ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—август 2014. Том 21, № 4. С. 80–88

УДК 519.174

ДИСКРЕТНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА НА ДВОЙНОМ ЦИРКУЛЯНТЕ

А. М. Нажмиденова, А. Л. Пережогин

Аннотация. Исследуется дискретная динамическая система на двойном циркулянте с аддитивными и мультипликативными функциями в вершинах. Описаны все циклы и неподвижные точки функционального графа данной системы.

Ключевые слова: дискретная динамическая система, циркулянт, генная сеть, регуляторный контур, функциональный граф.

Введение

Пусть $G = (V, D)$ — ориентированный граф с множеством вершин $V = \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Рассмотрим следующую дискретную динамическую систему с графом-носителем G. В каждый момент времени вершины графа G помечены элементами $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ группы вычетов Z_p по модулю p. Кортеж $\widetilde{v} = (v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}) \in Z_p^n$ называется *состоянием системы*. В следующий момент времени (такт работы системы) состояние системы меняется, и динамика его изменения определяется отображением $A_{f,p} : Z_p^n \to Z_p^n$, где $f = (f_0, f_1, \ldots, f_{n-1})$. Для каждой вершины i в новый момент времени изменение метки задаётся отображением $f_i : Z_p^{k-1} \to Z_p$. Аргументами функции f_i являются старые метки тех вершин, из которых выходят дуги, входящие в вершину i.

Функциональным графом $H_{G,f}$ называется ориентированный граф, вершинами которого являются элементы из Z_p^n, причём дуга из вершины $\widetilde{v}$ идёт в вершину $\widetilde{u}$ тогда и только тогда, когда $A_{f,p}(\widetilde{v}) = \widetilde{u}$. Известно, что функциональный граф любого преобразования конечного множества состоит из нескольких (быть может, одной) компонент связности. Каждая компонента содержит единственный контур (в частности, петлю, которая соответствует неподвижной точке отображения). Некоторые вершины контура являются корнями деревьев, все дуги которых ориентированы к корню [6].

В последнее время наиболее активно изучается следующий частный случай этой системы. В качестве графа-носителя рассматривается граф циркулянт $G_{n,k} = (V, D)$, $V = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $D = \{\overrightarrow{ij} \mid (j-i) \bmod n \leqslant k-1,\ i \neq j\}$. В вершинах заданы либо аддитивная функция (через v_i' обозначим i-ю компоненту нового состояния)

$$v_i' = \begin{cases} v_i + 1, & \text{если } \sum\limits_{j=1}^{k-1} v_{i-j} = 0 \text{ и } v_i < p-1, \\ v_i - 1, & \text{если } \sum\limits_{j=1}^{k-1} v_{i-j} > 0 \text{ и } v_i > 0, \\ v_i & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

либо мультипликативная функция

$$v_i' = \begin{cases} v_i + 1, & \text{если } \prod\limits_{j=1}^{k-1} v_{i-j} = 0 \text{ и } v_i < p-1, \\ v_i - 1, & \text{если } \prod\limits_{j=1}^{k-1} v_{i-j} > 0 \text{ и } v_i > 0, \\ v_i & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

(Здесь и далее сумма и разность в индексах берутся по модулю n.) Такая динамическая система моделирует функционирование регуляторного контура: частного случая генной сети [2, 5, 8, 9]. Вершины графа-носителя соответствуют различным химическим веществам внутри клетки, метки в вершинах задают концентрацию этих веществ, а функции и дуги задают правила, по которым концентрация веществ меняется в следующий момент времени. Для этой системы найдены все неподвижные точки и в некоторых частных случаях описаны циклы и цепи графа функционирования [1, 3, 7]. В [4] описана структура функционального графа дискретной динамической системы на обобщённом циркулянте с линейными функциями в вершинах.

Пусть в каждый момент времени можно влиять на концентрацию любого вещества в клетке. В функцию в каждой вершине вводим новый аргумент (управляющий элемент) $g_i(\widetilde{v}, t)$, который в общем случае может зависеть как от предыдущего состояния системы, так и от момента времени. В данной статье рассматривается функционирование дискретной динамической системы на двух циркулянтах, в вершинах одного заданы аддитивные функции, в вершинах другого — мультипликативные, и в каждую функцию в вершине введён управляющий элемент, равный значению соответствующей вершины другого циркулянта в предыдущий момент времени. Для данной системы удалось полностью описать все циклы графа функционирования.

1. Описание системы на двойном циркулянте

Введём операторы f_- и f_+, которые соответственно уменьшают и увеличивают аргумент на 1 пока это возможно, т. е. для любого $a \in Z_p$ имеем

$$f_-(a) = \begin{cases} a-1, & \text{если } a > 0, \\ a, & \text{если } a = 0. \end{cases}$$

$$f_+(a) = \begin{cases} a+1, & \text{если } a < p-1, \\ a, & \text{если } a = p-1. \end{cases}$$

Рассмотрим граф, состоящий из двух циркулянтов, причём в одном дуги направлены в одну сторону, во втором — в другую, и проведены дуги в обоих направлениях между вершинами с одинаковыми номерами разных циркулянтов. В каждый момент времени кортеж весов в вершинах первого циркулянта будем обозначать через $(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$, а второго циркулянта — через $(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$. Таким образом, состоянием системы будет кортеж $\widetilde{v} = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$. Компоненты состояния системы в следующий момент времени пересчитываются по правилам:

$$x'_i = \begin{cases} f_+(x_i), & \text{если } y_i \prod_{j=1}^{k-1} x_{i-j} = 0, \\ f_-(x_i) & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{1}$$

$$y'_i = \begin{cases} f_+(y_i), & \text{если } x_i + \sum_{j=1}^{k-1} y_{i+j} = 0, \\ f_-(y_i) & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{2}$$

Обозначим через $H_{n,k,p}$ функциональный граф получившейся дискретной динамической системы.

Зафиксируем параметры n, k и p. Рассмотрим произвольный циклический кортеж $\widetilde{z} = (z_0, \ldots, z_{n-1})$. Введём следующие обозначения:

$$\mathrm{IN}_L(z_i) = z_{i-k+1} z_{i-k+2} \ldots z_{i-1}, \quad \mathrm{IN}_R(z_i) = z_{i+1} z_{i+2} \ldots z_{i+k-1}.$$

Для любого слова $\widetilde{z}'$ в алфавите Z_p будем писать $\widetilde{z}' = \mathbf{0}$, если $\widetilde{z}'$ состоит из одних нулей, и $\widetilde{z}' > \mathbf{0}$, если в нём нет нулей. Если состояние $\widetilde{v} = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$ нашей системы в следующий момент времени переходит в состояние $\widetilde{v}' = (x'_0, x'_1, \ldots, x'_{n-1}, y'_0, y'_1, \ldots, y'_{n-1})$, то для i-х компонент нового состояния будем писать $x'_i = A(x_i)$ и $y'_i =$

$A(y_i)$. Тогда функционирование (1) и (2) системы можно переписать следующим образом:

$$x'_i = A(x_i) \quad = \quad \begin{cases} f_-(x_i), & \text{если } y_i > 0 \text{ и } \mathrm{IN}_L(x_i) > \mathbf{0}, \\ f_+(x_i) & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{3}$$

$$y'_i = A(y_i) \quad = \quad \begin{cases} f_+(y_i), & \text{если } x_i = 0 \text{ и } \mathrm{IN}_R(y_i) = \mathbf{0}, \\ f_-(y_i) & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{4}$$

2. Неподвижные точки

Теорема 1. *Кортеж* $\widetilde{v} = (x_0, \ldots, x_{n-1}, y_0, \ldots, y_{n-1}) \in Z_p^{2n}$ *является неподвижной точкой графа* $H_{n,k,p}$ *тогда и только тогда, когда*

(i) $x_i,\, y_i \in \{0,\, p-1\}, \quad i = 0, \ldots, n-1;$

(ii) $x_i = p - 1 - y_i, \quad i = 0, \ldots, n-1;$

(iii) *циклическое слово* $x_0 \ldots x_{n-1}$ *не содержит подслов вида* $0(p-1)^l 0$ *для любого* l, $0 \leqslant l < k-1$.

Доказательство. Пусть кортеж $\widetilde{v} \in Z_p^{2n}$ является неподвижной точкой. Тогда $A(x_i) = x_i,\ A(y_i) = y_i,\ i = 0, \ldots, n-1$. Из (3) и (4) имеем $x_i,\, y_i \in \{0,\, p-1\}$.

Если $A(x_i) = x_i = 0$, то $A(x_i) = f_-(x_i)$ и в силу (3) имеем $y_i = p - 1$ и

$$x_{i-1} = x_{i-2} = \cdots = x_{i-k+1} = p - 1. \tag{5}$$

Если $A(y_i) = y_i = p - 1$, то $A(y_i) = f_+(y_i)$ и ввиду (4) имеем $x_i = 0$ и

$$y_{i+1} = y_{i+2} = \cdots = y_{i+k-1} = 0. \tag{6}$$

Следовательно, $x_i = p - 1 - y_i$ для любого $i = 0, \ldots, n-1$. Тогда из (6) получаем $x_{i+1} = x_{i+2} = \cdots = x_{i+k-1} = p - 1$. Таким образом, вспоминая (5), приходим к выводу, что в циклическом слове $x_0 \ldots x_{n-1}$ любые два нуля разделяются блоком из $p - 1$ длины не менее $k - 1$. Необходимость доказана. С другой стороны, нетрудно видеть, что любой кортеж, удовлетворяющий условию теоремы, является неподвижной точкой графа $H_{n,k,p}$. Теорема 1 доказана.

Следствие 1. *Число* $S_{n,k}$ *неподвижных точек графа* $H_{n,k,p}$ *удовлетворяет рекуррентному соотношению*

$$S_{n,k} = S_{n-1,k} + S_{n-k,k}$$

с начальными условиями $S_{1,k} = S_{2,k} = \ldots = S_{k-1,k} = 1, \quad S_{k,k} = k.$

Доказательство. В силу теоремы 1 $S_{n,k}$ равно количеству слов $x_0 \dots x_{n-1}$ в алфавите $\{0,1\}$ таких, что в циклическом слове $x_0 \dots x_{n-1}$ нет подслов вида 01^l0, $0 \leqslant l < k-1$. Обозначим через $W_{n,k}$ множество таких слов. Очевидно, что

$$|W_{1,k}| = |W_{2,k}| = \ldots = |W_{k-1,k}| = 1, \quad |W_{k,k}| = k.$$

Для произвольного $n > k$ построим биекцию φ между множествами $W_{n,k}$ и $W_{n-1,k} \cup W_{n-k,k}$.

Пусть слово $\widetilde{x} = x_0x_1 \dots x_{n-1}$ принадлежит множеству $W_{n,k}$ и в нём перед первым нулём имеется t единиц, а после последнего нуля находится s единиц. Если в слове нет нулей, то полагаем $t = 0$ и $s = n$. По условию $s + t \geqslant k - 1$. Рассмотрим три случая.

Случай 1: $s > 0$ и $s + t > k - 1$. Тогда $\varphi(\widetilde{x}) = x_0x_1 \dots x_{n-2} \in W_{n-1,k}$.

Случай 2: $s = 0$. Тогда $\varphi(\widetilde{x}) = x_0x_1 \dots x_{n-k-1} \in W_{n-k,k}$, причём в начале полученного слова стоит $t \geqslant k - 1$ единиц.

Случай 3: $s > 0$ и $s+t = k-1$. Тогда $\varphi(\widetilde{x}) = x_0x_1 \dots x_{n-k-1} \in W_{n-k,k}$, причём в начале полученного слова стоит $t < k - 1$ единиц.

Нетрудно проверить, что построенное отображение $\varphi : W_{n,k} \to W_{n-1,k} \cup W_{n-k,k}$ является биекцией. Следствие 1 доказано.

3. Циклы

Лемма 1. *Если $y_i = 0$, то $A^2(y_i) = 0$.*

Доказательство. Поскольку $y_i = 0$, из (3) следует, что $A(x_i) = f_+(x_i) > 0$, тогда в силу (4) получаем $A(A(y_i)) = f_-(A(y_i))$. Так как $A(y_i) \leqslant 1$, приходим к требуемому равенству. Лемма 1 доказана.

Следствие 2. *Пусть состояние $\widetilde{v} = (x_0, \dots, x_{n-1}, y_0, \dots, y_{n-1}) \in Z_p^{2n}$ в графе $H_{n,k,p}$ принадлежит циклу и для некоторого $0 \leqslant i \leqslant n-1$ выполняется $A(y_i) = f_+(y_i)$ и $A(A(y_i)) = f_+(A(y_i))$. Тогда для любых t и $0 \leqslant j \leqslant k-1$ имеем $A^t(y_{i+j}) = 0$ и $A^t(x_{i+j}) = p - 1$.*

Доказательство. Поскольку $A(y_i) = f_+(y_i)$ и $A(A(y_i)) = f_+(A(y_i))$, ввиду (4) имеем $\mathrm{IN}_R(y_i) = \mathrm{IN}_R(A(y_i)) = \mathbf{0}$. Тогда по лемме 1 для любых $t \geqslant 0$ и $0 \leqslant j \leqslant k-1$ получаем $A^t(y_{i+j}) = 0$, стало быть, $A^t(x_{i+j}) = f_+(A^{t-1}(x_{i+j}))$. Так как $\widetilde{v}$ лежит в цикле функционального графа, имеем $A^t(x_{i+j}) = p - 1$. Следствие 2 доказано.

Теорема 2. *Для любых n, k и p в графе $H_{n,k,p}$ нет циклов длины больше двух.*

Доказательство. Если в $H_{n,k,p}$ существует цикл длины больше 2, то найдутся $0 \leqslant i \leqslant n-1$ и состояние $\widetilde{v} = (x_0, \ldots, x_{n-1}, y_0, \ldots, y_{n-1})$ в этом цикле такие, что

$$y_i < p-1, \quad A(y_i) = f_+(y_i), \quad A(A(y_i)) = f_+(A(y_i)). \tag{7}$$

Тогда в силу (4) имеем $x_i = A(x_i) = 0$, следовательно, $A(x_i) = f_-(x_i)$. Ввиду (3) получаем $y_i > 0$. Тем самым для любых $1 \leqslant t \leqslant 3$ и $1 \leqslant j \leqslant k-1$ по формуле (4) справедливо

$$A^t(y_{i-j}) = f_-(A^{t-1}(y_{i-j})).$$

Это возможно только в одном из двух случаев.

Случай 1. Для любого $1 \leqslant j \leqslant k-1$ справедливо $A^2(y_{i-j}) = A^3(y_{i-j}) = 0$. Тогда по лемме 1 для любого $t \geqslant 0$ верно $A^t(y_{i-j}) = 0$. Поскольку состояния принадлежат циклу, получаем, что $A^t(x_{i-j}) = p-1$, значит, $A^2(x_i) = 0$. Из (7) по следствию 2 имеем $\mathrm{IN}_R(A^2(y_i)) = \mathbf{0}$. Из (4) следует, что $A(A^2(y_i)) = f_+(A^2(y_i))$. Таким образом, y_i постоянно увеличивается, стало быть, для любого $t \geqslant 0$ верно $A^t(y_i) = p-1$, что противоречит (7).

Случай 2. Существует $1 \leqslant j \leqslant k-1$ такой, что $y_{i-j} \geqslant 3$. Поскольку состояния лежат в цикле, существует $m \geqslant 3$ такое, что $A(A^m(y_{i-j})) = f_+(A^m(y_{i-j}))$ и $A(A^{m+1}(y_{i-j})) = f_+(A^{m+1}(y_{i-j}))$. Тогда по следствию 2 для любого $t \geqslant 0$ верно $A^t(y_i) = 0$, что противоречит (7). Теорема 2 доказана.

Опишем все пары вершин $\widetilde{v}$ и $\widetilde{v}'$ графа $H_{n,k,p}$, образующих цикл длины не более двух, т. е. удовлетворяющих условию

$$A_{f,p}(\widetilde{v}) = \widetilde{v}', \quad A_{f,p}(\widetilde{v}') = \widetilde{v}. \tag{8}$$

Для этого рассмотрим взаимосвязь пар координат (x_i, y_i) кортежа $\widetilde{v}$ и (x'_i, y'_i) кортежа $\widetilde{v}'$.

Следующая лемма вытекает из определений операторов f_- и f_+.

Лемма 2 (схема ++ или −−). *Справедливы следующие утверждения:*

(i) $x'_i = f_-(x_i)$ *и* $x_i = f_-(x'_i)$ ($y'_i = f_-(y_i)$ *и* $y_i = f_-(y'_i)$) *тогда и только тогда, когда* $x_i = x'_i = 0$ ($y_i = y'_i = 0$);

(ii) $x'_i = f_+(x_i)$ *и* $x_i = f_+(x'_i)$ ($y'_i = f_+(y_i)$ *и* $y_i = f_+(y'_i)$) *тогда и только тогда, когда* $x_i = x'_i = p-1$ ($y_i = y'_i = p-1$).

Следствие 3 (схемы $++|++$ и $--|--$)**.** *Для 2-цикла невозможны следующие ситуации*:

(a) $x'_i = f_-(x_i)$, $x_i = f_-(x'_i)$ *и* $y'_i = f_-(y_i)$, $y_i = f_-(y'_i)$;

(b)$x'_i = f_+(x_i)$, $x_i = f_+(x'_i)$ *и* $y'_i = f_+(y_i)$, $y_i = f_+(y'_i)$.

Следствие 4 (схема $++\,|\,--$)**.** *Для i-х компонент справедливы соотношения* $x'_i = f_+(x_i)$, $x_i = f_+(x'_i)$, $y'_i = f_-(y_i)$ *и* $y_i = f_-(y'_i)$ *тогда и только тогда, когда* $(x_i, y_i) = (x'_i, y'_i) = (p-1, 0)$.

Следствие 5 (схема $--\,|\,++$)**.** *Для i-х компонент справедливы соотношения* $x'_i = f_-(x_i)$, $x_i = f_-(x'_i)$, $y'_i = f_+(y_i)$ *и* $y_i = f_+(y'_i)$ *тогда и только тогда, когда* $(x_i, y_i) = (x'_i, y'_i) = (0, p-1)$ *и выполнены условия*

(i) $\mathrm{IN}_L(x_i) = \mathrm{IN}_L(x'_i) = (p-1)^{k-1}$,

(ii) $\mathrm{IN}_R(y_i) = \mathrm{IN}_R(y'_i) = \mathbf{0}$.

Доказательство. Достаточность проверяется непосредственно. Докажем необходимость. Имеем $x'_i = f_-(x_i)$ и $x_i = f_-(x'_i)$. По лемме 2 $x_i = x'_i = 0$, и из (3) получаем $\mathrm{IN}_L(x_i) > \mathbf{0}$, $\mathrm{IN}_L(x'_i) > \mathbf{0}$. Из последних неравенств и (4) для любого $1 \leqslant m \leqslant k-1$ имеем $y_{i-m} = f_-(y'_{i-m})$ и $y'_{i-m} = f_-(y_{i-m})$. По лемме 2 $y_{i-m} = y'_{i-m} = 0$, т. е. $\mathrm{IN}_L(y_i)$=$\mathrm{IN}_L(y'_i)$=$\mathbf{0}$. Тогда из (3) вытекает, что $x_{i-m} = f_+(x'_{i-m})$ и $x'_{i-m} = f_+(x_{i-m})$, и $\mathrm{IN}_L(x_i) = \mathrm{IN}_L(x'_i) = (p-1)^{k-1}$ по лемме 2.

Доказательство для правой части аналогично. Следствие 5 доказано.

Лемма 3 (схема $+-|+-$)**.** *Следующие утверждения эквивалентны*:

(i) $x'_i = f_+(x_i)$, $x_i = f_-(x'_i)$;

(ii) $y'_i = f_+(y_i)$, $y_i = f_-(y'_i)$;

(iii.a) $(x_i, y_i) = (0, 0)$, $(x'_i, y'_i) = (1, 1)$,

(iii.b) $\mathrm{IN}_R(y_i) = \mathbf{0}$,

(iii.c) $\mathrm{IN}_L(x'_i) > \mathbf{0}$.

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii). Поскольку $x'_i = f_+(x_i)$, $x'_i > 0$, из (4) следует, что $y_i = f_-(y'_i)$. Так как $x_i = f_-(x'_i)$, в силу (3) получаем $y'_i > 0$ и $y'_i = f_+(y_i)$ по лемме 2.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Поскольку $y'_i = f_+(y_i)$, имеем $y'_i > 0$ и ввиду (4) $x_i = f_-(x'_i)$. Предположим, что $x'_i = f_-(x_i)$. Тогда $x'_i = x_i = 0$ по лемме 2. Так как $y_i = f_-(y'_i)$, в силу (4) существует $1 \leqslant m \leqslant t-1$ такое, что $y'_{i+m} > 0$. Поскольку $\mathrm{IN}_R(y_i) = \mathbf{0}$, то $y_{i+m} = 0$. Тогда $y_{i+m} = f_-(y'_{i+m})$, $y'_{i+m} = f_+(y_{i+m})$ и $x_{i+m} = 0$, что противоречит (3) и тому, что $x_i = f_-(x'_i)$. Следовательно, $x'_i = f_+(x_i)$ и $x_i = f_-(x'_i)$.

(i), (ii) $\Rightarrow$ (iii). Так как $y'_i = f_+(y_i)$, имеем $x_i = 0$ и $\mathrm{IN}_R(y_i) = \mathbf{0}$. Тогда $x'_i = 1$. Поскольку $x_i = f_-(x'_i)$, то $\mathrm{IN}_L(x'_i) > \mathbf{0}$.

Остаётся показать, что $y_i = 0$. Предположим, что $y_i > 0$. Тогда из (4) для любого $1 \leqslant m \leqslant t-1$ имеем $y_{i-m} = f_-(y'_{i-m})$ и $y'_{i-m} = f_-(y_{i-m})$. По лемме 2 $y_{i-m} = y'_{i-m} = 0$. Тогда из (3) получаем $x_{i-m} = f_+(x'_{i-m})$ и $x'_{i-m} = f_+(x_{i-m})$ и по лемме 2 $x_{i-m} = p-1$, что противоречит (3) и тому, что $x'_i = f_+(x_i)$. Значит, $y_i = 0$, а следовательно, $y'_i = 1$.

(iii) $\Rightarrow$ (i), (ii). Непосредственно следует из (3) и (4). Лемма 3 доказана.

Из лемм 2 и 3 и следствий вытекает

Теорема 3. *Для вершин* $\widetilde{v} = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$ *и* $\widetilde{v}' = (x'_0, x'_1, \ldots, x'_{n-1}, y'_0, y'_1, \ldots, y'_{n-1})$ *выполнено* $A_{f,p}(\widetilde{v}) = \widetilde{v}'$, $A_{f,p}(\widetilde{v}') = \widetilde{v}$ *тогда и только тогда, когда* $x_i, y_i, x'_i, y'_i \in \{0, 1, p-1\}$ *для всех* $0 \leqslant i \leqslant n-1$ *и выполнено одно из следующих условий*:

(i) $(x_i, y_i) = (0,0)$, $(x'_i, y'_i) = (1,1)$, $\mathrm{IN}_L(x'_i) > \mathbf{0}$, $\mathrm{IN}_R(y_i) = \mathbf{0}$;

(ii) $(x_i, y_i) = (x'_i, y'_i) = (0, p-1)$, $\mathrm{IN}_L(x_i) = \mathrm{IN}_R(x_i) = \mathrm{IN}_L(x'_i) = \mathrm{IN}_R(x'_i) = (p-1)^{k-1}$, $\mathrm{IN}_L(y_i) = \mathrm{IN}_R(y_i) = \mathrm{IN}_L(y'_i) = \mathrm{IN}_R(y'_i) = \mathbf{0}$;

(iii) $(x_i, y_i) = (x'_i, y'_i) = (p-1, 0)$.

Опишем строение пар вершин из теоремы 3. Рассмотрим блоки

$$X = \begin{bmatrix} p-1 \\ p-1 \end{bmatrix}, \ Y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ A_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ B_1 = \begin{bmatrix} p-1 \\ p-1 \end{bmatrix}$$

и множества блоков

$$A_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & (p-1)^{\alpha_1} & 0\ldots0 & (p-1)^{\alpha_t} & 0 \\ 1 & (p-1)^{\alpha_1} & 1\ldots1 & (p-1)^{\alpha_t} & 1 \end{bmatrix} \,\middle|\, \alpha_i \geqslant 0, \ 1 \leqslant i \leqslant t, \ t \geqslant 0 \right\},$$

$$B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0^{\alpha_1} & 0\ldots0 & 0^{\alpha_t} & 0 \\ 1 & 0^{\alpha_1} & 1\ldots1 & 0^{\alpha_t} & 1 \end{bmatrix} \,\middle|\, \alpha_i \geqslant 0, \ 1 \leqslant i \leqslant t, \ t \geqslant 0 \right\},$$

$$A_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & (p-1)^{\beta_1} & 1\ldots1 & (p-1)^{\beta_s} & 1 \\ 0 & (p-1)^{\beta_1} & 0\ldots0 & (p-1)^{\beta_s} & 0 \end{bmatrix} \,\middle|\, \beta_i \geqslant 0, \ 1 \leqslant i \leqslant s, \ s \geqslant 0 \right\},$$

$$B_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0^{\beta_1} & 1\ldots1 & 0^{\beta_s} & 1 \\ 0 & 0^{\beta_1} & 0\ldots0 & 0^{\beta_s} & 0 \end{bmatrix} \,\middle|\, \beta_i \geqslant 0, \ 1 \leqslant i \leqslant s, \ s \geqslant 0 \right\}.$$

Здесь первая строка соответствует кортежу $\widetilde{v}$, а вторая — $\widetilde{v}'$. Пара состояний v и v' образуют цикл длины не более двух тогда и только тогда, когда

$$\begin{pmatrix} v \\ v' \end{pmatrix} \in \{(Z_1 X^{d_1} Z_2 X^{d_2} \ldots Z_q X^{d_q} \mid W_1 Y^{d_1} W_2 Y^{d_2} \ldots W_q Y^{d_q})\},$$

где $q \geqslant 1$ и для всех $1 \leqslant i \leqslant q$ имеем $d_i \geqslant k-1$, $Z_i \in A_j$, $W_i \in B_j$, $1 \leqslant j \leqslant 3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Григоренко Е. Д., Евдокимов А. А., Лихошвай В. А., Лобарева И. А.** Неподвижные точки и циклы автоматных отображений, моделирующих функционирование генных сетей // Вестн. ТГУ. — 2005 — № 14. — С. 206–212.
2. **Демиденко Г. В., Колчанов Н. А., Лихошвай В. А., Матушкин Ю. Г., Фадеев С. И.** Математическое моделирование регулярных контуров генных сетей // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 2004. — Т. 44, № 12. — С. 2276–2295.
3. **Евдокимов А. А., Лиховидова Е.О.** Дискретная модель генной сети циркулянтного типа с пороговыми функциями // Вестн. ТГУ. Управление, вычислительная техника и информатика. — 2008 — Т. 3, № 2. — С. 18–21.
4. **Евдокимов А. А., Пережогин А. Л.** Дискретные динамические системы циркулянтного типа с линейными функциями в вершинах сети // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2011. — Т. 18, № 3. — С. 39–48.
   Evdokimov A. A., Perezhogin A. L. Discrete dynamical systems of a circulant type with linear functions at the vertices of a network // J. Appl. Industr. Math. — 2012. — Vol. 6, N 2. — P. 160–166.
5. **Лихошвай В. А., Голубятников В. П., Демиденко Г. В., Евдокимов А. А., Матвеева И. И., Фадеев С. И.** Теория генных сетей // Системная компьютерная биология. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2008. — С. 397–480.
6. **Оре О.** Теория графов. — М.: Наука, 1980. — 336 с.
7. **Evdokimov A. A., Kutumova E. O.** Reversible states of functioning the regulatory circuits discrete models the gene nets // Вестн. ТГУ. Управление, вычислительная техника и информатика. — 2011. — Т. 14, № 1. — С. 85–94.
8. **Kauffman S. A.** At home in the Universe: the search for the laws of self-organization and complexity. — Oxford: Oxford Univ. Press, 1995. — 336 p.
9. **Kauffman S. A., Smith R. G.** Adaptive automata based on Darwinian selection // Physica D. — 1986. — Vol. 22, N 1–3. — P. 68–82.

Нажмиденова Ажар Маратовна,
Пережогин Алексей Львович,
e-mail: pereal@math.nsc.ru

Статья поступила
24 декабря 2013 г.

Переработанный вариант —
12 января 2014 г.