ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—август 2014. Том 21, № 4. С. 33–41

УДК 519.718

О МУЛЬТИРАСКРАСКЕ ИНЦИДЕНТОРОВ ВЗВЕШЕННОГО ОРИЕНТИРОВАННОГО МУЛЬТИГРАФА

В. Г. Визинг

Аннотация. Рассматриваются ориентированные мультиграфы с взвешенными дугами. При мультираскраске инциденторов каждому инцидентору сопоставляется мультицвет, т. е. интервал цветов, длина которого равна весу инцидентора. Мультираскраска допустима, если мультицвета смежных инциденторов не пересекаются и для каждой дуги левый конец мультицвета начального инцидентора не больше левого конца мультицвета конечного инцидентора. Приводятся нижняя и верхняя оценки минимального числа цветов, необходимого для допустимой мультираскраски всех инциденторов мультиграфа.

Ключевые слова: инцидентор, мультираскраска, инциденторное мультихроматическое число.

Введение

Под мультиграфом понимается взвешенный ориентированный мультиграф без петель [4]. Через $G = (V, E, w)$ обозначим мультиграф с множествами вершин V и дуг E, в котором w — функция, определённая на E и принимающая натуральные значения. Число $w(e)$ называется *весом* дуги $e \in E$. Сумма весов дуг, инцидентных вершине v, называется *взвешенной степенью* вершины v. Максимальная взвешенная степень вершины мультиграфа G обозначается через $\Delta(G)$.

Запись $e = uv$ означает, что u — начало, а v — конец дуги e. Пара (u, e) называется *начальным инцидентором* дуги e, примыкающим к вершине u, а (v, e) — *конечным инцидентором*, примыкающим к v. Таким образом, каждая дуга имеет два инцидентора, называемых *сопряжёнными*. Два инцидентора называются *однотипными*, если они оба либо начальные, либо конечные, и *разнотипными* — в противном случае. Инциденторы, примыкающие к одной и той же вершине, называются *смежными*. Будем считать, что вес каждого инцидентора любой дуги совпадает с её весом. Максимальный вес инцидентора, примыкающего к вершине v, обозначается через $W(v)$.

Цветами являются натуральные числа. Пусть a и b — цвета и $a \leqslant b$. Под интервалом $[a, b]$ понимается множество цветов c, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant c \leqslant b$. Число $b - a + 1$ называется *длиной интервала.* Под *мультицветом* понимается интервал цветов, длина которого называется *длиной* мультицвета. Если $[a, b]$ — мультицвет, то a называется *левым концом*, а b — *правым концом* мультицвета. Мультицвет $[a'', b'']$ не меньше мультицвета $[a', b']$, если $a'' \geqslant a'$. Мультицвет $[a'', b'']$ больше мультицвета $[a', b']$, а мультицвет $[a', b']$ меньше мультицвета $[a'', b'']$, если $a'' > b'$. Будем говорить, что имеется *мультираскраска* φ инциденторов, если каждому инцидентору i сопоставлен мультицвет $\varphi(i)$, длина которого равна весу инцидентора i; $\varphi(i)$ называется *мультицветом* инцидентора i, а инцидентор i называется *окрашенным.* Мультираскраска инциденторов называется *допустимой*, если мультицвета любых двух смежных инциденторов не пересекаются и мультицвет конечного инцидентора любой дуги не меньше мультицвета начального инцидентора этой дуги. Если при мультираскраске инциденторов все мультицвета вложены в интервал $[1, T]$, то будем говорить о мультираскраске с помощью T цветов.

Инциденторным мультихроматическим числом $\mu I(G)$ мультиграфа G называется наименьшее T такое, что существует допустимая мультираскраска всех инциденторов мультиграфа G с помощью T цветов.

Основной результат настоящей работы — верхняя оценка

$$\mu I(G) \leqslant \lceil (3/2)\Delta(G) \rceil - 1.$$

Статья [5] — первая работа, посвящённая задаче раскраски инциденторов ориентированного мультиграфа. В качестве практической интерпретации указана задача составления расписания для компьютерной сети с единичными длительностями сообщений. Предположение о различных длительностях сообщений приводит к задаче мультираскраски инциденторов.

Задача мультираскраски инциденторов взвешенного неориентированного мультиграфа рассматривалась в [2]. Для допустимости мультираскраски инциденторов требовалось ещё, чтобы мультицвета сопряжённых инциденторов не пересекались. Было бы интересно изучить такую же задачу мультираскраски инциденторов взвешенного ориентированного мультиграфа.

Следует отметить, что в [1, 3] рассмотрена задача раскраски (не мультираскраски!) инциденторов взвешенных ориентированных мультиграфов, но в понятие веса дуги вкладывался другой смысл: при допустимой раскраске инциденторов разность между цветом конечного и цветом на-

чального инцидентоов любой дуги должна быть не меньше веса этой дуги.

1. Нижняя оценка

Так как при допустимой мультираскраске мультицвета смежных инцидентов не пересекаются, имеет место

Утверждение 1. *Пусть G — мультиграф. Тогда $\mu I(G) \geqslant \Delta(G)$.*

Пусть имеется некоторое множество окрашенных инцидентов. Будем говорить, что мультицвета этих инцидентов *плотно уложены* вправо (влево) от цвета c, если мультицвета различных инцидентов не пересекаются и объединение мультицветов является интервалом с левым (правым) концом c.

Утверждение 2. *Если G — дерево, то $\mu I(G) = \Delta(G)$.*

Доказательство индукцией по числу вершин. Для двухвершинного дерева утверждение очевидно. Пусть G имеет больше двух вершин и x — висячая вершина, которой инцидентна дуга e, другим концом которой является вершина y. Удалим вершину x и дугу e. По предположению индукции существует мультираскраска φ инцидентов оставшегося дерева с использованием не более $\Delta(G)$ цветов. Без ограничения общности рассуждений будем считать, что мультицвета примыкающих к y начальных инцидентов плотно уложены вправо от 1, а мультицвета примыкающих конечных инцидентов плотно уложены влево от $\Delta(G)$. Так как взвешенная степень вершины y не больше $\Delta(G)$, существует мультицвет длины $w(e)$, вложенный в интервал $[1, \Delta(G)]$ и не пересекающийся с мультицветами окрашенных инцидентов, примыкающих к y. В этот мультицвет окрасим оба инцидента дуги e. Утверждение 2 доказано.

Утверждение 3. *Если G — простой цикл (не обязательно ориентированный), то $\mu I(G) = \Delta(G)$.*

Доказательство. Если G — цикл чётной длины, то его дуги можно правильно раскрасить двумя цветами. После раскраски дуг оба инцидента дуг цвета 1 окрасим в мультицвет с левым концом 1, а оба инцидента дуг цвета 2 — в мультицвет с правым концом $\Delta(G)$. Получим допустимую мультираскраску инцидентов с помощью $\Delta(G)$ цветов.

Пусть теперь G — цикл нечётной длины. Тогда он обязательно содержит вершину, к которой примыкает один конечный и один начальный инцидент. Обозначим такую вершину через y, и пусть $e_1 = xy$ и $e_2 = yz$ — инцидентные y дуги. Удалим из G дугу e_2. Останется простая цепь чётной длины. Её дуги правильно раскрасим двумя цветами.

Предположим, что дуга e_1 окрашена в цвет 2, тогда инцидентная вершине z дуга цепи будет окрашена в цвет 1. Окрасим оба инцидентора каждой дуги цвета 1 в мультицвет с левым концом 1, а оба инцидентора каждой дуги цвета 2 — в мультицвет с правым концом $\Delta(G)$. После этого начальный инцидентор дуги e_2 окрасим в мультицвет $[1, w(e_2)]$, а конечный инцидентор — в мультицвет $[\Delta(G) - w(e_2) + 1, \Delta(G)]$. Получим допустимую мультираскраску всех инциденторов цикла с помощью $\Delta(G)$ цветов. Утверждение 3 доказано.

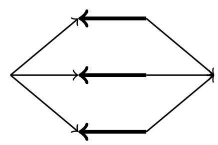

Рис. 1. Граф L

Равенство $\mu I(G) = \Delta(G)$ выполняется не всегда. На рис. 1 изображён взвешенный граф L, у которого дуги веса 2 изображены жирными стрелками, дуги веса 1 — тонкими стрелками. Имеем $\Delta(L) = 3$, но $\mu I(L) = 4 > \Delta(L)$.

2. Верхняя оценка

Введём понятие монотонной перекраски инциденторов. Пусть имеется мультираскраска f инциденторов мультиграфа G такая, что мультицвета однотипных смежных инциденторов не пересекаются. Тогда на каждом множестве мультицветов однотипных смежных инциденторов раскраска f индуцирует бинарное отношение «больше». Под *монотонной перекраской* инциденторов понимается переход к мультираскраске g такой, что сохраняется отношение «больше» между мультицветами однотипных смежных инциденторов.

Утверждение 4. *Пусть имеется мультираскраска всех инциденторов мультиграфа G с помощью T цветов, где $T \geqslant \Delta(G)$, при которой мультицвет конечного инцидентора каждой дуги не меньше мультицвета её начального инцидентора и мультицвета однотипных смежных инциденторов не пересекаются. Тогда существует монотонная перекраска инциденторов, в результате которой получится допустимая мультираскраска всех инциденторов с помощью T цветов.*

Доказательство. Произведём монотонную перекраску инциденторов, примыкающих к каждой вершине таким образом, что начальные инциденторы плотно уложены вправо от 1, а конечные инциденторы — влево от T. Мультицвет конечного инцидентора каждой дуги будет попрежнему не меньше мультицвета её начального инцидентора. Так как $T \geqslant \Delta(G)$, мультицвета смежных инциденторов не будут пересекаться, значит, получится допустимая мультираскраска всех инциденторов с помощью T цветов. Утверждение 4 доказано.

Двудольный взвешенный мультиграф представляется четвёркой (X, Y, E, w), где X и Y — множества вершин первой и второй долей соответственно, E — множество дуг, w — определённая на E функция: веса дуг. Двудольный мультиграф называется *односторонним*, если начало каждой дуги лежит в X, а конец — в Y.

Двудольный односторонний мультиграф $B(G) = (V', V'', E', w)$ называется *двудольной интерпретацией мультиграфа* $G = (V, E, w)$, если

(i) $|V'| = |V''| = |V|$, причём каждая вершина $v \in V$ имеет образы $v' \in V'$ и $v'' \in V''$;

(ii) каждой дуге $e = uv \in E$ взаимно однозначным образом соответствует дуга $e' = u'v'' \in E'$ того же веса.

Утверждение 5. *Для любого мультиграфа G имеет место равенство*

$$\mu I(G) = \max\{\mu I(B(G)), \Delta(G)\}.$$

Доказательство. Пусть $M = \max\{\mu I(B(G)), \Delta(G)\}$. Пусть имеется допустимая мультираскраска всех инциденторов мультиграфа G. Окрасив инциденторы каждой дуги мультиграфа $B(G)$ так же, как окрашены инциденторы соответствующей дуги мультиграфа G, получим допустимую мультираскраску всех инциденторов мультиграфа $B(G)$. Поэтому $\mu I(G) \geqslant \mu I(B(G))$. Так как, кроме того, $\mu I(G) \geqslant \Delta(G)$, имеем $\mu I(G) \geqslant M$.

Докажем обратное неравенство. Построим допустимую мультираскраску f всех инциденторов мультиграфа $B(G)$ с помощью M цветов. Это возможно, поскольку $M \geqslant \mu I(B(G))$. Затем начальный и конечный инциденторы каждой дуги e мультиграфа G окрасим так же, как окрашены начальный и конечный инциденторы соответствующей дуги e' мультиграфа $B(G)$. Мультицвета однотипных смежных инциденторов мультиграфа G не будут пересекаться, однако мультицвета разнотипных смежных инциденторов могут пересекаться. Так как $M \geqslant \Delta(G)$, по утверждению 4 существует монотонная перекраска инциденторов мультиграфа G, приводящая к допустимой мультираскраске с помощью M цветов. Значит, $\mu I(G) \leqslant M$. Утверждение 5 доказано.

Отметим, что в [3] аналогично формулируется и доказывается утверждение 2, касающееся раскраски инциденторов.

Пусть $H = (X, Y, E, w)$ — двудольный односторонний мультиграф. Введём понятие пары соседних инциденторов. Чтобы избежать многочисленных оговорок, будем считать, что к каждой вершине примыкает чётное число инциденторов. Если степень вершины нечётна, то введём

фиктивный инцидентор веса 0, примыкающий к этой вершине. Затем инциденторы, примыкающие к каждой вершине мультиграфа H, разобьём на пары соседних инциденторов следующим образом. Пусть v — произвольная вершина, к которой примыкает чётное число $q = 2k$ инциденторов (один из которых может быть фиктивным). Зафиксируем нумерацию $i_1, i_2, \ldots, i_q$ этих инциденторов такую, что $w(i_1) \geqslant w(i_2) \geqslant \ldots \geqslant w(i_q)$. Каждую пару вида (i_{2j-1}, i_{2j}) назовём *парой соседних инциденторов* $(1 \leqslant j \leqslant k)$.

Построим неориентированный мультиграф $R(H)$, вершинами которого являются пары соседних инциденторов мультиграфа H, и две вершины смежны, если соответствующие пары содержат сопряжённые инциденторы мультиграфа H. Очевидно, что между рёбрами мультиграфа $R(H)$ и дугами мультиграфа H существует взаимно однозначное соответствие, при этом $R(H)$ является двудольным мультиграфом, степени всех вершин которого не больше 2. Поэтому рёбра $R(H)$ можно правильно раскрасить двумя цветами. Подмножество дуг мультиграфа H, соответствующих рёбрам цвета i мультиграфа $R(H)$, обозначим через E_i, $(i = 1, 2)$. Полученное указанным способом разбиение (E_1, E_2) дуг H назовём *квазиравномерным*.

Утверждение 6. *Пусть (E_1, E_2) — квазиравномерное разбиение дуг одностороннего двудольного мультиграфа $H = (X, Y, E, w)$, v — произвольная вершина H и S_t — суммарный вес примыкающих к v инциденторов дуг множества E_t $(t = 1, 2)$. Тогда*

$$S_t \leqslant \lceil \Delta(H)/2 \rceil + \lfloor W(v)/2 \rfloor \quad (t = 1, 2). \tag{1}$$

Если веса всех инциденторов дуг множества E_t $(1 \leqslant t \leqslant 2)$, примыкающих к v, не больше $W(v)/2$, то

$$S_t \leqslant \lfloor \Delta(H)/2 \rfloor. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть к вершине v примыкают $2k$ инциденторов дуг множества E_t и веса p_j этих инциденторов пронумерованы так, что

$$p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant p_{2k}. \tag{3}$$

Из указанного выше способа построения квазиравномерного разбиения (E_1, E_2) следует, что S_t при любом $t = 1, 2$ не больше суммы весов инциденторов, имеющих в (3) нечётные номера, т. е.

$$S_t \leqslant p_1 + p_3 + \ldots + p_{2k-1}. \tag{4}$$

Из (3) также следует, что $p_{2i} \geqslant p_{2i+1}$ $(i = 1, 2, \dots, k-1)$. Поэтому

$$S_t \leqslant p_1 + p_2 + p_4 + \dots + p_{2k-2}. \tag{5}$$

Суммируя (4) и (5) и учитывая, что $p_1 = W(v)$ и $\Delta(H)$ не меньше суммы членов последовательности (3), получим $2S_t \leqslant \Delta(H) + W(v)$, тем самым

$$S_t \leqslant (\Delta(H) + W(v))/2 \leqslant \lceil \Delta(H)/2 \rceil + W(v)/2.$$

В силу целочисленности S_t отсюда вытекает (1).

Предположим, что при каком-либо t $(1 \leqslant t \leqslant 2)$ веса всех примыкающих к v инциденторов дуг множества E_t не больше $W(v)/2$. Тогда вместо (4) и (5) имеем неравенства

$$S_t \leqslant \lfloor W(v)/2 \rfloor + p_3 + \ldots + p_{2k-1}, \quad S_t \leqslant \lfloor W(v)/2 \rfloor + p_2 + p_4 + \ldots + p_{2k-2}.$$

Складывая их и учитывая, что $p_1 = W(v)$, получим $2S_t \leqslant \Delta(H)$. Отсюда $S_t \leqslant \Delta(H)/2$. Так как S_t — целое число, справедливо неравенство (2). Утверждение 6 доказано.

Утверждение 7. *Пусть $H = (X, Y, E, w)$ — двудольный односторонний мультиграф. Тогда $\mu I(H) \leqslant \lceil (3/2)\Delta(H) \rceil - 1$.*

Доказательство. Пусть (E_1, E_2) — квазиравномерное разбиение множества дуг мультиграфа H. Сначала окрасим инциденторы дуг множеств E_1, затем — инциденторы дуг множества E_2.

Рассматриваем инциденторы дуг множества E_1. Окрашиваем начальные инциденторы, примыкающие к каждой вершине $x \in X$, так, что мультицвета плотно уложены вправо от 1 и самый большой мультицвет у инцидентора с максимальным весом. Конечные инциденторы окрашиваем с соблюдением единственного условия, что их мультицвета плотно уложены вправо от $\lceil \Delta(H)/2 \rceil$.

Докажем, что в результате получится допустимая мультираскраска всех инциденторов дуг множества E_1. Во-первых, мультицвета смежных однотипных инциденторов не пересекаются, так как они плотно уложены. Обозначим через S_1 суммарный вес начальных инциденторов, примыкающих к произвольной вершине $x \in X$. Покажем, что левые концы всех начальных инциденторов, примыкающих к x, не больше $\lceil \Delta(H)/2 \rceil$. Это очевидно, если $S_1 \leqslant \lceil \Delta(H)/2 \rceil$. Если $S_1 > \lceil \Delta(H)/2 \rceil$, то в силу утверждения 6 среди инциденторов, примыкающих к x, есть по крайней мере один инцидентор, вес которого больше $W(x)/2$. Поэтому длина наибольшего мультицвета не меньше $\lfloor W(x)/2 \rfloor + 1$. В силу (1) его правый конец не больше $\lceil \Delta(H)/2 \rceil + \lfloor W(x)/2 \rfloor$, поэтому его левый конец не больше

$\lceil \Delta(H)/2 \rceil$. У остальных инциденторов, примыкающих к x, левые концы меньше $\lceil \Delta(H)/2 \rceil$. Так как левые концы мультицветов всех конечных инциденторов не меньше $\lceil \Delta(H)/2 \rceil$, у каждой дуги множества E_1 мультицвет конечного инцидентора не меньше мультицвета начального инцидентора. Следовательно, построенная мультираскраска инциденторов дуг множества E_1 допустимая.

Приступаем к мультираскраске инциденторов дуг множества E_2. Начальные инциденторы окрашиваем с соблюдением единственного условия, чтобы их мультицвета были плотно вложены влево от $\Delta(H)$. Конечные инциденторы окрашиваем так, что для каждой вершины $y \in Y$ мультицвета примыкающих к y инциденторов плотно уложены влево от $\lceil (3/2)\Delta(H) \rceil - 1$, причём наименьший мультицвет у инцидентора с наибольшим весом. Аналогично предыдущему с помощью утверждения 6 доказывается, что правый конец любого конечного инцидентора не меньше $\Delta(H)$. Следовательно, инциденторы любой дуги множества E_2 окрашены так, что мультицвет конечного инцидентора не меньше мультицвета начального инцидентора и мультираскраска инциденторов дуг множества E_2 допустима. Так как начальные инциденторы всех дуг вложены в интервал $[1, \Delta(H)]$, а конечные инциденторы — в интервал $[\lceil \Delta(H)/2 \rceil, \lceil (3/2)\Delta(H) \rceil - 1]$, длина которого тоже равна $\Delta(H)$, мультицвета смежных инциденторов не пересекаются. Следовательно, построенная мультираскраска всех инциденторов H с помощью $\lceil (3/2)\Delta(H) \rceil - 1$ цветов допустима. Поэтому $\mu I(H) \leqslant \lceil (3/2)\Delta(H) \rceil - 1$. Утверждение 7 доказано.

Рассмотрим произвольный мультиграф G. Пусть $B(G)$ — его двудольная интерпретация. Очевидно, что $\Delta(B(G)) \leqslant \Delta(G)$. Из утверждений 1 и 7 вытекает

Теорема 1. *Для любого ориентированного взвешенного мультиграфа G*

$$\Delta(G) \leqslant \mu I(G) \leqslant \lceil (3/2)\Delta(G) \rceil - 1.$$

Вопрос о достижимости верхней оценки остаётся открытым.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Визинг В. Г.** Об оценках инциденторного хроматического числа взвешенного ориентированного мультиграфа // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 2006. — Т. 13, №4. — С. 18–25.
2. **Визинг В. Г.** О мультираскраске инциденторов взвешенного неориентированного мультиграфа // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2012. — Т. 19, №4. — С. 35–47.

Vizing V. G. Multicoloring the incidentors of a weighted undirected multigraph // J. Appl. Industr. Math. — 2012. — Vol. 6, N 4. — P. 514–521.

3. **Визинг В. Г., Пяткин А. В.** О раскраске инцидентов в ориентированном взвешенном мультиграфе // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 2006. — Т. 13, № 1. — С. 33–44.
4. **Зыков А. А.** Основы теории графов. — М: Вузовская книга, 2004. — 663 с.
5. **Пяткин А. В.** Некоторые задачи оптимизации расписания передачи сообщений в локальной сети связи // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 1995. — Т. 2, № 4. — С. 74–79.

Визинг Вадим Георгиевич,
e-mail: vizing@paco.net

Статья поступила
21 января 2014 г.

Переработанный вариант —
11 марта 2014 г.