

УДК 519.174

ДИСКРЕТНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ  
ЦИРКУЛЯНТНОГО ТИПА С ПОРОГОВЫМИ ФУНКЦИЯМИ  
В ВЕРШИНАХ \*)

Ц. Ч.-Д. Батуева

**Аннотация.** Предложен алгоритм нахождения всех неподвижных точек дискретной динамической системы циркулянтного типа с произвольной булевой функцией в вершинах. Получено описание всех истоков и неподвижных точек для системы, в вершинах которой булева функция от  $k$  переменных с единственным набором  $\tilde{v}$  таким, что  $f(\tilde{v}) = 1$ .

**Ключевые слова:** дискретная динамическая система, циркулянт, генная сеть, функциональный граф.

Введение

Пусть  $n \in \mathbb{N}$  и  $n \geq 3$ . *Циркулянт* принято называть ориентированный граф, матрица смежности вершин которого циркулянтная. В [6] введена следующая общая модель дискретной динамической системы циркулянтного типа.

В каждый момент времени вершины циркулянта с  $n$  вершинами помечены элементами  $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$  из конечного поля  $F_q$  порядка  $q$ . Набор  $\tilde{v} = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1}) \in F_q^n$  называется *состоянием системы*. В следующий момент времени состояние системы пересчитывается под действием отображения

$$A_{\varphi, q} : F_q^n \rightarrow F_q^n,$$

где  $\varphi = (f_0, f_1, \dots, f_{n-1})$ , и каждая вершина приобретает новую метку, равную значению функции  $f_i : F_q^k \rightarrow F_q$ , аргументами которой являются значения старых меток в тех вершинах, дуги которых входят в вершину  $i$ .

---

\*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 14-01-00507) и гранта Президента РФ для ведущих научных школ НШ-1939.2014.1.

Функциональным графом  $G_{\varphi,q}$  называется ориентированный граф, вершинами которого являются элементы из  $F_q^n$ , а дуги соединяют вершины  $\tilde{v}$  и  $\tilde{u}$ , если  $A_{\varphi,q}(\tilde{v}) = \tilde{u}$ .

Состояние системы  $\tilde{u}$  называется *рабочим*, если существует состояние  $\tilde{v}$  такое, что  $A_{\varphi,q}(\tilde{v}) = \tilde{u}$ . В противном случае состояние называется *истоком*.

Определённая таким образом дискретная динамическая система является моделью регуляторного контура генной сети (см. более подробно о моделировании регуляторных контуров генных сетей в [4, 7]). Её поведение полностью описывается отображением  $A_{\varphi,q}$ . Каждая вершина соответствует некоторому веществу, а метка в ней характеризует его уровень концентрации. В [1, 3, 5, 8] рассматривались дискретные динамические системы с пороговыми функциями в вершинах. В [6] рассматривался случай линейных функций, зависящих от фиксированного числа переменных, определяемого степенями вершин графа сети, которым эти функции сопоставлены.

В данной работе исследуется структура функционального графа в случае отображения  $A_{\varphi,2} : F_2^n \rightarrow F_2^n$ , когда все функции  $f_i$  равны между собой,  $k < n$ , и каждому состоянию системы  $\tilde{v}$  ставится в соответствие состояние  $\tilde{u}$  тогда и только тогда, когда

$$u_i = f_0(v_{i-k(\bmod n)}, v_{i-(k-1)(\bmod n)}, \dots, v_{i-1(\bmod n)}),$$

где  $i = \overline{0, n-1}$ .

Введём обозначение  $A_{f_0,q}$  вместо  $A_{\varphi,q}$ , поскольку у нас функция во всех вершинах одинаковая:  $\varphi = (f_0, f_0, \dots, f_0)$ . Функциональный граф также будем обозначать через  $G_{f_0,q}$ .

*Пороговой функцией* называется функция, которая представима в виде

$$f(x_1, \dots, x_k) = \left[ \sum_{i=1}^k a_i x_i > T \right],$$

где  $a_i$  — вес аргумента  $x_i$ ,  $T$  — порог функции  $f$  и  $a_i, T \in \mathbb{R}$ .

В данной работе предложен способ нахождения неподвижных точек отображения  $A_{f,q}$ . Опишем все неподвижные точки и истоки функционального графа  $G_{f,2}$  для пороговой функции  $f$  от  $k$  переменных с единственным набором значений переменных, при котором функция принимает значение 1.

1. Неподвижные точки

Пусть  $f : F_q^k \rightarrow F_q$ . Построим ориентированный граф  $P_{f,q}$ , вершинами которого являются элементы поля  $F_q^k$ , причём дуга идёт из вершины  $(v_0, v_1, \dots, v_{k-1})$  в вершину  $(v_1, v_2, \dots, v_k)$  тогда и только тогда, когда  $f(v_0, \dots, v_{k-1}) = v_k$ .

Пусть  $n$  кратно  $l$ . Тогда состояние  $(v_0, v_1, \dots, v_{n-1})$ , где  $v_i = v_{i+l}$  для  $i = \overline{0, n-l-1}$ , будем обозначать через  $(v_0, v_1, \dots, v_{l-1})^{n/l}$ .

**Пример 1.** Рассмотрим булеву функцию  $f(x, y, z) = (01001100)$ , где вектор-строка задаёт её значения (см. [2]). Граф  $P_{f,2}$  имеет дуги, описанные в табл. 1, и изображён на рис. 1(a).

Т а б л и ц а 1

Дуги графа  $P_{f,2}$

$(x, y, z) \rightarrow (y, z, f(x, y, z))$
000 $\rightarrow$ 000
001 $\rightarrow$ 011
010 $\rightarrow$ 100
011 $\rightarrow$ 110
100 $\rightarrow$ 001
101 $\rightarrow$ 011
110 $\rightarrow$ 100
111 $\rightarrow$ 110

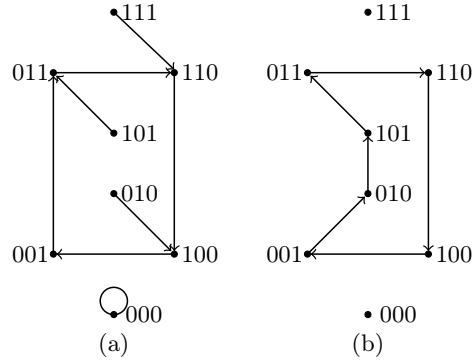


Рис. 1. (a) Граф  $P_{f,2}$  для функции  $(01001100)$ , (b) подграф графа  $P_{f,2}$  для частично определённой функции  $(x010110x)$

**Теорема 1** (критерий неподвижных точек). Состояние  $\tilde{v} = (v_0, v_1, \dots, v_{l-1})^{n/l}$  с минимальным периодом  $l$  является неподвижной точкой отображения  $A_{f,q}$  тогда и только тогда, когда граф  $P_{f,q}$  содержит простой цикл  $\tilde{u}^0, \dots, \tilde{u}^{l-1}$  с вершинами

$$\tilde{u}^i = (v_i, v_{i+1(\text{mod } l)}, \dots, v_{i+k-1(\text{mod } l)}), \quad i = \overline{0, l-1}.$$

**Доказательство.** Пусть состояние  $\tilde{v} = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1})$  — неподвижная точка графа  $G_{f,q}$ , т. е.  $A_{f,q}(\tilde{v}) = \tilde{v}$ . Тогда

$$v_i = f(v_{i-k(\text{mod } n)}, \dots, v_{i-1(\text{mod } n)}), \quad i = \overline{0, n-1}.$$

Следовательно, вершины  $\tilde{u}^0, \dots, \tilde{u}^{n-1}$  образуют цикл в графе  $P_{f,q}$ , где

$$\tilde{u}^i = (v_i, v_{i+1(\text{mod } n)}, \dots, v_{i+k-1(\text{mod } n)}).$$

Пусть в графе  $P_{f,q}$  есть цикл  $\tilde{u}^0, \dots, \tilde{u}^{n-1}$ . Тогда по нему можно легко восстановить неподвижную точку отображения  $A_{f,q}$ .

Заметим, что по строению графа  $P_{f,q}$  из каждой его вершины может выходить только одно ребро. Следовательно, циклы в графе могут получаться только несколькими обходами одного и того же простого цикла, т. е. цикла, все вершины которого различны. Таким образом, неподвижная точка  $(v_0, \dots, v_{l-1})^{n/l}$  с минимальным периодом  $l$  будет соответствовать простому циклу  $\tilde{u}^0, \dots, \tilde{u}^{l-1}$ , вершины которого имеют вид

$$\tilde{u}^i = (v_i, v_{i+1(\bmod l)}, \dots, v_{i+k-1(\bmod l)}).$$

Теорема 1 доказана.

**Следствие 1.** Пусть  $n \in \mathbb{N}$  и  $f$  — булева функция от трёх переменных.

(i) В табл. 2 представлены все возможные неподвижные точки отображения  $A_{f,2}$  с точностью до циклического сдвига.

(ii) Отображение  $A_{f,2}$  содержит неподвижную точку  $\tilde{v}$  из табл. 2 тогда и только тогда, когда  $n$  кратно периоду состояния  $\tilde{v}$ , а значения функции  $f$  задаются вектор-строкой.

Т а б л и ц а 2

$f(z_1, z_2, z_3)$	$\tilde{v}$	$f(z_1, z_2, z_3)$	$\tilde{v}$
(0xxxxxx)	$(0)^n$	(11x10x00)	$(000111)^{n/6}$
(xxxxxxx1)	$(1)^n$	(x010110x)	$(001011)^{n/6}$
(xx1xx0xx)	$(01)^{n/2}$	(x100101x)	$(001101)^{n/6}$
(x00x1xxx)	$(001)^{n/3}$	(1010010x)	$(0001011)^{n/7}$
(xxx0x11x)	$(011)^{n/3}$	(1100001x)	$(0001101)^{n/7}$
(100x0xxx)	$(0001)^{n/4}$	(x0111100)	$(0010111)^{n/7}$
(xxx1x110)	$(0111)^{n/4}$	(x1011010)	$(0011101)^{n/7}$
(x1x01x0x)	$(0011)^{n/4}$	(10110100)	$(00010111)^{n/8}$
(x1x11x00)	$(00111)^{n/5}$	(11010010)	$(00011101)^{n/8}$
(11x00x0x)	$(00011)^{n/5}$		

**Замечание.** В табл. 2 показана зависимость значений функции  $f$  от трёх переменных и неподвижной точки  $\tilde{v}$  отображения  $A_{f,2}$ , где вместо  $x$  стоят произвольные значения функции, а состояние  $(\tilde{\alpha})^k$  означает конкатенацию  $k$  раз слова  $\tilde{\alpha}$ .

**Доказательство.** (i) Если рассмотреть все циклы, которые могут получиться в графе  $P_{f,2}$  для произвольной булевой функции  $f$  от трёх переменных, то их получится ровно 19. По предыдущей теореме эти циклы

соответствуют неподвижным точкам  $\tilde{v}$  отображения  $A_{f,2}$ . Все они представлены в таблице, поэтому других неподвижных точек нет.

(ii) Рассмотрим случай, когда некоторые значения булевой функции заданы вектор-строкой  $(11x10x00)$ , где вместо  $x$  стоят значения 0 и 1. Граф  $P_{f,2}$  такой функции будет содержать подграф, изображённый на рис. 1(b). Этот подграф содержит цикл длины 6. Значит, по теореме 1 отображение  $A_{f,2}$  имеет неподвижную точку  $(001011)^{n/6}$ , если  $n$  делится на 6. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Следствие 1 доказано.

## 2. Свойства функциональных графов $G_{f,q}$

Пусть  $\tilde{v} \in F_2^n$ . Введём обозначение  $\neg\tilde{v} = (\neg v_1, \neg v_2, \dots, \neg v_n)$ .

**Лемма 1.** Пусть булевы функции  $f$  и  $g$  двойственны. Тогда функциональные графы  $G_{f,2}$  и  $G_{g,2}$  совпадают с точностью до инверсии вершин.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть функции  $f$  и  $g$  двойственны, т. е. для любого  $\tilde{x} \in F_2^k$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k) = \neg g(\neg x_1, \neg x_2, \dots, \neg x_k).$$

Рассмотрим состояния  $\tilde{v}$  и  $\tilde{u}$  такие, что  $\tilde{v} = \neg\tilde{u}$ . Тогда

$$A_{f,2}(\tilde{v}) = \neg A_{g,2}(\neg\tilde{v}) = \neg A_{g,2}(\tilde{u}).$$

Таким образом, в функциональном графе отображения  $A_{g,2}$  состояние  $\neg\tilde{v}$  переходит в состояние  $\neg A_{f,2}(\tilde{v})$ . Следовательно, функциональные графы  $G_{f,2}$  и  $G_{g,2}$  изоморфны. Лемма 1 доказана.

**Лемма 2.** Пусть  $f$  и  $g$  — булевы функции от  $k$  переменных. Множество истоков отображений  $A_{f,2}$  и  $A_{g,2}$  совпадают, если

$$f(x_1, \dots, x_k) = g(\neg x_1, \dots, \neg x_k)$$

для любых  $x_1, \dots, x_k \in F_2$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть состояние  $\tilde{u}$  является истоком для отображения  $A_{f,2}$ , но существует состояние  $\tilde{v}$  такое, что  $A_{g,2}(\tilde{v}) = \tilde{u}$ . Тогда  $\tilde{u} = A_{g,2}(\tilde{v}) = A_{f,2}(\neg\tilde{v})$ ; противоречие. Лемма 2 доказана.

Пусть  $\tilde{v} = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1})$ . Введём обозначения

$$\overleftarrow{\tilde{v}} = (v_{n-1}, v_{n-2}, \dots, v_0),$$

$$\delta_s(\tilde{v}) = (v_{n-s \pmod n}, \dots, v_{n-1}, v_0, \dots, v_{n-s-1 \pmod n}).$$

**Лемма 3.** Пусть функции  $f, g : F_q^k \rightarrow F_q$  такие, что  $f(\tilde{x}) = g(\overleftarrow{\tilde{x}})$  для любого  $\tilde{x} \in F_q^k$ . Состояние  $\tilde{u}$  является истоком отображения  $A_{f,q}$  тогда и только тогда, когда состояние  $\overleftarrow{\tilde{u}}$  является истоком отображения  $A_{g,q}$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Нетрудно заметить, что  $A_{f,q}(\tilde{x}) = \delta_{-k-1}(A_{g,q}(\overleftarrow{\tilde{x}}))$  для любого  $\tilde{x} \in F_q^k$ . Пусть состояние  $\tilde{v}$  является истоком для отображения  $A_{f,q}$ . Предположим, что существует состояние  $\tilde{u}$  такое, что  $A_{g,q}(\tilde{u}) = \overleftarrow{\tilde{v}}$ . Тогда  $A_{f,q}(\overleftarrow{\tilde{u}}) = \delta_{-k-1}(A_{g,q}(\tilde{u})) = \delta_{-k-1}(\tilde{v})$ , т. е.  $\tilde{v}$  — не исток для отображения  $A_{f,q}$ ; противоречие. Лемма 3 доказана.

### 3. Отображение $A_{f,2}$ для булевой функции $f$ с одной единицей

Следующая теорема даёт полное описание истоков для отображения  $A_{f,2}$  для булевой функции  $f$  с одной единицей.

**Теорема 2.** Пусть  $f$  — булева функция от  $k$  переменных и существует единственное  $\tilde{\alpha} \in F_2^k$  такое, что  $f(\tilde{\alpha}) = 1$  и минимальный период слова  $\tilde{\alpha}$  равен  $p$ .

(i) Состояние, содержащее подслово  $10^{s-1}1$ , является истоком, если  $1 \leq s \leq k-1$  и  $s \neq p$ .

(ii) Состояние, содержащее подслово  $10^{k-1}1$ , является истоком, если  $k = tp$  и  $t \geq 2$ .

(iii) Других истоков нет.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** (i) Пусть  $1 \leq s \leq k-1$  и  $s \neq p$ . Предположим, что состояние  $\tilde{u}$ , содержащее подслово  $10^{s-1}1$ , рабочее. Следовательно, существует состояние  $\tilde{v}$  такое, что  $A_{f,2}(\tilde{v}) = \tilde{u}$ . Слово  $\tilde{\alpha} = a_0a_1 \dots a_{k-1}$  встречается в состоянии  $\tilde{v}$  два раза на расстоянии  $s$ , так как

$$\begin{aligned} & A_{f,2}(v_0v_1 \dots v_{s-1}v_s \dots v_{k-1} \dots v_{s+k-1} \dots v_{n-1}) \\ &= A_{f,2}(a_0a_1 \dots a_{s-1}a_s \dots a_{k-1} | \dots * \dots *) = \dots \\ &= A_{f,2}(* \dots * = \underbrace{a_0 \dots a_{k-s-1}}_s \dots a_{k-1} | \dots *) \\ &= \underbrace{** \dots **}_{k} | \underbrace{10 \dots 0}_s | 1 \dots * = \tilde{u}. \end{aligned}$$

Таким образом,  $s$  — период слова  $\tilde{\alpha}$ . Так как  $p$  — минимальный период и  $p \neq s$ , то  $s = tp$ , где  $t \geq 2$ . Тогда в подслове  $10^s1$  состояния  $\tilde{u}$  должна быть ещё хотя бы одна единица; противоречие.

(ii) Пусть  $k = tp$ , где  $t \geq 2$ , а состояние  $\tilde{u}$ , содержащее подслово

$10^{k-1}1$ , рабочее. Тогда существует состояние  $\tilde{v}$  такое, что

$$\begin{aligned} A_{f,2}(\tilde{v}) &= A_{f,2}(\underbrace{a_0 a_1 \dots a_{k-1} | a_0 a_1 \dots a_{k-1} | * \dots *}_{k}) \\ &= * * \dots * | \underbrace{1 \ 0 \ \dots \ 0}_k | 1 \ \dots * = \tilde{u}. \end{aligned}$$

В подслове  $10^{s-1}1$  состояния  $\tilde{u}$  должна быть ещё одна единица; противоречие.

(iii) Предположим, что существует исток  $\tilde{v}$ , не удовлетворяющий условиям (i) и (ii). С точностью до сдвига можно считать, что

$$\tilde{v} = 10^{s_0-1} 10^{s_1-1} 10 \dots 0 10^{s_l-1}.$$

Рассмотрим подслово состояния  $\tilde{v}$  вида  $10^{r-1}1$ . Построим прообразы для отображения этого слова в зависимости от возможных значений  $r$ .

СЛУЧАЙ 1:  $r = p \leq k - 1$ . Тогда

$$10^{p-1}1 = f(a_0 a_1 \dots a_{p-1} a_0 a_1 \dots a_{k-1}) = f(a_0 a_1 \dots a_{p-1} \tilde{\alpha}).$$

СЛУЧАЙ 2:  $r = k$ ,  $k \neq tp$ ,  $t \geq 2$ . Тогда

$$10^{k-1}1 = f(a_0 a_1 \dots a_{k-1} a_0 a_1 \dots a_{k-1}) = f(\tilde{\alpha} \tilde{\alpha}).$$

СЛУЧАЙ 3:  $r \geq k + 1$ . Если  $\tilde{\alpha} = 0^k$ , то

$$10^{r-1}1 = f(0^k 1^{r-k} 0^k) = f(\tilde{\alpha} 1^{r-k} \tilde{\alpha}).$$

Иначе  $10^{r-1}1 = f(a_0 a_1 \dots a_{k-1} 0^{r-k} a_0 a_1 \dots a_{k-1}) = f(\tilde{\alpha} 0^{r-k} \tilde{\alpha})$ .

Получим из этих прообразов состояние  $\tilde{u}$ , удовлетворяющее условию  $A_{f,2}(\tilde{u}) = \tilde{v}$ .

Пусть  $\tilde{\alpha} \neq 0^k$  и

$$\tilde{\beta}_r = \begin{cases} a_0 a_1 \dots a_{p-1}, & r = p \leq k - 1, \\ \tilde{\alpha}, & r = k, k \neq tp, t \geq 2, \\ \tilde{\alpha} 0^{r-p}, & r \geq k + 1. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что состояние  $\tilde{u} = \tilde{\beta}_{s_1} \tilde{\beta}_{s_2} \dots \tilde{\beta}_{s_l} \tilde{\beta}_{s_0}$  удовлетворяет условию  $A_{f,2}(\tilde{u}) = \tilde{v}$ , но состояние  $\tilde{u}$  является истоком; противоречие.

Пусть  $\tilde{\alpha} = 0^k$ . Тогда  $p = 1$ . Введём обозначение

$$\tilde{\gamma}_r = \begin{cases} 0, & r = 1, \\ 0^k 1^{r-p}, & r \geq k + 1. \end{cases}$$

Аналогично построим состояние  $\tilde{u} = \tilde{\gamma}_{s_1} \tilde{\gamma}_{s_2} \dots \tilde{\gamma}_{s_l} \tilde{\gamma}_{s_0}$ , удовлетворяющее условию  $A_{f,2}(\tilde{u}) = \tilde{v}$ . Снова получим противоречие. Теорема 2 доказана.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Батуева Ц. Ч.-Д. Свойства генных сетей циркулянтного типа с пороговыми функциями // Прикл. дискрет. математика. Прил. — 2013. — № 6. — С. 72–73.
2. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по дискретной математике. — М.: Физматлит, 2009. — 416 с.
3. Григоренко Е. Д., Евдокимов А. А., Лихошвай В. А., Лобарева И. А. Неподвижные точки и циклы автоматных отображений, моделирующих функционирование генных сетей // Вестн. Томск. гос. ун-та. — 2005. — № 14. — С. 206–212.
4. Демиденко Г. В., Колчанов Н. А., Лихошвай В. А., Матушкин Ю. Г., Фадеев С. И. Математическое моделирование регулярных контуров генных сетей // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 2004. — Т. 44, № 12. — С. 2276–2295.
5. Евдокимов А. А., Лиховидова Е. О. Дискретная модель генной сети циркулянтного типа с пороговыми функциями // Вестн. Томск. гос. ун-та. — 2008. — № 2. — С. 18–21.
6. Евдокимов А. А., Пережогин А. Л. Дискретные динамические системы циркулянтного типа с линейными функциями в вершинах сети // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2011. — Т. 18, № 3. — С. 39–48.  
Evdokimov A. A., Perezhogin A. L. Discrete dynamical systems of a circulant type with linear functions at vertices of network // J. Appl. Industr. Math. — 2012. — Vol. 6, N 2. — P. 160–166.
7. Лихошвай В. А., Голубятников В. П., Демиденко Г. В., Евдокимов А. А., Матвеева И. И., Фадеев С. И. Теория генных сетей // Системная компьютерная биология. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2008. — С. 397–480.
8. Evdokimov A. A., Kutumova E. O. The discrete model of the gene networks regulatory loops with the threshold functions // Proc. 7th Int. Conf. Bioinformatics of Genom Regulation and Structure (Novosibirsk, June 20–27, 2010). — Novosibirsk: SB RAS, 2010. — P. 155.

Батуева Цындыма Чимит-Доржиевна,  
e-mail: tsyn.batueva@gmail.com,  
batueva@math.nsc.ru

Статья поступила  
21 октября 2013 г.  
Переработанный вариант —  
20 марта 2014 г.