быть соседним не более чем для шести ранее изолированных секторов.

Утверждение 2. *Окрестность любого сектора может содержать не более шести изолированных секторов.*

Доказательство. Как доказано ранее, окрестность любого сектора состоит не более чем из 12 секторов. Осталось заметить, что два сектора, имеющие общую границу, не могут быть изолированы одновременно. Утверждение 2 доказано.

Выбирая каждый очередной сектор, можем получить не более семи новых неизолированных секторов. Отсюда следует, что общее число неизолированных секторов ограничено величиной $7X$, где X — число успехов среди n экспериментов в схеме Бернулли с вероятностью успеха $\frac{12}{\alpha p}$.

На основании этого имеем

$$P(\text{по крайней мере } pn \text{ выбранных сектора являются неизолированными}) \leqslant P\Big(\text{число успехов} \geqslant \frac{pn}{7} \text{ среди } n \text{ экспериментов по схеме Бернулли с вероятностью успеха } 12/(\alpha p)\Big).$$

Если выберем α так, что $\frac{12}{\alpha p} < \frac{p}{7}$ (т. е. $\alpha > \frac{84}{p^2}$), то согласно закону больших чисел $\lim\limits_{n\to\infty} P($по крайней мере pn выбранных секторов являются неизолированными$) = 0$. Для таких α имеем $R \leqslant \frac{2}{5\sqrt{21}}\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{n}}$, откуда окончательно заключаем, что для любого значения $c(p) \leqslant \frac{2}{5\sqrt{21}}\sqrt{p}$ верно равенство $\lim\limits_{n\to\infty} P\big($по крайней мере pn точек имеют соседа на расстоянии не более $\frac{c(p)}{\sqrt{n}}\big) = 0$, завершающее доказательство. Лемма 6 доказана.

На основании леммы 6 и следствия 2 получается

Теорема 3. *Пусть $Y, X_1, \ldots, X_n, \ldots$ — последовательность независимых, одинаково распределённых точек плоскости, имеющих равномерное распределение на круге единичной площади. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{c(\mathrm{VRP}^{\mathrm{ITP}}_{(n)})}{c(\mathrm{VRP}_{(n)})} \leqslant 2 - \frac{\widehat{c}}{\beta}\right) = 1,$$

где $\widehat{c} = \max\limits_{0<p\leqslant 1}\left\{\frac{2}{5\sqrt{21}}\sqrt{p}\left(\frac{1}{6} - 2p\right)\right\}$.

3. Заключение

В статье показано, что эвристика ITP с вероятностью 1 является $(2-\widehat{c})$-приближённым алгоритмом решения задачи VRP в том случае, когда склад и клиенты являются независимыми случайными величинами с равномерным распределением на круге единичной площади, если число клиентов стремится к бесконечности. Было бы интересно распространить этот результат на ещё более широкий класс распределений, в том числе на распределения, носитель которых не является компактным множеством.

Автор выражает признательность В. В. Залюбовскому за первоначальную постановку задачи, а также благодарит рецензента за ценные замечания как по содержанию, так и по оформлению статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гимади Э. Х., Глебов Н. И., Сердюков А. И.** Об одной задаче выбора циклического маршрута и загрузки транспортного средства // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. — 1998. — Т. 5, № 1. — С. 12–18.
2. **Гимади Э. Х., Истомин А. М., Рыков И. А.** О задаче нескольких коммивояжёров с ограничениями на пропускные способности рёбер графа // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2013. — Т. 20, № 5. — С. 13–30.
3. **Гимади Э. Х., Шахшнейдер А. В.** Приближённые алгоритмы с оценками для задач маршрутизации на случайных входах с ограниченным числом клиентов в каждом маршруте // Автоматика и телемеханика. — 2012. — № 2. — С. 126–140.
4. **Arora S.** Polynomial time approximation schemes for Euclidean traveling salesman and other geometric problems //JACM. — 1998. — Vol. 45, N 5. — P. 753–782.
5. **Beardwood J., Halton J. L., Hammersley J. M.** The shortest path through many points // Proc. Camb. Phil. Soc. — 1959. — Vol. 55. — P. 299–327.
6. **Bompadre A., Dror M., Orlin J. B.** Probabilistic analysis of unit-demand vehicle routeing problems // J. Appl. Prob. — 2007. — Vol. 44. — P. 259–278.
7. **Haimovich M., Rinnooy Kan A. H. G.** Bounds and heuristics for capacitated routeing problems // Math. Oper. Res. — 1985. — Vol. 10. — P. 527–542.

Истомин Алексей Михайлович,
e-mail: alexeyistomin@gmail.com

Статья поступила
13 декабря 2011 г.

Переработанный вариант —
13 февраля 2014 г.