ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—август 2014. Том 21, № 4. С. 12–24

УДК 519.718

О НАДЁЖНОСТИ СХЕМ, РЕАЛИЗУЮЩИХ ФУНКЦИИ ТРЁХЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ *)

М. А. Алехина, О. Ю. Барсукова

Аннотация. Рассматривается реализация функций трёхзначной логики схемами из ненадёжных функциональных элементов в произвольном полном конечном базисе. Предполагается, что элементы схемы переходят в неисправные состояния независимо друг от друга, а сами неисправности могут быть произвольными (например, инверсными или константными).

В работе описан класс G функций трёхзначной логики, схемы которых можно использовать для повышения надёжности исходных схем. При инверсных неисправностях на выходах базисных элементов с использованием функций класса G конструктивно доказано, что функцию, отличную от любой из переменных, можно реализовать надёжной схемой (напомним, что функцию, равную одной из переменных, можно реализовать абсолютно надёжно, не используя функциональных элементов). В частности, если рассматриваемый базис содержит хотя бы одну из функций класса G, то предлагаемые схемы являются не просто надёжными, а асимптотически оптимальными по надёжности для всех функций, отличных от любой из переменных.

Ключевые слова: функция трёхзначной логики, схема из функциональных элементов, ненадёжность схемы.

Введение

В современной математике и технике теория синтеза схем из ненадёжных функциональных элементов занимает важное место. Стоит отметить, что доминирующее положение занимают схемы, функционирующие на основе двузначной логики. Однако сложность решаемых задач, а следовательно, и технических устройств, постоянно возрастает. Уже подходят к своему пределу многие технологические возможности, такие как увеличение плотности элементов на схемах и повышение рабочей

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 14–01–00273 и 14–01–31360).

частоты. Применение многозначной логики является одним из путей решения названных проблем.

Многозначная логика предоставляет более широкие возможности для разработки различных алгоритмов во многих областях. Она позволяет уменьшить как вычислительную сложность, так и размеры и число соединений в различных арифметико-логических устройствах, повысить плотность размещения элементов на схемах и найти альтернативные методы решения задач.

К многозначным логикам с их математическим аппаратом как к источнику математических моделей, обладающих большими потенциальными возможностями, обращались в [9, 11]. Обзор работ по многозначной логике можно прочесть в [10].

Среди работ по многозначным логикам отметим статью [8], в которой построен функционально полный в P_3 базис. В этой статье на компромиссной основе согласованы математические и технические требования и интересы (МДП-техники — от словосочетания металл-диэлектрик-полупроводник) и рассмотрены некоторые аспекты синтеза электронных схем в этом базисе.

Наша статья посвящена синтезу надёжных схем, реализующих функции трёхзначной логики. Отметим, что синтез надёжных схем, реализующих функции многозначной логики вообще и функции трёхзначной логики в частности, является к настоящему времени плохо изученным. Пока возможность построения надёжных схем из ненадёжных элементов доказана лишь в двух базисах: Россера — Туркетта $\{0, 1, 2, J_0(x_1), J_1(x_1), J_2(x_1), \min(x_1, x_2), \max(x_1, x_2)\}$ [4] и $\{V_3(x_1, x_2)\}$ [5], где $V_3(x_1, x_2) = \max(x_1, x_2) + 1 (\mathrm{mod}\ 3)$ — функция Вебба.

Впервые задачу построения надёжных схем из ненадёжных элементов, реализующих булевы функции, рассматривал Дж. фон Нейман [13], а для повышения надёжности исходных схем он использовал схему, реализующую медиану $x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$. Позднее для повышения надёжности схем, реализующих булевы функции, использовались схемы, реализующие не только медиану, но и другие булевы функции (см., например, [1, 3, 6, 12]). Для повышения надёжности схем в базисе Россера — Туркетта [4] использовалась схема из трёх элементов, реализующая функцию $\max\{\min(x_1, x_2), \min(x_3, x_4)\}$. Заметим, что аналог этой функции в P_2 также можно использовать для повышения надёжности исходных схем. Сложнее оказалась задача синтеза надёжных схем в базисе $\{V_3(x_1, x_2)\}$. Функция $V_3(x_1, x_2)$ является аналогом булевой функции $\overline{x_1 \vee x_2}$, а в базисе $\{\overline{x_1 \vee x_2}\}$ (см. статью [2], результаты которой справедливы в двойственном базисе $\{\overline{x_1 \vee x_2}\}$) для повышения надёжности исходных схем применялась схема из трёх элементов, реализующая булеву функцию $\overline{\overline{x_1 \vee x_2} \vee \overline{x_3 \vee x_4}}$. Естественно была предпринята попытка использовать схему из трёх элементов, реализующую $V_3(V_3(x_1,x_2),V_3(x_3,x_4))$, для повышения надёжности схем в P_3. Однако вычисления показали [7], что в результате применения такого метода на некоторых входных наборах вероятность ошибки схемы увеличивается (по сравнению с исходной схемой). Следовательно, предлагаемая схема не подходит для повышения надёжности. Возникает вопрос, какими же свойствами должна обладать функция k-значной логики ($k \geqslant 3$), чтобы реализующую её схему можно было использовать для повышения надёжности исходных схем?

Ответ на этот вопрос для функций трёхзначной логики ранее был неизвестен и впервые получен в этой статье.

Цель данной работы — описать свойства функций трёхзначной логики, схемы которых можно использовать для повышения надёжности схем, реализующих функции трёхзначной логики.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, а P_3 — множество всех функций трёхзначной логики, т. е. функций $f(x_1,\ldots,x_n) : \{0,1,2\}^n \to \{0,1,2\}$. Рассмотрим реализацию функций из множества P_3 схемами из ненадёжных функциональных элементов в произвольном полном конечном базисе B. Предполагается, что элементы схемы переходят в неисправные состояния независимо друг от друга.

Будем считать, что схема из ненадёжных элементов реализует функцию $f(\widetilde{x})$, ($\widetilde{x} = (x_1,\ldots,x_n)$), если при поступлении на входы схемы набора $\widetilde{a}$ при отсутствии неисправностей в схеме на её выходе появляется значение $f(\widetilde{a})$.

Пусть схема S реализует функцию $f(\widetilde{x})$, $\widetilde{a}$ — произвольный входной набор схемы S, $f(\widetilde{a}) = \tau$. Обозначим через $P_i(S,\widetilde{a})$ вероятность появления значения $i \in \{0,1,2\}$ на выходе схемы S при входном наборе $\widetilde{a}$, а через $P_{f(\widetilde{a})\neq\tau}(S,\widetilde{a})$ — вероятность появления ошибки на выходе схемы S при входном наборе $\widetilde{a}$. Ясно, что $P_{f(\widetilde{a})\neq\tau}(S,\widetilde{a}) = P_{\tau+1}(S,\widetilde{a}) + P_{\tau+2}(S,\widetilde{a})$. (В выражениях $\tau+1$ и $\tau+2$ сложение осуществляется по mod 3.)

Тем самым, если $f(\widetilde{a})$ равна 0, 1 или 2, то вероятность появления ошибки на наборе $\widetilde{a}$ равна $P_{f(\widetilde{a})\neq 0}(S,\widetilde{a}) = P_1(S,\widetilde{a})+P_2(S,\widetilde{a})$, $P_{f(\widetilde{a})\neq 1}(S,\widetilde{a}) = P_0(S,\widetilde{a}) + P_2(S,\widetilde{a})$ или $P_{f(\widetilde{a})\neq 2}(S,\widetilde{a}) = P_0(S,\widetilde{a}) + P_1(S,\widetilde{a})$ соответственно.

Ненадёжностью схемы S, реализующей функцию $f(\widetilde{x})$, будем называть число $P(S)$, равное наибольшей из вероятностей появления ошибки на выходе схемы S. *Надёжность* схемы S равна $1 - P(S)$.

1. Специальный класс функций

Пусть $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}$ — некоторые троичные наборы длины $m \geqslant 3$. Обозначим через $\rho(\widehat{\alpha},\ \widehat{\beta})$ число координат, в которых наборы $\widehat{\alpha}$ и $\widehat{\beta}$ различаются.

Например, если $\widehat{\alpha} = (0102)$, $\widehat{\beta} = (2101)$, то $\rho(\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}) = 2$.

Пусть функция $g(x_1, \ldots, x_m)$ обладает следующими свойствами одновременно: существуют такие троичные наборы $\widehat{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, $\widehat{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$, $\widehat{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$, что

1) значения $g(\widehat{\alpha})$, $g(\widehat{\beta})$, $g(\widehat{\gamma})$ попарно различны;

2) существует r $(3 \leqslant r \leqslant m)$ попарно различных чисел $i_1, i_2, \ldots, i_r \in \{1, 2, \ldots, k\}$ таких, что при всех $i_j \in \{i_1, i_2, \ldots, i_r\}$ $\beta_{i_j} = \alpha_{i_j} + 1$, $\gamma_{i_j} = \alpha_{i_j} + 2$ и при всех $i \neq i_j$ $(j \in \{1, 2, \ldots, r\})$ координаты наборов $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}, \widehat{\gamma}$ равны (т. е. $\alpha_i = \beta_i = \gamma_i$);

3) для любого набора $\widehat{\alpha}_1$ $(\rho(\widehat{\alpha}, \widehat{\alpha}_1) \leqslant 1)$ верно $g(\widehat{\alpha}_1) = g(\widehat{\alpha})$; для любого набора $\widehat{\beta}_1$ $(\rho(\widehat{\beta}, \widehat{\beta}_1) \leqslant 1)$ верно $g(\widehat{\beta}_1) = g(\widehat{\beta})$; для любого набора $\widehat{\gamma}_1$ $(\rho(\widehat{\gamma}, \widehat{\gamma}_1) \leqslant 1)$ верно $g(\widehat{\gamma}_1) = g(\widehat{\gamma})$.

Наборы $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}, \widehat{\gamma}$ будем называть *характеристическими* наборами функции $g(x_1, \ldots, x_m)$.

Замечание 1. Нетрудно проверить, что если $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}, \widehat{\gamma}$ являются характеристическими наборами некоторой функции $g(x_1, \ldots, x_m)$, то существует число r $(3 \leqslant r \leqslant m)$ такое, что $\rho(\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}) = \rho(\widehat{\alpha}, \widehat{\gamma}) = \rho(\widehat{\beta}, \widehat{\gamma}) = r$.

Обозначим через $G_m(r)$ множество функций $g(x_1, \ldots, x_m)$ с перечисленными выше свойствами.

Пусть $G_m = \bigcup\limits_{r=3}^{m} G_m(r)$ $(m \geqslant 3)$, а $G = \bigcup\limits_{m=3}^{\infty} G_m$.

Пример 1. Рассмотрим функции

$$h_1(x_1, x_2, x_3) = \max\{\max(\min(x_1, x_2), \min(x_1, x_3)), \min(x_2, x_3)\},$$

$$h_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = \max\{\min(x_1, x_2), \min(x_3, x_4)\},$$

$$h_3(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 \pmod 3,$$

$$h_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = V_3(V_3(x_1, x_2), V_3(x_3, x_4)).$$

Нетрудно проверить, что

1) $h_1 \in G$, причём $\widehat{\alpha} = (0, 0, 0)$, $\widehat{\beta} = (1, 1, 1)$, $\widehat{\gamma} = (2, 2, 2)$, $r = 3$;

2) $h_2 \in G$, причём $\widehat{\alpha} = (0, 0, 0, 0)$, $\widehat{\beta} = (1, 1, 1, 1)$, $\widehat{\gamma} = (2, 2, 2, 2)$, $r = 4$;

3) $h_3 \notin G$, поскольку при всех $a_1, a_2, a_3 \in \{0, 1, 2\}$ верно неравенство $h_3(a_1, a_2, a_3) \neq h_3(a_1 + 1, a_2, a_3)$;

4) $h_4 \notin G$, поскольку для любого набора $\widehat{\gamma}$ $(h_4(\widehat{\gamma}) = 2)$ можно так изменить одну координату, что значение функции будет не равно 2.

В теореме 1 получена верхняя оценка для числа функций в классе G_m.

Теорема 1. $|G_m| \leqslant (2^{m+1} - m^2 - m - 2) \cdot 3^{3^m - 5m - 3}$.

Доказательство. Пусть $g(x_1, \ldots, x_m) \in G_m$. Характеристический набор $\widehat{\alpha}$, на котором $g(\widehat{\alpha}) = 0$, можно выбрать 3^m способами. Попарно различные числа $i_1, i_2, \ldots, i_r \in \{1, 2, \ldots, m\}$ $(r \geqslant 3)$, номера координат, в которых отличаются характеристические наборы, могут быть выбраны $\sum\limits_{r=3}^{m} C_m^r$ способами, что равно $(2^m - 1 - m - m(m-1)/2)$. После выбора чисел $i_1, i_2, \ldots, i_r$ характеристический набор $\widehat{\beta}$ $(g(\widehat{\beta}) = 1)$ можно выбрать двумя способами, после чего характеристический набор $\widehat{\gamma}$, на котором $g(\widehat{\gamma}) = 2$, определён однозначно.

Пусть характеристические наборы известны, тогда известны значения функции $g(x_1, \ldots, x_m)$ на всех наборах, отличающихся от характеристических одной координатой (таких наборов $6m$). Остальные $3^m - 6m - 3$ значений функции $g(x_1, \ldots, x_m)$ могут быть любыми из множества $\{0, 1, 2\}$. Поэтому $|G_m| \leqslant 3^m(2^m - 1 - m - m(m-1)/2) \cdot 2 \cdot 3^{3^m - 6m - 3} = (2^{m+1} - m^2 - m - 2) \cdot 3^{3^m - 5m - 3}$. Теорема 1 доказана.

Лемма 1. *При всех $p \in [0, 1]$ и $m \geqslant 3$ справедливо неравенство*

$$\sum_{i=2}^{m} C_m^i p^i \leqslant (2^m - m - 1)p^2.$$

Доказательство. Известно, что $\sum\limits_{i=0}^{m} C_m^i = 2^m$. Следовательно, $\sum\limits_{i=2}^{m} C_m^i = 2^m - m - 1$. Тогда $\sum\limits_{i=2}^{m} C_m^i p^i \leqslant p^2 \sum\limits_{i=2}^{m} C_m^i = (2^m - m - 1)p^2$. Лемма 1 доказана.

Теорема 2. *Допустим, что любую функцию трёхзначной логики можно реализовать схемой с ненадёжностью не больше p. Пусть схема S_g реализует функцию $g(x_1, \ldots, x_m) \in G$ с ненадёжностью $P(S_g)$, причём v^0, v^1, v^2 — вероятности ошибок схемы S_g на характеристических наборах $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}, \widehat{\gamma}$ соответственно и $g(\widehat{\alpha}) = 0$, $g(\widehat{\beta}) = 1$, $g(\widehat{\gamma}) = 2$. Тогда произвольную функцию f можно реализовать схемой A такой, что*

$$P(A) \leqslant \max\{v^0, v^1, v^2\} + mpP(S_g) + (2^m - m - 1)p^2.$$

Доказательство. Пусть функция $g(x_1, \ldots, x_m)$ имеет характеристические наборы $\widehat{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, $\widehat{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$, $\widehat{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$.

Без ограничения общности можно считать, что 1) $g(\widehat{\alpha}) = 0$, $g(\widehat{\beta}) = 1$, $g(\widehat{\gamma}) = 2$; 2) наборы $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}, \widehat{\gamma}$ отличаются в первых r $(3 \leqslant r \leqslant k)$ координатах; 3) $\alpha_1 = \ldots = \alpha_d = 0$, $\alpha_{d+1} = \ldots = \alpha_t = 1$, $\alpha_{t+1} = \ldots = \alpha_r = 2$. Тогда для первых r координат набора $\widehat{\beta}$ возможны два варианта:

$$\beta_1 = \ldots = \beta_d = 1, \quad \beta_{d+1} = \ldots = \beta_t = 2, \quad \beta_{t+1} = \ldots = \beta_r = 0,$$
$$\beta_1 = \ldots = \beta_d = 2, \quad \beta_{d+1} = \ldots = \beta_t = 0, \quad \beta_{t+1} = \ldots = \beta_r = 1.$$

Пусть для определённости имеет место первый из этих двух вариантов. Тогда для первых r координат набора $\widehat{\gamma}$ выполняются равенства

$$\gamma_1 = \ldots = \gamma_d = 2, \quad \gamma_{d+1} = \ldots = \gamma_t = 0, \quad \gamma_{t+1} = \ldots = \gamma_r = 1.$$

Поскольку $\alpha_i = \beta_i = \gamma_i$ при $i \in \{r+1, \ldots, m\}$, будем считать, что

$$\alpha_{r+1} = \ldots = \alpha_l = 0, \quad \alpha_{l+1} = \ldots = \alpha_q = 1, \quad \alpha_{q+1} = \ldots = \alpha_m = 2.$$

Пусть $f(\widetilde{x})$ — произвольная функция. По условию теоремы функции f, $f + 1(\mathrm{mod}\ 3)$ и $f + 2(\mathrm{mod}\ 3)$ можно реализовать такими схемами S, S' и S'', что $P(S), P(S'), P(S'') \leqslant p$.

Возьмём d экземпляров схемы S, реализующей функцию f, $t - d$ экземпляров схемы S', реализующей функцию $f + 1(\mathrm{mod}\ 3)$, и $r - t$ экземпляров схемы S'', реализующей функцию $f + 2(\mathrm{mod}\ 3)$. Соединим первые из d входов схемы S_g с выходами d экземпляров схемы S, следующие $t - d$ входов схемы S_g — с выходами $t - d$ экземпляров схемы S', а следующие $r - t$ входов схемы S_g — с выходами $r - t$ экземпляров схемы S'' соответственно.

Поскольку любую функцию можно реализовать схемой с ненадёжностью не больше p, возьмём $l - r$ экземпляров схемы S_0, реализующей константу 0 с ненадёжностью $P(S_0) \leqslant p$, и возьмём $q-l$ экземпляров схемы S_1, реализующей константу 1 с ненадёжностью $P(S_1) \leqslant p$, возьмём $k-m$ экземпляров схемы S_2, реализующей константу 2 с ненадёжностью $P(S_2) \leqslant p$. Соединим $(r+1)$-й,$\ldots$, l-й входы схемы S_g с выходами $l - r$ экземпляров схемы S_0, соединим $(l+1)$-й,$\ldots$, q-й входы схемы S_g с выходами $q - l$ экземпляров схемы S_1 и соединим $(q+1)$-й,$\ldots$, m-й входы схемы S_g с выходами $m - q$ экземпляров схемы S_2 соответственно. Построенную схему обозначим через A. Нетрудно проверить, что схема A реализует функцию f (рис. 1).

Действительно, пусть на входы схемы A поступает набор $\widetilde{a}$ такой, что $f(\widetilde{a}) = 0$. Тогда при отсутствии неисправностей во всех схемах S, S', S'',

S_0, S_1, S_2 на входы схемы S_g поступит набор $\widehat{\alpha}$. При отсутствии неисправностей в схеме S_g на её выходе появится значение $g(\widehat{\alpha}) = 0$, т. е. значение на выходе схемы A равно 0 и равно $f(\widetilde{a})$.

Пусть на входы схемы A поступает такой набор $\widetilde{a}$, что $f(\widetilde{a}) = 1$. Тогда при отсутствии неисправностей во всех схемах $S, S', S'', S_0, S_1, S_2$ на входы схемы S_g поступит набор $\widehat{\beta}$. При отсутствии неисправностей в схеме S_g на её выходе появится значение $g(\widehat{\beta}) = 1$, т. е. значение на выходе схемы A равно 1 и равно $f(\widetilde{a})$.

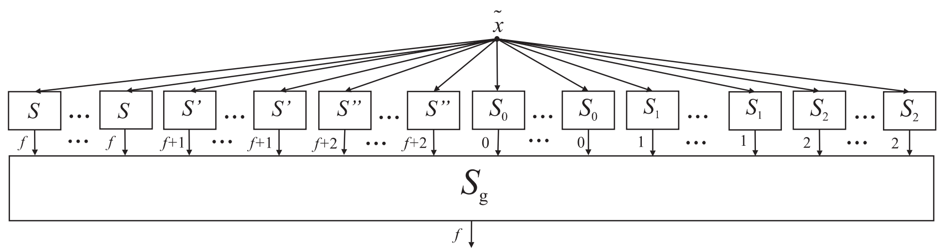

Рис. 1

Пусть на входы схемы A поступает набор $\widetilde{a}$ такой, что $f(\widetilde{a}) = 2$. Тогда при отсутствии неисправностей во всех схемах $S, S', S'', S_0, S_1, S_2$ на входы схемы S_g поступит набор $\widehat{\gamma}$. При отсутствии неисправностей в схеме S_g на её выходе появится значение $g(\widehat{\gamma}) = 2$, т. е. значение на выходе схемы A равно 2 и равно $f(\widetilde{a})$.

Таким образом, во всех случаях при поступлении на входы схемы A набора $\widetilde{a}$ и отсутствии неисправностей в ней на её выходе появляется значение $f(\widetilde{a})$, т. е. схема A реализует функцию f.

Вычислим вероятности ошибок на выходе схемы A.

1) Пусть входной набор $\widetilde{a}$ таков, что $f(\widetilde{a}) = 0$. Вероятность ошибки (появления 1 или 2) на выходе схемы A в этом случае удовлетворяет неравенству

$$P_{f(\widetilde{a})\neq 0}(A, \widetilde{a}) \leqslant v^0 + mpP(S_g) + \sum_{i=2}^{m} C_m^i p^i,$$

где v^0 — вероятность появления 1 или 2 на выходе схемы S_g при поступлении на её входы набора $\widehat{\alpha}$. По лемме 1 верно неравенство

$$\sum_{i=2}^{m} C_m^i p^i (1-p)^{m-i} \leqslant (2^m - m - 1)p^2.$$

Следовательно,

$$P_{f(\widetilde{a})\neq 0}(A,\widetilde{a}) \leqslant v^0 + mpP(S_g) + (2^m - m - 1)p^2. \qquad (1)$$

Аналогично вычисляются вероятности ошибок на других входных наборах схемы A.

2) Пусть входной набор $\widetilde{b}$ таков, что $f(\widetilde{b}) = 1$. Вероятность появления ошибки на выходе схемы A при входном наборе $\widetilde{b}$ удовлетворяет неравенству

$$P_{f(\widetilde{b})\neq 1}(A,\widetilde{b}) \leqslant v^1 + mpP(S_g) + (2^m - m - 1)p^2, \qquad (2)$$

где v^1 — вероятность появления ошибки (т. е. появления 0 или 2) на выходе схемы S_g при входном наборе $\widehat{\beta}$.

3) Пусть входной набор $\widetilde{c}$ таков, что $f(\widetilde{c}) = 2$. Вероятность появления ошибки на выходе схемы A при входном наборе $\widetilde{c}$ вычисляется аналогично и удовлетворяет неравенству

$$P_{f(\widetilde{c})\neq 2}(A,\widetilde{c}) \leqslant v^2 + mpP(S_g) + (2^m - m - 1)p^2, \qquad (3)$$

где v^2 — вероятность появления ошибки на выходе схемы S_g при входном наборе $\widehat{\gamma}$.

Из неравенств (1), (2), (3) следует утверждение теоремы:

$$P(A) \leqslant \max\{v^0, v^1, v^2\} + mpP(S_g) + (2^m - m - 1)p^2.$$

Теорема 2 доказана.

В следующем разделе покажем, как применить результат теоремы 2, например, в случае инверсных неисправностей на выходах базисных элементов.

2. Синтез надёжных схем при инверсных неисправностях на выходах элементов

Пусть B — конечный полный базис в P_3. В этом разделе будем считать, что каждый элемент базиса с функцией φ на любом входном наборе $\widehat{a}$ таком, что $\varphi(\widehat{a}) = \tau$, с вероятностью $1 - 2\varepsilon$ $(\varepsilon \in (0, 1/4))$ выдаёт значение τ, с вероятностью ε выдаёт значение $\tau + 1 (\mathrm{mod}\ 3)$ и с вероятностью ε выдаёт значение $\tau + 2 (\mathrm{mod}\ 3)$. Такие неисправности будем называть *инверсными неисправностями на выходах элементов.*

Очевидно, что при инверсных неисправностях на выходах элементов ненадёжность любого базисного элемента равна 2ε. Следовательно, любую базисную функцию (а также функцию, получаемую из неё отождествлением переменных) можно реализовать с ненадёжностью 2ε, используя один функциональный элемент.

Обозначим через $K(n)$ множество функций, каждая из которых равна одной из переменных $x_1, \ldots, x_n$. Пусть $K = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K(n)$. Отметим, что любую из функций множества K можно реализовать абсолютно надёжно, не используя функциональных элементов.

Ответы на вопросы о нижней и верхней оценках ненадёжности схем, реализующих функцию $f \notin K$, получены в теоремах 3, 5 и следствии 1.

Теорема 3. *Пусть B — произвольный конечный полный базис в P_3, $f \notin K$, а S — любая схема, реализующая функцию f. Тогда при всех $\varepsilon \in (0, 1/4)$ верно неравенство $P(S) \geqslant 2\varepsilon$.*

Доказательство. Пусть f — произвольная функция, удовлетворяющая условию теоремы, а S — любая схема, реализующая функцию f.

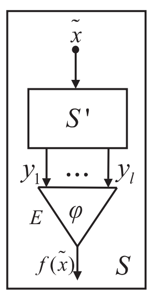

Рис. 2

Поскольку $f \notin K$, схема S содержит хотя бы один функциональный элемент. Выделим в ней (рис. 2) элемент E, выход которого является выходом схемы S (такой элемент будем называть выходным элементом схемы). Пусть этому элементу приписана функция $\varphi(x_1, \ldots, x_l)$ $(l \geqslant 1)$.

Пусть на входы схемы S поступает набор $\widetilde{a}$. В зависимости от неисправностей в схеме S' на входы элемента E поступает некоторый набор длины l с компонентами из множества $\{0, 1, 2\}$. Обозначим через $M(\widetilde{a})$ множество всех таких наборов. Разобьём множество $M(\widetilde{a})$ на подмножества $M_i(\widetilde{a}) = \{(c_1, \ldots, c_l) \mid \varphi(c_1, \ldots, c_l) = i\}$, $i \in \{0, 1, 2\}$.

Обозначим через $v_i(\widetilde{a})$ вероятность появления на входах элемента E набора из множества $M_i(\widetilde{a})$. Очевидно, что $v_0(\widetilde{a}), v_1(\widetilde{a}), v_2(\widetilde{a}) \geqslant 0$ и $v_0(\widetilde{a}) + v_1(\widetilde{a}) + v_2(\widetilde{a}) = 1$.

Пусть $f(\widetilde{a}) = \tau$. Найдём и оценим снизу вероятности $P_{\tau+1}(S, \widetilde{a})$ и $P_{\tau+2}(S, \widetilde{a})$ появления значений $\tau + 1$ и $\tau + 2$ на выходе схемы S:

$$P_{\tau+1}(S, \widetilde{a}) = (1 - v_{\tau+1}(\widetilde{a}) - v_{\tau+2}(\widetilde{a}))\varepsilon + v_{\tau+2}(\widetilde{a})\varepsilon + v_{\tau+1}(\widetilde{a})(1 - 2\varepsilon)$$
$$= \varepsilon + v_{\tau+1}(\widetilde{a})(1 - 3\varepsilon) \geqslant \varepsilon,$$

$$P_{\tau+2}(S, \widetilde{a}) = (1 - v_{\tau+1}(\widetilde{a}) - v_{\tau+2}(\widetilde{a}))\varepsilon + v_{\tau+2}(\widetilde{a})(1 - 2\varepsilon) + v_{\tau+1}(\widetilde{a})\varepsilon$$
$$= \varepsilon + v_{\tau+2}(\widetilde{a})(1 - 3\varepsilon) \geqslant \varepsilon.$$

Тогда $P(S) \geqslant \max\limits_{\widetilde{a}, f(\widetilde{a})=\tau} \{P_{\tau+1}(S,\widetilde{a}) + P_{\tau+2}(S,\widetilde{a}\} \geqslant 2\varepsilon$, т. е. верно неравенство $P(S) \geqslant 2\varepsilon$. Теорема 3 доказана.

Из теоремы 3 следует, что при инверсных неисправностях на выходах элементов ненадёжность любой схемы, содержащей хотя бы один функциональный элемент, не меньше 2ε.

Верхнюю оценку ненадёжности схем в базисе $\{V_3(x_1,x_2)\}$ содержит

Теорема 4 [5]. *В базисе $\{V_3(x_1,x_2)\}$ при любом $n \in \mathbb{N}$ любую функцию $f(x_1,\ldots,x_n)$ можно реализовать такой схемой S, что при всех $\varepsilon \in (0, 1/(4(198 \cdot 3^n + 5n - 344)^2)]$ верно неравенство $P(S) \leqslant 8\varepsilon + 266\varepsilon^2$.*

Теорема 5. *Пусть B — конечный полный базис в P_3. При любом $n \in \mathbb{N}$ любую функцию $f(x_1,\ldots,x_n)$ можно реализовать такой схемой A, что при всех $\varepsilon \in (0, 1/(4\lambda_1(198 \cdot 3^n + 5n - 344)^2)]$ верно неравенство*

$$P(A) \leqslant 2\lambda_2\varepsilon + k_1\varepsilon^2,$$

где λ_1 — число элементов в схеме, реализующей функцию Вебба, λ_2 — число элементов в схеме, реализующей какую-либо функцию $g(x_1,\ldots, x_m) \in G$, $k_1 = 17m\lambda_1^2\lambda_2 + 65(2^m - m - 1)\lambda_1^4$.

Доказательство. По условию теоремы базис B полный, поэтому $V_3(x_1,x_2) \in [B]$. Возьмём произвольную схему, реализующую функцию $V_3(x_1,x_2)$ в рассматриваемом базисе, и обозначим через λ_1 число элементов в ней. Воспользуемся теоремой 4, заменив в ней ε на $\lambda_1\varepsilon$. Тогда при любом $n \in \mathbb{N}$ любую функцию $f(x_1,\ldots,x_n)$ можно реализовать такой схемой S, что при всех $\varepsilon \in (0, 1/(4\lambda_1(198 \cdot 3^n + 5n - 344)^2)]$ верно неравенство $P(S) \leqslant p$, где $p = 8\lambda_1\varepsilon + 266\lambda_1^2\varepsilon^2$.

Пусть $g(x_1,\ldots,x_m)$ — любая функция из множества G ($m \geqslant 3$), а S_g — любая схема, реализующая функцию g в рассматриваемом базисе. Обозначим через λ_2 число элементов в схеме S_g.

Тогда для ненадёжности $P(S_g)$ схемы S_g и вероятностей ошибок v^0, v^1, v^2 на её характеристических наборах выполняются неравенства

$$P(S_g) \leqslant 2\lambda_2\varepsilon, \quad v^0 \leqslant 2\lambda_2\varepsilon, \quad v^1 \leqslant 2\lambda_2\varepsilon, \quad v^2 \leqslant 2\lambda_2\varepsilon.$$

Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)$ — произвольная функция трёхзначной логики. По теореме 2 её можно реализовать такой схемой A, что

$$\begin{aligned} P(A) &\leqslant \max\{v^0, v^1, v^2\} + mpP(S_g) + (2^m - m - 1)p^2 \\ &\leqslant 2\lambda_2\varepsilon + 2m\lambda_2\varepsilon\big(8\lambda_1\varepsilon + 266\lambda_1^2\varepsilon^2\big) + (2^m - m - 1)\big(8\lambda_1\varepsilon + 266\lambda_1^2\varepsilon^2\big)^2 \end{aligned}$$

В этом неравенстве оценим сверху $8\lambda_1\varepsilon+266\lambda_1^2\varepsilon^2$ и $\bigl(8\lambda_1\varepsilon+266\lambda_1^2\varepsilon^2\bigr)^2$, а затем и $2m\lambda_2\varepsilon\bigl(8\lambda_1\varepsilon+266\lambda_1^2\varepsilon^2\bigr)+(2^m-m-1)\bigl(8\lambda_1\varepsilon+266\lambda_1^2\varepsilon^2\bigr)^2$.

Поскольку $n\geqslant 1$, $\lambda_1\geqslant 1$ и $\varepsilon\leqslant 1/(4\lambda_1(198\cdot 3^n+5n-344)^2)$, верно неравенство

$$\varepsilon\leqslant 1/(4(198\cdot 3+5-344)^2)\leqslant 3,9\cdot 10^{-6}.$$

Имеем

$$\begin{aligned}8\lambda_1\varepsilon+266\lambda_1^2\varepsilon^2&\leqslant 8\lambda_1\varepsilon+266\lambda_1^2\varepsilon\cdot 3{,}9\cdot 10^{-6}\\&\leqslant 8\lambda_1^2\varepsilon+0{,}0011\lambda_1^2\varepsilon\leqslant 8{,}0011\lambda_1^2\varepsilon,\end{aligned}$$

$$\bigl(8\lambda_1\varepsilon+266\lambda_1^2\varepsilon^2\bigr)^2\leqslant 64,02\lambda_1^4\varepsilon^2,$$

$$\begin{aligned}&2m\lambda_2\varepsilon\bigl(8\lambda_1\varepsilon+266\lambda_1^2\varepsilon^2\bigr)+(2^m-m-1)\bigl(8\lambda_1\varepsilon+266\lambda_1^2\varepsilon^2\bigr)^2\\&\qquad\leqslant 2m\lambda_2\varepsilon 8{,}0011\lambda_1^2\varepsilon+64{,}02(2^m-m-1)\lambda_1^4\varepsilon^2\\&\qquad\qquad\leqslant\bigl(17m\lambda_1^2\lambda_2+65(2^m-m-1)\lambda_1^4\bigr)\varepsilon^2.\end{aligned}$$

Полагаем $k_1=17m\lambda_1^2\lambda_2+65(2^m-m-1)\lambda_1^4$. Тогда $P(A)\leqslant 2\lambda_2\varepsilon+k_1\varepsilon^2$. Теорема 5 доказана.

Из теорем 3 и 5 следует, что ненадёжность построенных при доказательстве теоремы 5 схем (и содержащих хотя бы один функциональный элемент) по порядку равна ε. Таким образом, в произвольном полном конечном базисе любую функцию $f\notin K$ можно реализовать надёжной схемой. Напомним, что в теории надёжности управляющих систем *надёжной* называют схему, наибольшая вероятность ошибки на выходе (ненадёжность) которой по порядку равна ненадёжности одного базисного элемента.

Замечание 2. Чтобы верхняя оценка ненадёжности в теореме 5 была точнее, в качестве схемы S_g следует выбирать схему, реализующую функцию $g\in G$ и содержащую как можно меньше элементов. Ограничение на ε также можно ослабить, если в качестве схемы, реализующей функцию Вебба, взять минимальную по числу элементов схему, реализующую эту функцию.

Следствие 1. *Пусть B — конечный полный базис в P_3, $B\cap G_m\neq\varnothing$. Тогда при любом $n\in\mathbb{N}$ любую функцию $f(x_1,\ldots,x_n)$ можно реализовать такой схемой A, что при всех $\varepsilon\in(0,1/(4\lambda_1(198\cdot 3^n+5n-344)^2)]$ верно неравенство $P(A)\leqslant 2\varepsilon+k_2\varepsilon^2$, где λ_1 — число элементов в схеме, реализующей функцию Вебба, $k_2=17m\lambda_1^2+65(2^m-m-1)\lambda_1^4$.*

Доказательство. Поскольку $B \cap G_m \neq \varnothing$, среди базисных элементов содержится функциональный элемент, реализующий функцию $g(x_1, \ldots, x_m) \in G_m$. Тогда $\lambda_2 = 1$ и по теореме 5 получим утверждение следствия. Следствие 1 доказано.

Замечание 3. Утверждение следствия 1 также верно, если из базисной функции отождествлением переменных можно получить функцию $g \in G_m$.

Введём понятие асимптотически оптимальной по надёжности схемы.

Пусть $P_\varepsilon(f) = \inf P(S)$, где инфимум берётся по всем схемам S из ненадёжных элементов, реализующим функцию f. Схема A из ненадёжных элементов, реализующая функцию f, называется *асимптотически оптимальной по надёжности*, если $P(A) \sim P_\varepsilon(f)$ при $\varepsilon \to 0$, т. е.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{P_\varepsilon(f)}{P(A)} = 1.$$

Из теоремы 3 и следствия 1 получаем следующий результат: если конечный полный базис B таков, что $B \cap G \neq \varnothing$, то для любой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, отличной от функций $x_1, \ldots, x_n$, построенная при доказательстве теоремы 5 схема является не просто надёжной, а асимптотически оптимальной по надёжности и функционирует с ненадёжностью, асимптотически равной 2ε при $\varepsilon \to 0$ и $\varepsilon \leqslant 1/(4\lambda_1(198 \cdot 3^n + 5n - 344)^2)$, где λ_1 — наименьшее число элементов, достаточное для реализации функции Вебба в рассматриваемом базисе (см. замечание 2).

Цель дальнейших исследований авторов — получить нетривиальные нижние оценки ненадёжности схем в базисе Россера — Туркетта и базисе, состоящем из функции Вебба.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Аксенов С. И.** О надёжности схем над произвольной полной системой функций при инверсных неисправностях на выходах элементов // Изв. вузов. Поволжский регион. Естеств. науки. — № 6. — Пенза: ИИЦ ПГУ, 2005. — С. 42–55.
2. **Алехина М. А.** О надёжности и сложности схем в базисе $\{x|y\}$ при инверсных неисправностях на выходах элементов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 2005. — Т. 12, № 2. — С. 3–11.
3. **Алехина М. А., Аксенов С. И., Васин А. В.** О функциях и схемах, применяемых для повышения надёжности схем // Изв. вузов. Поволжский регион. Физ.-мат. науки. — № 3. — Пенза: ИИЦ ПГУ, 2008. — С. 30–38.

4. **Алехина М. А., Барсукова О. Ю.** О надёжности схем, реализующих функции из P_3 // Изв. вузов. Поволжский регион. Физ.-мат. науки. — Пенза: ИИЦ ПГУ, 2012. — № 1. — С. 57–65.
5. **Алехина М. А., Барсукова О. Ю.** Верхняя оценка ненадёжности схем в базисе, состоящем из функции Вебба // Мат. IX междунар. молодёж. школы по дискретной математике и её приложениям (Москва, 16–21 сентября 2013 г.). — М.: Изд-во Ин-та прикл. математики им. М. В. Келдыша РАН, 2013. — С. 9–12.
6. **Алехина М. А., Васин А. В.** О надёжности схем в базисах, содержащих функции не более чем трех переменных // Уч. зап. Казанск. гос. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2009. — Т. 151, кн. 2. — С. 25–35.
7. **Барсукова О. Ю.** О возможности применения одного метода повышения надёжности к схемам, реализующим функции из P_3 // Мат. междунар. научно-практ. конф. «Молодежь и наука: модернизация и инновационное развитие страны» (Пенза, 15–16 сентября 2011 г.). 1 ч. — Пенза: Изд-во ПГУ, 2011. — С. 110–112.
8. **Виноградов Ю. А.** О синтезе трёхзначных схем // Мат. вопросы кибернетики. Вып. 3. — М.: Наука, 1991. — С. 187–198.
9. **Виноградов Ю. А., Иорданский М. А.** Машинный анализ схем ЭВМ // Пробл. кибернетики. Вып. 24. — М.: Наука, 1972. — С. 147–160.
10. **Ларионов В. Б.** Замкнутые классы k-значной логики, содержащие классы монотонных или самодвойственных функций: Дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.09 — М., 2010. — 158 с.
11. Моделирующие системы с многозначными гибридным кодированием. — Киев: Наук. думка, 1980. — 192 с.
12. **Alekhina M. A.** Synthesis and complexity of asymptotically optimal circuits with unreliable gates // Fundam. Informaticae. — 2010. — Vol. 104, N 3. — P. 219–225.
13. **Von Neuman J.** Probabilistic logics and the synthesis of reliable organisms from unreliable components // Automata Studies. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1956. — P. 43–98.

Алехина Марина Анатольевна,
e-mail: ama@sura.ru
Барсукова Оксана Юрьевна,
e-mail: kuzya_7@mail.ru

Статья поступила
11 ноября 2013 г.

Переработанный вариант —
21 февраля 2014 г.