

УДК 519.1

ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЕ МОДЕЛИ ОБСЛУЖИВАНИЯ ТРЕБОВАНИЙ ОДНИМ ПРИБОРОМ С ПРЕРЫВАНИЯМИ

Р. Ю. Симанчёв, Н. Ю. Шерешик

Аннотация. Рассматривается задача минимизации общего времени обслуживания различных требований одним прибором с прерываниями. Описаны три модели целочисленного линейного программирования для данной задачи. Проведён сравнительный анализ моделей, и описан вычислительный эксперимент.

Ключевые слова: теория расписаний, модель целочисленного линейного программирования, многогранник, полиэдр, правильное неравенство.

Введение

В работе рассматривается задача теории расписаний, имеющая следующую содержательную постановку. Требования из множества V , $|V| = n$, имеющие положительные веса w_i , обслуживаются одним прибором. Для каждого требования $i \in V$ определён момент ожидания r_i , до которого включительно оно недоступно для обработки. Длительности обслуживания одинаковы и равны p . Время предполагается дискретным. В обслуживании разрешены прерывания. Необходимо найти расписание обслуживания такое, что взвешенная сумма моментов окончания обслуживания требований минимальна. В обозначениях, принятых в теории расписаний, эта задача может быть записана как $1|pmtn; p_i = p; r_i| \sum w_i C_i$. В зависимости от типа ограничений вычислительная сложность задачи меняется. Если в исходной формулировке не учитывать веса требований, запретить прерывания и считать длительности обслуживания всех требований различными ($1|r_i| \sum C_i$), то задача NP-трудна [7]. При условии ненулевых времён ожидания и возможности прерывания обработки ($1|pmtn; r_i| \sum w_i C_i$) задача также NP-трудна [7]. В случае, когда запрещены прерывания ($1|p_i = p; r_i| \sum w_i C_i$), задача полиномиально разрешима [7]. Если не учитываются веса требований, разрешены прерывания и длительности обработки различны ($1|pmtn; r_i| \sum C_i$), задача

вновь полиномиально разрешима [7]. Кроме того, в [6] предложен полиномиальный алгоритм решения частного случая, определяемого условием $p = 2$ ($1|pmtn; p_i = 2; r_i| \sum w_i C_i$). Что касается рассматриваемой нами формулировки задачи $1|pmtn; p_i = p; r_i| \sum w_i C_i$ в настоящее время её сложностной статус не известен. В [1, 2] рассматриваются свойства оптимальных расписаний задач этого класса, позволяющие существенно сократить размеры допустимых множеств. Так как количество требований и время их обслуживания конечны, можно говорить об общем директивном сроке d , к которому обслуживание всех требований будет завершено. При этом очевидно, что если d выбрать слишком малым, то множество определённых выше расписаний может оказаться пустым. Очевидной нижней оценкой для d является величина np . Множество всех расписаний рассматриваемой задачи при заданном директивном сроке d обозначим через Σ_d . Заметим, что если $d < d'$, то $\Sigma_d \subset \Sigma_{d'}$. В этой связи представляет интерес величина d_{\min} , определяемая условиями $\Sigma_{d_{\min}} \neq \emptyset$ и $\Sigma_{d_{\min}-1} = \emptyset$. В [4] описана процедура дихотомии для нахождения d_{\min} , имеющая полиномиальную трудоѳмкость. Поэтому далее везде будем полагать, что общий срок обслуживания всех требований минимален, т. е. $d = d_{\min}$. Для удобства обозначим через $D = \{1, 2, \dots, d\}$ множество всех моментов обслуживания требований.

Мы рассматриваем задачу $1|pmtn; p_i = p; r_i| \sum w_i C_i$ с полиѳдральной точки зрения (см. также [3, 5]). Расписанием обслуживания требований является $(0, 1)$ -вектор $x \in \mathbb{R}^{nd}$ с координатами $x_{ik} \in \{0, 1\}$, $i \in V$, $k \in D$. Единица означает, что требование i в момент времени k находится в обработке, нуль — иначе. Очевидно, что всякое расписание удовлетворяет системе ограничений

$$\sum_{k \in D} x_{ik} = p, \quad i \in V, \quad (1)$$

$$\sum_{i \in V} x_{ik} \leq 1, \quad k \in D, \quad (2)$$

$$x_{ik} \geq 0, \quad i \in V, \quad k = r_i + 1, r_i + 2, \dots, d, \quad (3)$$

$$x_{ik} = 0, \quad i \in V, \quad k = 1, 2, \dots, r_i, \quad (4)$$

$$x_{ik} \in \{0, 1\}, \quad i \in V, \quad k \in D. \quad (5)$$

Ограничения (1) гарантируют, что на обслуживание каждого требования необходимо ровно p единиц времени, ограничения (2) — что в каждый момент времени обслуживается не более одного требования $i \in V$. Полиѳдр, задаваемый условиями (1)–(4), обозначим через M_d . По сути

дела он является многогранником транспортной задачи с целыми правыми частями, следовательно, целочисленный. Во введённых обозначениях задача $1|pmtn; p_i = p, r_i| \sum w_i C_i$ может быть сформулирована как задача минимизации функции

$$f(x) = \sum_{i \in V} w_i C_i(x) \quad (6)$$

на множестве вершин полиэдра M_d . Здесь $C_i(x) = \max\{k \in D \mid x_{ik} = 1\}$, где $i \in V$ — момент окончания обслуживания требования i . Задача (6) не является задачей целочисленного линейного программирования, так как целевая функция не линейна. Эта трудность типична для большинства задач теории расписаний при использовании аппарата целочисленного линейного программирования.

Нам понадобятся следующие понятия и обозначения.

Пусть G — обыкновенный граф. Если i и j — смежные вершины G , то для обозначения ребра между ними будем использовать запись ij . Степень вершины i графа G обозначим через $d_G(i)$. Граф H является подграфом графа G ($H \subset G$), если множество вершин (рёбер) H является подмножеством вершин (рёбер) G . Для графов G_1 и G_2 запись $G_1 \cup G_2$ означает граф, полученный объединением множеств вершин и множеств рёбер этих графов. *Многогранником* в конечномерном евклидовом пространстве будем называть выпуклую оболочку конечного множества точек, *полиэдром* — множество решений конечной системы уравнений и неравенств, если оно ограничено. Множество вершин многогранника P обозначим через $\text{vert } P$. Полиэдр, содержащий данный многогранник, будем называть *полиэдральной релаксацией* многогранника.

Пусть M — подмножество t -мерного евклидова пространства \mathbb{R}^t . Линейное неравенство в \mathbb{R}^t называется *правильным относительно M* , если любая точка из M ему удовлетворяет. Правильное неравенство называется *опорным*, если в M найдётся точка, которая удовлетворяет ему как равенству. Опорные неравенства имеют важное значение при построении выпуклых оболочек множества и алгоритмах отсечения. Например, как известно, любое правильное неравенство, не являющееся опорным к многограннику, избыточно относительно этого многогранника.

В настоящей работе рассматриваются два подхода к построению линейной целевой функции для задачи $1|pmtn; p_i = p; r_i| \sum w_i C_i$, что в итоге даёт две различные модели целочисленного линейного программирования. Для второй модели найдены три класса правильных неравенств, которые могут служить отсекающими плоскостями при реализации процедур отсечения. Проведён вычислительный эксперимент по сравнению

времени решения для двух упомянутых моделей и второй модели, усиленной полученными правильными неравенствами.

1. Первая модель

Одним из стандартных подходов к построению линейной целевой функции для задач комбинаторной оптимизации является введение дополнительных переменных. Для рассматриваемой задачи это можно сделать, например, так: минимизировать функцию

$$g(x, y) = \sum_{i \in V} w_i y_i \quad (7)$$

при условиях (1)–(5) и

$$kx_{ik} \leq y_i. \quad (8)$$

Покажем, что если (\bar{x}, \bar{y}) — оптимальное решение задачи (1)–(5), (7) и (8), то \bar{x} — оптимальное решение задачи (6). Сначала заметим, что $\bar{y}_i = C_i(\bar{x})$ для всех $i \in V$, так как в противном случае, полагая $y_i^* = C_i(\bar{x})$, $i \in V$, получим $g(\bar{x}, y^*) < g(\bar{x}, \bar{y})$. Предположим, что найдётся $\tilde{x} \in \Sigma_d$ такой, что $f(\tilde{x}) < f(\bar{x})$. Вновь полагая $\tilde{y}_i = C_i(\tilde{x})$, $i \in V$, сформируем вектор (\tilde{x}, \tilde{y}) , который очевидно удовлетворяет ограничениям (1)–(5), (8) и для которого выполняется цепочка соотношений

$$\begin{aligned} g(\tilde{x}, \tilde{y}) &= \sum_{i \in V} w_i \tilde{y}_i = \sum_{i \in V} w_i C_i(\tilde{x}) = f(\tilde{x}) \\ &< f(\bar{x}) = \sum_{i \in V} w_i C_i(\bar{x}) = \sum_{i \in V} w_i \bar{y}_i = g(\bar{x}, \bar{y}), \end{aligned}$$

что противоречит оптимальности вектора (\bar{x}, \bar{y}) .

Таким образом, решив задачу целочисленного линейного программирования (1)–(5), (7) и (8), получим решение задачи (6).

2. Вторая модель

Вторая модель также основывается на введении дополнительных переменных. Однако в отличие от предыдущей модели здесь новые переменные булевы.

Начнём с описания множества расписаний в терминах теории графов. Рассмотрим три множества: V — множество требований, D — множество моментов времени, в которые обслуживаются требования, Y — дубликат V (это вспомогательное множество, с помощью которого будут подсчитываться моменты окончания обслуживания требований). При этом

для множеств V и Y порядок элементов несуществен, $D = \{1, 2, \dots, d\}$ упорядочено. Так как V и Y по сути идентичны, в случаях, когда будет иметься в виду принадлежность элемента i множеств V и Y одновременно, будем использовать запись $i \in V(=Y)$. Пусть $G_1 = (V, D; E_1)$ — полный двудольный граф с долями V и D и множеством рёбер $E_1 = \{ik \mid i \in V, k \in D\}$, $G_2 = (Y, D; E_2)$ — полный двудольный граф с долями Y и D и множеством рёбер $E_2 = \{ik \mid i \in Y, k \in D\}$. Рассмотрим граф $G = G_1 \cup G_2$. В G определим семейство подграфов \mathcal{H} по правилу. Подграф $H \subset G$, $H = H_1 \cup H_2$, $H_1 \subset G_1$, $H_2 \subset G_2$, принадлежит семейству \mathcal{H} (называется *расписанием*), если

$$d_{H_1}(i) = p \quad \text{для всех } i \in V, \quad (9)$$

$$d_{H_1}(k) \leq 1 \quad \text{для всех } k \in D, \quad (10)$$

для $i \in V(=Y)$ и $k \in D$ включение $ik \in EH_2$ имеет место тогда и только тогда, когда существует $l \in D$, $l > k$, такой, что

$$il \in EH_1. \quad (11)$$

На рис. 1 приведён фрагмент такого графа $H \in \mathcal{H}$ для вершины $i = 3$.

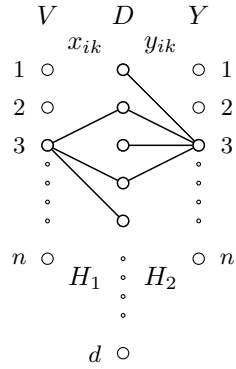


Рис. 1

Если $H = H_1 \cup H_2 \in \mathcal{H}$, то в силу (9) и (10) включение $ik \in EH_1$ означает, что в момент $k \in D$ требование $i \in V$ и только оно находится в обработке, а условие (11) гарантирует, что вершина $i \in Y$ будет соединена рёбрами со всеми вершинами множества $\{1, 2, \dots, C_i - 1\} \subset D$. Таким образом, подграф $H_1 \subset H$ задаёт расписание обслуживания требований, а степени вершин $i \in Y$ относительно подграфа $H_2 \subset H$ суть величины на 1 меньшие моментов окончания обслуживания.

Данная конструкция позволяет сформулировать рассматриваемую задачу в виде

$$\min \left\{ \sum_{i \in Y} w_i d_{H_2}(i) \mid H \in \mathcal{H} \right\}. \quad (12)$$

Построим модель булева линейного программирования задачи (12). Пусть $\mathbb{R}^E = \mathbb{R}^{E_1} \times \mathbb{R}^{E_2}$ — пространство, ассоциированное с множеством

рёбер графа G . Иными словами, \mathbb{R}^E — пространство вектор-столбцов, компоненты которых индексированы элементами множества $E = E_1 \cup E_2$. Оси координат в \mathbb{R}^{E_1} будем обозначать через x_{ik} , в \mathbb{R}^{E_2} — через y_{ik} . Пусть $H \in \mathcal{H}$. Вектором инцидентий подграфа $H = H_1 \cup H_2$ назовѳм вектор $(x^{H_1}, y^{H_2}) \in \mathbb{R}^{E_1} \times \mathbb{R}^{E_2}$ с координатами

$$\begin{aligned} \text{для } i \in V, k \in D \quad x_{ik}^{H_1} &= \begin{cases} 1, & \text{если } ik \in EH_1, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \\ \text{для } i \in Y, k \in D \quad y_{ik}^{H_2} &= \begin{cases} 1, & \text{если } ik \in EH_2, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \end{aligned}$$

Теперь с множеством расписаний \mathcal{H} можно связать многогранник

$$P_{\mathcal{H}} = \text{conv}\{(x^{H_1}, y^{H_2}) \in \mathbb{R}^E \mid H = H_1 \cup H_2 \in \mathcal{H}\}.$$

Теорема 1. Подграф $H = H_1 \cup H_2 \in G$ принадлежит семейству \mathcal{H} (является расписанием) тогда и только тогда, когда его вектор инцидентий $(x^{H_1}, y^{H_2}) \in \mathbb{R}^E$ является целочисленной точкой полиэдра, задаваемого ограничениями (1)–(4) и

$$\sum_{l=k+1}^d x_{il} \leq py_{ik}, \quad i \in V(=Y), k = 1, 2, \dots, d-1, \quad (13)$$

$$y_{ik} \leq \sum_{l=k+1}^d x_{il}, \quad i \in V(=Y), k = 1, 2, \dots, d-1, \quad (14)$$

$$y_{ik} \leq 1, \quad i \in Y, k \in D. \quad (15)$$

Доказательство. Пусть $H = H_1 \cup H_2 \in \mathcal{H}$. Выполнение ограничений (1)–(4) и (15) для точки (x^{H_1}, y^{H_2}) очевидно. Рассмотрим ограничения (13) и (14). Пусть $i \in V(=Y)$, $k \in \{1, 2, \dots, d-1\}$. Предположим, что $\sum_{l=k+1}^d x_{il}^{H_1} > py_{ik}^{H_2}$. Если $y_{ik}^{H_2} = 1$, то $p < \sum_{l=k+1}^d x_{il}^{H_1} \leq \sum_{l=1}^d x_{il}^{H_1} = d_{H_1}(i)$, что противоречит условию (9) из определения семейства \mathcal{H} . Если $y_{ik}^{H_2} = 0$, то $\sum_{l=k+1}^d x_{il}^{H_1} > 0$, что означает существование $l > k$ такого, что $il \in EH_1$. Тогда из условия (11) получаем, что $ik \in EH_2$ или, что то же самое, $y_{ik}^{H_2} = 1$. Выполнение ограничений (13) для точки (x^{H_1}, y^{H_2}) доказано.

Предположим, что $y_{ik}^{H_2} > \sum_{l=k+1}^d x_{il}^{H_1}$. Если $y_{ik}^{H_2} = 0$, то получаем противоречие с неотрицательностью вектора x^{H_1} . Если $y_{ik}^{H_2} = 1$, то $ik \in EH_2$

и из (11) следует, что найдётся такой номер $s > k$, что $is \in EH_1$ или, что то же самое, $x_{is}^{H_1} = 1$. Следовательно, $1 > \sum_{l=k+1}^d x_{il}^{H_1} \geq x_{is}^{H_1} = 1$, что не имеет смысла. Тем самым доказано выполнение ограничений (14) для точки (x^{H_1}, y^{H_2}) .

Докажем обратную импликацию. Пусть (\bar{x}, \bar{y}) — целочисленное решение системы (1)–(4), (13)–(15). Заметим, что для любых $i \in V (= Y)$ и $k \in D$ в силу (2) и (3) имеем $\bar{x}_{ik} \leq 1$ и в силу (3) и (13) имеем $\bar{y}_{ik} \geq 0$. Пусть $H_1 \subset G_1$ и $H_2 \subset G_2$ таковы, что $ik \in EH_1$ тогда и только тогда, когда $\bar{x}_{ik} = 1$, а $ik \in EH_2$ тогда и только тогда, когда $\bar{y}_{ik} = 1$.

Покажем, что $H_1 \cup H_2 \in \mathcal{H}$. Выполнение условий (9) и (10) из определения семейства \mathcal{H} сразу следует из ограничений (1) и (2). Докажем условие (11). Если $ik \in EH_2$, то $\bar{y}_{ik} = 1$. Тогда из (14) имеем $1 < \sum_{l=k+1}^d \bar{x}_{il}$. Это означает, что найдётся такой $l > k$, что $\bar{x}_{il} = 1$ или, что то же самое, $il \in EH_1$. Если же $ik \notin EH_2$, то из (3) и (13) получим $\sum_{l=k+1}^d \bar{x}_{il} = 0$. Это означает, что $\bar{x}_{il} = 0$ для любого $l > k$ или, что то же самое, $il \notin EH_1$. Теорема 1 доказана.

Полиэдр, задаваемый ограничениями (1)–(4) и (13)–(15), обозначим через $M_{\mathcal{H}}$. Очевидно, что $P_{\mathcal{H}} \subseteq M_{\mathcal{H}}$, т. е. $M_{\mathcal{H}}$ является полиэдральной релаксацией многогранника $P_{\mathcal{H}}$. Более того, так как $M_{\mathcal{H}}$ и $P_{\mathcal{H}}$ лежат в единичном кубе, справедливо

Следствие 1. *Имеет место равенство $\text{vert } P_{\mathcal{H}} = M_{\mathcal{H}} \cap Z^E$, где Z^E — целочисленная решётка пространства \mathbb{R}^E .*

Теперь задачу (12) можно сформулировать как задачу булева программирования вида

$$\min \left\{ h(x, y) = \sum_{i \in Y} \sum_{k \in D} w_i y_{ik} \mid (x, y) \in M_{\mathcal{H}} \cap Z^E \right\}. \quad (16)$$

Следующие примеры показывают, что полиэдр $M_{\mathcal{H}}$ имеет также нецелочисленные вершины, т. е. включение $P_{\mathcal{H}} \subset M_{\mathcal{H}}$ является, вообще говоря, строгим. Мы приводим вершины полиэдра $M_{\mathcal{H}}$ в графовом виде. Сплошной линией изображены переменные, по которым точка (x, y) из $M_{\mathcal{H}}$ имеет значение 1, пунктиром — нецелочисленные переменные. Данные примеры получены применением симплекс-метода к полиэдру (1)–(4) и (13)–(15) (вид целевой функции значения не имеет).

ПРИМЕР 1: $n = 3$, $p = 2$, $d = 6$, $w_i = (3, 6, 9)$, $r_i = (0, 2, 2)$ (рис. 2). Нецелочисленные значения: $y_{1,1} = 0,5$, $y_{2,5} = 0,5$, $y_{3,3} = 0,5$.

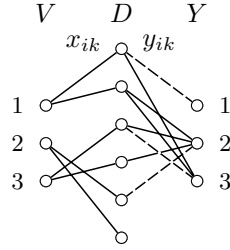


Рис. 2

ПРИМЕР 2: $n = 3$, $p = 4$, $d = 12$, $w_i = (2, 6, 12)$, $r_i = (0, 2, 2)$ (рис. 3). Нецелочисленные значения: $y_{1,4} = 0,5$, $y_{1,5} = 0,75$, $y_{1,8} = 0,5$, $y_{1,9} = 0,75$, $y_{2,8} = 0,5$, $y_{2,9} = 0,25$, $y_{3,4} = 0,5$, $y_{3,5} = 0,25$.

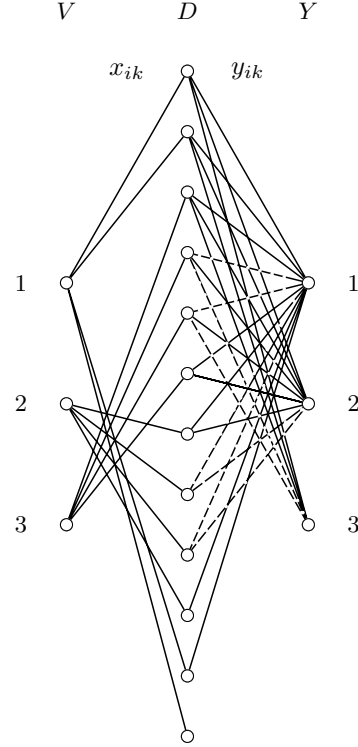


Рис. 3

3. Классы правильных неравенств

В этом разделе описаны классы неравенств, правильных относительно многогранника $P_{\mathcal{H}}$. Неравенства этих классов

усиливают ограничения полиэдра $M_{\mathcal{H}}$ в том смысле, что в $M_{\mathcal{H}}$ существуют отсекаемые ими точки. Будут построены три класса правильных неравенств.

Первый класс состоит из множества гиперплоскостей, целиком содержащих многогранник $P_{\mathcal{H}}$. Так как обслуживание требования i не может быть завершено раньше момента $r_i + p - 1$, в силу условия (11) из определения семейства \mathcal{H} имеем

Утверждение 1. Многогранник $P_{\mathcal{H}}$ целиком лежит в каждой из гиперплоскостей, задаваемых неравенствами $\sum_{k=1}^{r_i+p-1} y_{ik} = r_i + p - 1$, $i \in V$.

Класс этих ограничений обозначим через $S1$. Заметим, что так как число этих ограничений равно n , при решении задач их целесообразно включать в начальную полиэдральную релаксацию многогранника $P_{\mathcal{H}}$.

Столь же простым и непосредственно вытекающим из условия (11) является второй класс правильных неравенств.

Утверждение 2. Неравенство $x_{ik} \leq y_{i(k-1)}$ является правильным относительно многогранника $P_{\mathcal{H}}$ для любых $i \in V$ и $k \in \{2, 3, \dots, d\}$.

Этот класс ограничений обозначим через $S2$.

И, наконец, третий класс.

Утверждение 3. Неравенство $\sum_{i \in V} y_{ik} \geq n - \lfloor k/n \rfloor$ является правильным относительно многогранника $P_{\mathcal{H}}$ при любом $k \in \{1, 2, 3, \dots, d-1\}$.

Действительно, для любого $H = H_1 \cup H_2 \in \mathcal{H}$ равенство $y_{ik}^{H_2} = 1$ имеет место тогда и только тогда, когда к моменту k обслуживание требования i ещё не завершено. Таким образом, величина $\sum_{i \in V} y_{ik}^{H_2}$ равна числу незавершённых к моменту k требований. С другой стороны, так как мы располагаем одним прибором, до момента k можно успеть обработать не более $\lfloor k/n \rfloor$ требований. Значит, к моменту k останется не менее $n - \lfloor k/n \rfloor$ требований, обработка которых не завершена.

Этот класс неравенств обозначим через $S3$.

Правильные неравенства оказываются весьма полезными в качестве отсекающих плоскостей при реализации процедур отсечения. Будем говорить, что линейное неравенство, правильное относительно $P_{\mathcal{H}}$, *отсекает* точку, принадлежащую $M_{\mathcal{H}} \setminus P_{\mathcal{H}}$, если оно нарушается в этой точке. Покажем, что в $M_{\mathcal{H}}$ существуют точки, отсекаемые неравенствами классов $S2$ и $S3$.

ПРИМЕР 3: $n = 3$, $p = 4$, $d = 12$, $w_i = (3, 6, 9)$, $r_i = (0, 2, 2)$ (рис. 4). Нецелочисленные значения: $y_{1,4} = 0,5$, $y_{1,5} = 0,5$, $y_{1,8} = 0,5$, $y_{1,9} = 0,75$, $y_{2,8} = 0,5$, $y_{2,9} = 0,25$. Отсекающее неравенство: $x_{2,9} \leq y_{2,8}$ или $x_{2,10} \leq y_{2,9}$.

ПРИМЕР 4: $n = 3$, $p = 2$, $d = 6$, $w_i = (5, 3, 10)$, $r_i = (0, 0, 2)$ (см. рис. 2). Нецелочисленные значения: $y_{1,1} = 0,5$, $y_{2,5} = 0,5$, $y_{3,3} = 0,5$. Отсекающее неравенство: $\sum_{i=1}^3 y_{i,1} \geq 3 - \lfloor \frac{1}{2} \rfloor$.

При использовании правильных неравенств как отсечений в соответствующих алгоритмах на передний план выходит задача идентификации (Separation problem) неравенств, которая заключается в следующем. Пусть имеется класс неравенств, правильных относительно многогранника $P_{\mathcal{H}}$, и точка из $M_{\mathcal{H}} \setminus P_{\mathcal{H}}$. Требуется либо найти в данном классе неравенство, отсекающее эту точку, либо доказать, что такого неравенства в данном классе нет. Очевидно, что для классов $S2$ и $S3$ задачи идентификации решаются простым перебором параметров $i \in V$ и $k \in D$ и имеют трудоёмкости $O(n^2p)$ и $O(np)$ соответственно.

4. Вычислительный эксперимент

В процессе выполнения работы был проведѳн вычислительный эксперимент, целью которого было сравнение построенных в разд. 2 и 3 ЦЛП-моделей, а также модели из разд. 3 с добавленными классами S1, S2 и S3 по времени решения задачи пакетом прикладных программ.

Для проведения эксперимента разработана программа на языке C++. Модели вносились в программу при помощи языка Math-Prog из пакета GNU Linear Programming Kit. Для хранения входных данных и результатов запусков использовалась база данных на основе СУБД MySQL.

Для решения задач ЦЛП вызывались программы из пакета IBM ILOG CPLEX, реализующие алгоритмы поиска оптимального решения.

Эксперимент проводился на компьютере с двухъядерным процессором Intel Pentium P6200 с тактовой частотой 2,13 ГГц под управлением ОС Windows 7 (32 bit). При подсчѳте времени решения задачи учитывалось процессорное время, т. е. время, которое процессор тратил непосредственно на решение задачи.

Обозначим ЦЛП-модели, построенные в разд. 2 и 3: m1 — первая модель, m2 — вторая модель, m2_add — вторая модель с дополнительными ограничениями S1, S2 и S3.

В ходе эксперимента генерировались серии задач с предварительно заданными значениями параметров n и p . Параметры ω_i выбирались случайным образом из интервала от 1 до 100. Значения r_i выбирались так, что для каждой задачи $d_{\min} = pn$.

Сгенерированные задачи запускались поочерѳдно на различных моделях. Задача считалась нерешѳнной, если время решения превышало 30 минут.

Прежде чем описать результаты эксперимента, заметим, что размерность задачи m1 равна $n(pn + 1)$, а задачи m2 — $2pn^2$, т. е. число переменных в задаче m2 существенно больше числа переменных задачи m1.

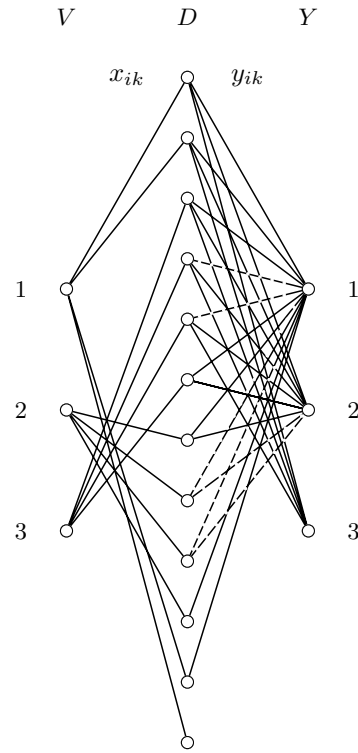


Рис. 4

В табл. 1 представлены результаты запусков решения задач m1, m2 и m2_add на различных входных данных. Число требований n менялось от 5 до 75, время обработки $p = 3, 4, 5$.

Для каждого n было решено 25 задач с различными параметрами p, r_i, ω_i . На рис. 5 представлено сравнение моделей m1 и m2 по среднему времени решения. По горизонтальной оси отложены значения n , по вертикальной — среднее время решения. Нетрудно видеть, что с ростом n разрыв во времени решения значительно увеличивается.

Т а б л и ц а 1

Результаты запусков решения задач m1, m2 и m2_add
на различных входных данных

| n | p | m1 | m2 | m2_add |
|-----|-----|--------|--------|---------|
| 10 | 3 | 63,07 | 2,30 | 0,23 |
| 10 | 5 | 264,61 | 9,64 | 0,45 |
| 15 | 3 | 379,36 | 34,80 | 1,14 |
| 15 | 5 | — | 101,09 | 1,82 |
| 20 | 3 | — | 80,11 | 4,53 |
| 20 | 5 | — | 611,24 | 20,77 |
| 25 | 3 | — | 541,45 | 8,51 |
| 25 | 5 | — | — | 152,70 |
| 30 | 3 | — | 881,30 | 13,56 |
| 30 | 5 | — | — | 206,27 |
| 40 | 3 | — | — | 92,76 |
| 40 | 5 | — | — | 445,81 |
| 50 | 3 | — | — | 104,28 |
| 50 | 5 | — | — | 663,15 |
| 60 | 3 | — | — | 311,45 |
| 60 | 5 | — | — | 1583,31 |
| 70 | 3 | — | — | 1217,18 |
| 70 | 5 | — | — | — |

На рис. 5 показано частичное сравнение, достаточное для иллюстрации разрыва во времени решения. С увеличением значений n разрыв увеличивался.

Модель m2_add представляет собой модель m2, к ограничениям которой добавлены классы неравенств S1, S2 и S3.

Ниже описаны результаты вычислительного эксперимента, целью которого было сравнение моделей m2 и m2_add по времени решения.

Как видно из табл. 1, добавление правильных неравенств позволяет значительно увеличить размерность решаемых задач.

Рис. 6 иллюстрирует преимущество модели m2_add перед m2.

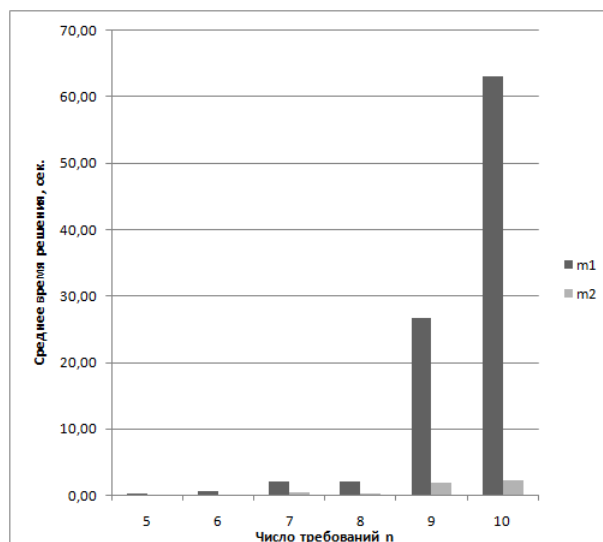


Рис. 5. Сравнение моделей m1 и m2 по среднему времени решения

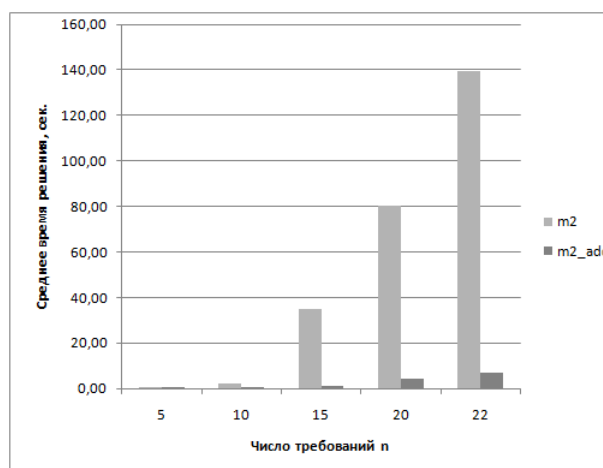


Рис. 6. Сравнение моделей m2 и m2_add по среднему времени решения

Таким образом, построенная в данной работе модель m2_add обгоняет по времени решения модели m1 и m2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баптист Ф., Карлье Ж., Керан М., Кононов А. В., Севастьянов С. В., Свириденко М. Структурные свойства оптимальных расписаний с прерыванием операций // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2009. — Т. 16, N 1. — С. 3–36.

- Baptiste Ph., Carlier J., Kononov A., Queyranne M., Sevastyanov S., Sviridenko M. Structural properties of optimal schedules with preemption // J. Appl. Industr. Math. — 2010. — Vol. 4, N 4. — P. 455–474.
2. Лазарев А. А., Кварацхелия А. Г. Свойства оптимальных расписаний задачи теории расписаний минимизации суммарного взвешенного момента окончания для одного прибора // Автоматика и телемеханика. — 2010. — № 10. — С. 80–89.
3. Симанчѳв Р. Ю., Толстуха Б. А. Некоторые полиэдральные свойства одной задачи теории расписаний // Сб. тр. междунар. конф. «Дискретная оптимизация и исследование операций» (Новосибирск, 24–28 июня 2013 г.). — Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2013. — С. 153.
4. Симанчѳв Р. Ю., Шерешик Н. Ю. Схема дихотомии для поиска минимального директивного срока в задаче обслуживания различных требований одним прибором // Вестн. Омск. гос. ун-та. — 2013. — № 2. — С. 48–50.
5. Толстуха Б. А., Уразова И. В., Шерешик Н. Ю. Класс опорных неравенств для задачи $1|pmtn; p_i = p; r_i| \sum \omega_i C_i$ // Сб. тр. междунар. конф. «Дискретная оптимизация и исследование операций» (Новосибирск, 24–28 июня 2013 г.). — Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2013. — С. 154.
6. Bouma W. H., Goldengorin B. A polytime algorithm based on a primal LP model for scheduling problem $1|pmtn; p_i = 2; r_i| \sum \omega_i C_i$ // Recent Adv. Appl. Math. Proc. American Conf. Applied Mathematics (AMERICAN-MATH'10). — Cambridge, MA: Harvard Univ., 2010. — P. 415–420.
7. Brucker P., Knust S. Complexity results for scheduling problems // www.mathematik.uni-osnabrueck.de/research/OR/class.

Симанчѳв Руслан Юрьевич,
e-mail: osiman@rambler.ru
Шерешик Николай Юрьевич,
e-mail: m-m_pikm@mail.ru

Статья поступила
13 марта 2014 г.
Переработанный вариант —
7 мая 2014 г.