ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—август 2014. Том 21, № 4. С. 62–79

УДК 519.87

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СЛОЖНОСТЬ ДИСКРЕТНОЙ ЗАДАЧИ КОНКУРЕНТНОГО РАЗМЕЩЕНИЯ ПРЕДПРИЯТИЙ *)

А. А. Мельников

Аннотация. Рассматривается дискретная задача конкурентного размещения предприятий, в которой заданы конечное множество потребителей и конечное множество мест, доступных для открытия предприятий. Две конкурирующие фирмы последовательно — сначала первая, а затем вторая — размещают в некоторых из этих мест предприятия, стремясь получить максимальную прибыль от обслуживания потребителей, каждый из которых для своего обслуживания выбирает среди открытых фирмами предприятий ровно одно, исходя из своих известных предпочтений. Установлена вычислительная сложность задачи в двух частных случаях.

Ключевые слова: полиномиальная иерархия, игра Штакельберга, двухуровневое программирование.

Введение

Рассматривается игра Штакельберга [8, 15], в которой игроки Лидер и Последователь открывают предприятия с целью «захвата» потребителей и максимизации своих целевых функций. Вид целевых функций аналогичен целевой функции задачи размещения предприятий с порядком [5, 6, 10, 14]. Задача Лидера в этой игре состоит в определении множества открываемых предприятий, максимизирующего получаемую прибыль при условии, что часть потребителей будет захвачена Последователем. В литературе эта задача получила название задачи конкурентного размещения предприятий [1], далее будем обозначать её через CompFLP. Для поиска её оптимальных и приближённых решений разработан ряд алгоритмов [2–4, 9]. В данной работе исследуется сложностной статус задачи поиска оптимального решения Лидера в двух частных случаях.

Дальнейшее изложение построено следующим образом. В разд. 1 приводится математическая формулировка задачи CompFLP в терминах

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 14–01–31316).

двухуровневого булева программирования и даются необходимые определения.

В разд. 2 рассматривается частный случай задачи CompFLP, в котором множества потребителей и предприятий совпадают с множеством вершин некоторого графа с неотрицательными длинами рёбер. Для потребителей более предпочтительны предприятия, располагающиеся к ним ближе в смысле расстояний в графе. Данный частный случай полиномиально разрешим, когда граф является путём или простым циклом, а доход от обслуживания потребителя j не зависит от предприятия, которое его обслуживает [1]. В данной работе показано, что даже с сохранением последнего ограничения задача NP-трудна уже в случае графов-звёзд.

В разд. 3 рассматривается случай, в котором множества потребителей и предприятий представлены конечными множествами. Фиксированные затраты игроков на открытие предприятий полагаются нулевыми. Доказывается, что случай является Σ_2^P-трудным. Известен аналогичный результат для случая, когда количество открываемых сторонами предприятий фиксировано [11].

1. Математическая модель

Задача CompFLP состоит в определении множества открываемых предприятий, максимизирующего получаемую Лидером прибыль, когда часть потребителей захвачена Последователем, который также стремится максимизировать свою прибыль.

Для формальной записи задачи введём обозначения и сформулируем необходимые допущения:

$I = \{1, \ldots, m\}$ — множество предприятий (мест возможного размещения предприятий);

$J = \{1, \ldots, n\}$ — множество потребителей;

$f_i,\ i \in I,$ — фиксированные затраты Лидера на открытие предприятия i;

$g_i,\ i \in I,$ — фиксированные затраты Последователя на открытие предприятия i;

$p_{ij},\ i \in I,\ j \in J,$ — доход, получаемый предприятием Лидера i при обслуживании потребителя j;

$q_{ij},\ i \in I,\ j \in J,$ — доход, получаемый предприятием Последователя i при обслуживании потребителя j.

Будем считать, что выбор предприятия, обслуживающего потребителя $j \in J$, производится с учётом предпочтений потребителя j. Считаем, что предпочтения потребителя $j \in J$ задаются отношением линейного порядка $\succ_j$ на множестве I. Для $i, k \in I$ отношение $i \succ_j k$ означает, что из двух открытых предприятий i и k для потребителя $j \in J$ более предпочтительно предприятие i. Отношение $i \succeq_j k$ означает, что либо $i \succ_j k$, либо $i = k$.

Введём следующие переменные, аналогичные переменным классической задачи размещения предприятий:

$x_i = 1$, если Лидер открывает предприятие $i \in I$, и $x_i = 0$ в противном случае;

$x_{ij} = 1$, если предприятие $i \in I$, открытое Лидером, оказывается наиболее предпочтительным для потребителя $j \in J$ среди всех открытых Лидером предприятий, и $x_{ij} = 0$ в противном случае;

$z_i = 1$, если Последователь открывает предприятие $i \in I$, и $z_i = 0$ в противном случае;

$z_{ij} = 1$, если предприятие $i \in I$, открытое Последователем, оказывается наиболее предпочтительным для потребителя $j \in J$ среди всех предприятий, открытых как Лидером, так и Последователем, и $z_{ij} = 0$ в противном случае.

С использованием введённых переменных задача конкурентного размещения предприятий формулируется как задача двухуровневого булева программирования [12]:

$$\max_{(x_i),(x_{ij})} \Big(-\sum_{i\in I} f_i x_i + \sum_{j\in J} \Big(\sum_{i\in I} p_{ij} x_{ij}\Big)\Big(1 - \sum_{i\in I} \widetilde{z}_{ij}\Big)\Big); \tag{1}$$

$$x_i + \sum_{k\in I | i\succ_j k} x_{kj} \leqslant 1, \quad i \in I,\ j \in J; \tag{2}$$

$$x_i \geqslant x_{ij}, \quad i \in I,\ j \in J; \tag{3}$$

$$x_i, x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i \in I,\ j \in J; \tag{4}$$

$$((\widetilde{z}_i), (\widetilde{z}_{ij})) \ \text{— оптимальное решение задачи (5)–(8);}$$

$$\max_{(z_i),(z_{ij})} \Big(-\sum_{i\in I} g_i z_i + \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} q_{ij} z_{ij}\Big); \tag{5}$$

$$x_i + z_i + \sum_{k\in I | i\succ_j k} z_{kj} \leqslant 1, \quad i \in I,\ j \in J; \tag{6}$$

$$z_i \geqslant z_{ij}, \quad i \in I,\ j \in J; \tag{7}$$

$$z_i, z_{ij} \in \{0,1\}, \quad i \in I,\ j \in J. \tag{8}$$

Сформулированная задача (1)–(8) включает задачу верхнего уровня (1)–(4) и задачу нижнего уровня (5)–(8), использующую допустимое решение задачи (1)–(4) в качестве параметров. Задачу верхнего уровня обозначим через $\mathfrak{L}$, её допустимое решение $((x_i),(x_{ij}))$ — через X. Задачу нижнего уровня при фиксированном X обозначим через $\mathfrak{F}(X)$, а задачу (1)–(8) — через $(\mathfrak{L},\mathfrak{F})$. Целевую функцию (1) задачи $\mathfrak{L}$ будем считать также целевой функцией задачи $(\mathfrak{L},\mathfrak{F})$.

Целевая функция (1) задачи $\mathfrak{L}$ выражает величину прибыли, получаемой Лидером с учётом потери части потребителей, захваченных Последователем. Ограничения (2)–(4) являются ограничениями задачи размещения с порядком. Неравенства (2) гарантируют, что в случае, если предприятие i открыто Лидером, потребитель j не будет обслуживаться в предприятии менее привлекательном, чем предприятие i. Эти же неравенства гарантируют, что для обслуживания каждого потребителя может быть выбрано только одно предприятие, открытое Лидером. Целевая функция (5) задачи $\mathfrak{F}(X)$ выражает величину прибыли, получаемой Последователем. Неравенства (6) реализуют условия захвата потребителей Последователем при заданных предприятиях, открытых Лидером. В частности, эти ограничения показывают, что если предприятие открыто Лидером, то оно не может быть открыто Последователем. Остальные ограничения задачи $\mathfrak{F}(X)$ являются ограничениями классической задачи размещения предприятий.

Пару $\big(X,\widetilde{Z}\big)$, где X — допустимое решение задачи $\mathfrak{L}$, $\widetilde{Z}=((\widetilde{z}_i),(\widetilde{z}_{ij}))$ — оптимальное решение задачи $\mathfrak{F}(X)$, назовём *допустимым решением* задачи $(\mathfrak{L},\mathfrak{F})$. Значение целевой функции (1) на допустимом решении $\big(X,\widetilde{Z}\big)$ задачи $(\mathfrak{L},\mathfrak{F})$ обозначим через $L(X,\widetilde{Z})$.

Поскольку при некоторых допустимых решениях X задачи $\mathfrak{L}$ задача $\mathfrak{F}(X)$ может иметь несколько оптимальных решений, вопрос выбора решения Последователя требует конкретизации. В [7, 12] выделено два случая: среди оптимальных решений нижнего уровня выбирается либо наиболее, либо наименее выгодное для Лидера. Допустимое решение $(X,\overline{Z})$ задачи $(\mathfrak{L},\mathfrak{F})$ называется *оптимистическим решением* задачи $(\mathfrak{L},\mathfrak{F})$, если $L(X,\overline{Z})\geqslant L(X,\widetilde{Z})$ для всякого оптимального решения $\widetilde{Z}$ задачи $\mathfrak{F}(X)$. Допустимое решение $(X,\overline{Z})$ задачи $(\mathfrak{L},\mathfrak{F})$ называется *гарантированным* (в других источниках *пессимистическим*) *решением* задачи $(\mathfrak{L},\mathfrak{F})$, если $L(X,\overline{Z})\leqslant L(X,\widetilde{Z})$ для всякого оптимального решения $\widetilde{Z}$ задачи $\mathfrak{F}(X)$.

Оптимистическое (гарантированное) решение $(X^*,\overline{Z}^*)$ назовём *оптимальным оптимистическим* (*гарантированным*) *решением*, если $L(X^*,\overline{Z}^*)\geqslant L(X,\overline{Z})$ для всякого оптимистического (гарантированного) решения $(X, \overline{Z})$.

2. Задача конкурентного размещения на графе-звезде

Рассмотрим широко известную комбинаторную задачу о разбиении. Задано n натуральных чисел $w_1, \dots, w_n$, сумма которых равна чётному числу S^*. Требуется установить, существует ли набор индексов $\mathcal{J}^* \subseteq \{1, \dots, n\}$ такой, что $\sum\limits_{j \in \mathcal{J}^*} w_j = S^*/2$.

Теорема 1 (о вычислительной сложности задачи о разбиении [13]). *Задача о разбиении* NP-*полна.*

Графом-звездой называют полный двудольный граф $K_{1,l}, l \in \mathbb{N}$. Покажем далее, что решение произвольного примера задачи о разбиении можно получить за полиномиальное время, зная оптимальное решение специально построенного примера задачи CompFLP на графе-звезде, установив тем самым сложностной статус последней.

Теорема 2. *Задача* CompFLP *на графе-звезде* NP-*трудна.*

Доказательство. Рассмотрим вход $\{w_1, \dots, w_n\}$ задачи о разбиении и граф-звезду $G = K_{1,n}$ с листьями, пронумерованными числами от 1 до n, центральная вершина которого имеет номер 0. Длины всех рёбер графа G равны 1. Вход задачи CompFLP построим следующим образом. Пусть $I = J = \{0, \dots, n\}$. Для произвольного $\varepsilon \in (0, 1)$ положим

$$f_i = \begin{cases} w_i, & i \in \{1, \dots, n\}, \\ S^*, & i = 0, \end{cases} \qquad g_i = \begin{cases} S^*, & i \in \{1, \dots, n\}, \\ S^*/2 + \varepsilon, & i = 0, \end{cases}$$

$$p_{ij} = q_{ij} = \begin{cases} w_j, & i \in I,\ j \in \{1, \dots, n\}, \\ 0, & i \in I,\ j = 0. \end{cases}$$

Покажем, что в исходном примере задачи о разбиении ответ «Да» тогда и только тогда, когда в построенном примере задачи CompFLP существует решение Лидера со значением целевой функции не меньше $S^*/2$.

Действительно, пусть существует набор индексов $\mathcal{J}^* \subseteq \{1, \dots, n\}$ такой, что $\sum\limits_{j \in \mathcal{J}^*} w_j = S^*/2$. Разместим предприятия Лидера во всех листьях с номерами из множества $\mathcal{J}^*$. Суммарный доход от обслуживания потребителей, которые могут быть захвачены Последователем, т. е. потребителей множества $J \backslash \mathcal{J}^*$, равен $S^*/2$, поэтому единственное оптимальное решение Последователя — нулевое. Значение целевой функции Лидера в таком случае равно $S^*/2$.

Если в данном примере задачи о разбиении ответ «Нет», то рассмотрим множество $\mathcal{J}$ открытых предприятий в оптимальном решении Лидера для построенного нами примера. Очевидно, что $0 \notin \mathcal{J}$. Положим $S_{\mathcal{J}} = \sum\limits_{j \in \mathcal{J}} w_j$.

Возможны два случая. Если $S_{\mathcal{J}} < S^*/2$, то, разместив единственное предприятие в нулевой вершине, Последователь захватит потребителей из множества $J \backslash \mathcal{J}$. Значение его целевой функции в таком случае будет равно $S^* - S_{\mathcal{J}} - g_0 = S^*/2 - S_{\mathcal{J}} - \varepsilon > 0$. Последнее неравенство выполнено в силу целочисленности $S_{\mathcal{J}}$ и выбора ε. Поскольку значение целевой функции Последователя для всех остальных его решений не положительны, мы нашли единственное оптимальное решение задачи нижнего уровня. Целевая функция Лидера в таком случае равна 0.

Если $S_{\mathcal{J}} > S^*/2$, то единственным оптимальным решением Последователя является нулевое решение. Лидер обслуживает всех потребителей, а значение его целевой функции равно

$$-\sum_{i \in \mathcal{J}} f_i + \sum_{j \in \{1,\ldots,n\}} w_j = -S_{\mathcal{J}} + S^* < S^*/2.$$

Теорема 2 доказана.

Следует отметить, что в силу единственности оптимального решения Последователя показано, что в данном случае NP-трудными являются задачи поиска оптимального оптимистического, а также оптимального гарантированного решений Лидера.

3. Задача конкурентного размещения с нулевыми фиксированными затратами

Пусть задано множество булевых переменных $\mathcal{V} = \mathcal{X} \cup \mathcal{Z}$, где $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_m\}$, $\mathcal{Z} = \{z_1, \ldots, z_n\}$, $\mathcal{X} \cap \mathcal{Z} = \varnothing$. Рассмотрим формулу $\Phi = \exists x_1 \ldots \exists x_m \forall z_1 \ldots \forall z_n \varphi$ без свободных переменных. Задача по определению выполнимости формулы Φ («существует ли такое означивание γ переменных множества $\mathcal{X}$, что для любого означивания σ переменных множества $\mathcal{Z}$ верно $(\sigma \cdot \gamma)\varphi = \text{true}$?») получила в литературе обозначение $\exists\forall\text{Sat}$.

Теорема 3 (о вычислительной сложности задачи $\exists\forall\text{Sat}$ [16]). *Задача* $\exists\forall\text{Sat}$ Σ_2^P*-полна.*

Литералом над множеством $\mathcal{V}$ назовём переменную $v \in \mathcal{V}$ или её отрицание $\overline{v}$, а *термом* — конъюнкцию литералов. Далее будем полагать, что формула φ имеет вид $\varphi = \bigvee\limits_{k=1}^{M} t_k$, где каждый терм t_k содержит ровно один литерал над множеством переменных $\mathcal{X}$ и три литерала над множеством $\mathcal{Z}$. Задачу $\exists\forall$Sat с перечисленными ограничениями на вид формулы φ обозначим через $\exists_1\forall_3$Sat.

Утверждение 1 (о вычислительной сложности задачи $\exists_1\forall_3$Sat). *Задача* $\exists_1\forall_3$Sat *является* Σ_2^P*-полной.*

Доказательство. Пусть формула φ задана в 3-ДНФ [13]. Без ограничения общности можно считать, что все термы формулы φ содержат переменные множества $\mathcal{Z}$. Далее термы вида $t = (x_1 \& x_2 \& z)$ заменим на $\forall z_t (x_1 \& z_t \& z) \vee (x_2 \& \overline{z}_t \& z)$ для некоторой новой переменной z_t, которую добавим к множеству $\mathcal{Z}$. Термы вида $t = (z_1 \& z_2 \& z_3)$ заменим на $\exists x_t (x_t \& z_1 \& z_2 \& z_3)$ для некоторой новой переменной x_t, которую добавим к множеству $\mathcal{X}$. Заметим, что все оставшиеся термы, содержащие три литерала, имеют вид $t = (x \& z_1 \& z_2)$. Каждый такой терм заменим на $\forall z_t (x \& z_1 \& z_2 \& z_t) \vee (x \& z_1 \& z_2 \& \overline{z}_t)$ для некоторой новой переменной z_t, которую добавим к множеству $\mathcal{Z}$. Таким образом, произвольный пример задачи $\exists\forall$Sat сводится к примеру задачи $\exists_1\forall_3$Sat, что и доказывает сложностной статус последней. Утверждение 1 доказано.

Рассмотрим пример задачи $\exists_1\forall_3$Sat, в котором требуется установить выполнимость формулы Φ. Построим пример задачи CompFLP с нулевыми затратами на открытие предприятий, по оптимальному решению которого можно однозначно судить о выполнимости формулы Φ. Для этого нам требуется определить множество потребителей J, множество доступных мест размещения предприятий I, матрицы доходов Лидера и Последователя (p_{ij}) и (q_{ij}). Стоимости открытия предприятий Лидера и Последователя f_i и g_i будут нулевыми для всех $i \in I$. Предпочтения потребителей будем задавать $|I| \times |J|$-матрицей (r_{ij}). Для каждого фиксированного $j \in J$ будем полагать, что числа $r_{ij}, i \in I$ попарно различны. Тогда для любых $i, k \in I$ соотношение $r_{ij} < r_{kj}$ эквивалентно $i \succ_j k$.

Для каждой переменной $x \in X$ и её отрицания $\overline{x}$ заведём по одному потребителю. Обозначим их через a_x и $a_{\overline{x}}$ соответственно. Множество всех таких потребителей обозначим через $A_{\mathcal{X}} = \{a_x, a_{\overline{x}} \mid x \in \mathcal{X}\}$. Аналогично для каждой переменной $z \in \mathcal{Z}$ и ее отрицания $\overline{z}$ заведём по одному потребителю, которых обозначим b_z и $b_{\overline{z}}$ соответственно. Положим $B_{\mathcal{Z}} = \{b_z, b_{\overline{z}} \mid z \in \mathcal{Z}\}$. Определим множество предприятий $I = A_{\mathcal{X}} \cup B_{\mathcal{Z}}$. В дальнейшем подстроим значения числовых параметров задачи таким образом, что в оптимальном решении Лидер откроет свои предприятия в точках множества $A_{\mathcal{X}}$, а Последователь — в точках $B_{\mathcal{Z}}$, причём предприятие будет открыто ровно в одной из двух точек, соответствующих каждой булевой переменной. Тогда размещению предприятий Лидера можно будет естественным образом сопоставить означивание переменных множества $\mathcal{X}$, а размещению предприятий Последователя — означивание переменных из $\mathcal{Z}$. Здесь и далее под размещением предприятий Лидера и Последователя будем иметь в виду набор значений переменных $x = (x_i)$ и $z = (z_i)$, $i \in I$, соответственно. Под распределением потребителей будем понимать соответствующие значения переменных (x_{ij}) и (z_{ij}). Заметим, что они однозначно вычисляются, исходя из размещений x и z сторон.

Для того чтобы Лидеру было невыгодно открывать предприятия в точках $B_{\mathcal{Z}}$, для каждой переменной $z \in \mathcal{Z}$ и её отрицания $\overline{z}$ заведём ещё по одному потребителю, которых обозначим через a_z и $a_{\overline{z}}$ соответственно. Положим $A_{\mathcal{Z}} = \{a_z, a_{\overline{z}} \mid z \in \mathcal{Z}\}$. При открытии предприятия множества $B_{\mathcal{Z}}$ Лидер будет терять доход от обслуживания соответствующего потребителя множества $A_{\mathcal{Z}}$, что повлечёт неоптимальность такого решения. Для того чтобы Последователь также оставался в своих рамках, по аналогичной схеме для каждой переменной $x \in \mathcal{X}$ и её отрицания $\overline{x}$ заведём ещё по одному потребителю. Обозначим их через b_x и $b_{\overline{x}}$ соответственно. Пусть $B_{\mathcal{X}} = \{b_x, b_{\overline{x}} \mid x \in \mathcal{X}\}$.

Сопоставим каждому терму t формулы φ отдельного потребителя j_t. Множество таких потребителей обозначим через T. Потребитель j_t принесёт доход Лидеру в случае, если при означивании переменных, соответствующем размещению предприятий сторон, терм t принимает значение $true$. В противном случае потребитель j_t принесёт доход Последователю. Таким образом, Последователь в качестве оптимального будет выбирать то размещение, для которого число захваченных потребителей множества T максимально. В терминах задачи о выполнимости Последователь минимизирует число термов, принимающих значение $true$. Если ему не удастся сделать это число равным нулю, то формула Φ выполнима.

Итак, построение множества потребителей завершено. Положим $J = A_{\mathcal{X}} \cup B_{\mathcal{X}} \cup A_{\mathcal{Z}} \cup B_{\mathcal{Z}} \cup T$. Как анонсировано, поведение потребителя зависит от того, к какому из данных пяти множеств он принадлежит.

Для некоторого $x \in \mathcal{X}$ рассмотрим потребителя $a_x \in A_{\mathcal{X}}$. Для элементов r_{i,a_x} матрицы предпочтений и элементов p_{i,a_x}, q_{i,a_x} матриц доходов положим $r_{i,a_x} = \begin{cases} 1, & i = a_x, \\ 2, & i = a_{\overline{x}}, \\ \alpha_i & \text{в противном случае,} \end{cases}$ $\quad p_{i,a_x} = \begin{cases} M+1, & i = a_{\overline{x}}, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$

$q_{i,a_x} = 0,\ i \in I$, где α_i — произвольные попарно различные числа, превосходящие 2. Взаимной заменой x и $\overline{x}$ получим устройство предпочтений и доходов от обслуживания для потребителя $a_{\overline{x}}$. Обратим внимание на то, что открывая предприятие ровно в одной из точек a_x или $a_{\overline{x}}$, Лидер получает доход $M+1$. В противном случае доход от обслуживания данных потребителей равен нулю.

Аналогичным образом устроим предпочтения и доходы от обслуживания для потребителей множества $B_{\mathcal{Z}}$: пусть $j = b_z$ для некоторого $z \in \mathcal{Z}$. Тогда положим

$$r_{i,b_z} = \begin{cases} 1, & i = b_z, \\ 2, & i = b_{\overline{z}}, \\ \tau_i & \text{в противном случае,} \end{cases} \qquad p_{i,b_z} = 0, \quad i \in I,$$

$$q_{i,b_z} = \begin{cases} 1, & i = b_z, \\ M+1, & i = b_{\overline{z}}, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где τ_i — произвольные попарно различные числа, превосходящие 2. Как и ранее, преследуем цель заставить Последователя открывать ровно одно предприятие в каждой паре допустимых точек b_z, и $b_{\overline{z}}$, однако обратим внимание на то, что $q_{ii} = 1$ для $i \in B_{\mathcal{Z}}$. Если Лидер откроет предприятие в точке множества $B_{\mathcal{Z}}$, скажем, в b_z, Последователю выгодно открыть своё предприятие в точке $b_{\overline{z}}$. В таком случае потребители a_z и $a_{\overline{z}}$, поведение которых опишем далее, не принесут доход Лидеру, что повлечёт неоптимальность выбранного им решения. Взаимной заменой z и $\overline{z}$ получим устройство предпочтений и доходов от обслуживания для потребителя $b_{\overline{z}}$.

Для некоторого $z \in \mathcal{Z}$ рассмотрим потребителя $a_z \in A_{\mathcal{Z}}$. Положим

$$r_{i,a_z} = \begin{cases} 1, & i = b_z, \\ 2k, & i = a_{x_k}, \\ 2k+1, & i = a_{\overline{x}_k}, \\ \eta_i & \text{в противном случае,} \end{cases} \qquad p_{i,a_z} = \begin{cases} M+1, & i \in A_{\mathcal{X}}, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$q_{i,a_z} = 0,\ i \in I$, где η_i — произвольные попарно различные числа, превосходящие $2m+1$. Для потребителя $a_{\overline{z}}$ в описанных построениях заменим z на $\overline{z}$.

Предпочтения потребителя b_x и доходы от его обслуживания имеют схожий вид:

$$r_{i,b_x} = \begin{cases} 1, & i = a_x, \\ 2k, & i = b_{z_k}, \\ 2k+1, & i = b_{\overline{z}_k}, \\ \beta_i & \text{в противном случае,} \end{cases} \qquad p_{i,b_x} = 0, \quad i \in I,$$

$$q_{i,b_x} = \begin{cases} 1, & i \in B_{\mathcal{Z}}, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где β_i — произвольные попарно различные числа, превосходящие $2n+1$. Заменой x на $\overline{x}$ получим устройство предпочтений и доходов для потребителя $b_{\overline{x}}$.

Осталось описать поведение потребителей множества T, соответствующее множеству термов формулы φ. Возьмём произвольный терм t, представляющий из себя конъюнкцию четырёх литералов. Для определённости пусть $t = x_1 \& z_1 \& z_2 \& z_3$. Для потребителя j_t положим

$$r_{i,j_t} = \begin{cases} 1, & i = b_{\overline{z}_1}, \\ 2, & i = b_{\overline{z}_2}, \\ 3, & i = b_{\overline{z}_3}, \\ 4, & i = a_{x_1}, \\ \delta_i, & i \in B_{\mathcal{Z}} \setminus \{b_{\overline{z}_1}, b_{\overline{z}_2}, b_{\overline{z}_3}\}, \\ \Delta_i & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где δ_i — произвольные попарно различные числа, превосходящие 4, а Δ_i — произвольные попарно различные числа, превосходящие наибольшее из δ_i,

$$p_{i,j_t} = \begin{cases} 1, & i = a_{x_1}, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \qquad q_{i,j_t} = \begin{cases} 1, & i \in B_{\mathcal{Z}}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

На этом построение окончено. Приступим к исследованию полученного примера задачи CompFLP. Для краткости формулировок дополним нашу терминологию.

Определение 1. Размещение Лидера (Последователя) назовём *корректным* , если $x_{b_z} + x_{b_{\overline{z}}} = 0$ для любого $z \in \mathcal{Z}$ ($z_{a_x} + z_{a_{\overline{x}}} = 0$ для любого $x \in \mathcal{X}$).

Определение 2. Размещение Лидера (Последователя) назовём *означивающим* для некоторого $\mathcal{X}' \subseteq \mathcal{X}$ ($\mathcal{Z}' \subseteq \mathcal{Z}$), если $\forall x \in \mathcal{X}'$ $x_{a_x} + x_{a_{\overline{x}}} = 1$ ($\forall z \in \mathcal{Z}'$ $z_{b_z} + z_{b_{\overline{z}}} = 1$).

Зафиксируем произвольное размещение Лидера x. Для $k = 0, 1, 2$ определим множества $\mathcal{Z}_k(x) = \{z \in \mathcal{Z} \mid x_{b_z} + x_{b_{\overline{z}}} = k\}$. При фиксированном размещении Последователя z определим величины:

$\mathcal{T}(x, z)$ — число потребителей множества T, приносящих ненулевой доход Лидеру;

$\mathcal{F}(x, z)$ — число потребителей множества T, приносящих ненулевой доход Последователю.

Лемма 1. *Для размещения Лидера x такого, что $\mathcal{Z}_2(x) \neq \mathcal{Z}$, оптимальные размещения Последователя являются означивающими для $\mathcal{Z}_0(x) \cup \mathcal{Z}_1(x)$.*

Доказательство. Для данного размещения Лидера $x = (x_i)$ рассмотрим произвольное размещение Последователя $z = (z_i)$. Поскольку приносить доход Последователю могут только предприятия множества $B_{\mathcal{Z}}$, предположим, что $\sum\limits_{i \in B_{\mathcal{Z}}} z_i > 0$. Такие размещения существуют в силу того, что $\mathcal{Z}_2(x) \neq \mathcal{Z}$. Рассмотрим соответствующее размещению сторон распределение потребителей (z_{ij}). Из вида предпочтений потребителей и матрицы (q_{ij}) имеем

$$-\sum_{i \in I} g_i z_i + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} q_{ij} z_{ij} = \sum_{i \in I} \Big(\sum_{j \in B_{\mathcal{X}}} q_{ij} z_{ij} + \sum_{j \in B_{\mathcal{Z}}} q_{ij} z_{ij} + \sum_{j \in T} q_{ij} z_{ij} \Big).$$

Пусть найдётся $z \in \mathcal{Z}_0(x) \cup \mathcal{Z}_1(x)$ такой, что $z_{b_z} + z_{b_{\overline{z}}} = 0$. Хотя бы одно из мест b_z, $b_{\overline{z}}$ свободно от предприятий Лидера. Пусть это будет b_z. Тогда рассмотрим размещение Последователя z', отличающееся от z только тем, что $z'_{b_z} = 1$ и $z'_{b_{\overline{z}}} = 0$, и соответствующее ему распределение потребителей (z'_{ij}). Заметим, что

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in B_{\mathcal{X}}} q_{ij} z'_{ij} \geqslant \sum_{i \in I} \sum_{j \in B_{\mathcal{X}}} q_{ij} z_{ij}, \quad \sum_{i \in I} \sum_{j \in T} q_{ij} z'_{ij} \geqslant \sum_{i \in I} \sum_{j \in T} q_{ij} z_{ij}.$$

Кроме того, поскольку

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in B_{\mathcal{Z}}} q_{ij} z'_{ij} > \sum_{i \in I} \sum_{j \in B_{\mathcal{Z}}} q_{ij} z_{ij},$$

размещение z' для Последователя предпочтительнее z.

Пусть теперь найдётся $z \in \mathcal{Z}_0(x)$ такой, что $z_{b_z} + z_{b_{\overline{z}}} = 2$. Рассмотрим размещение z', отличающееся от z только тем, что $z'_{b_z} = 0$. Разность между значениями целевой функции Последователя на размещениях z' и z равна $M + \mathcal{F}(x, z') - \mathcal{F}(x, z)$. В силу того, что $\mathcal{F}(x, z') \geqslant 0,\ \mathcal{F}(x, z) \leqslant M$, эта разность неотрицательна. Предположим, что она в точности равна нулю. Это возможно тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}(x, z') = 0$ и $\mathcal{F}(x, z) = M$, что в свою очередь означает, что при размещении z все потребители множества T обслуживались единственным предприятием, b_z. Вернём его в размещение z': положим $z'_{b_z} = 1,\ z'_{b_{\overline{z}}} = 0$. Для данного z' получим $\mathcal{F}(x, z') = M$, откуда опять же следует, что размещение z' оказывается для Последователя предпочтительнее размещения z. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Для произвольного корректного размещения Лидера x оптимальные размещения Последователя суть в точности размещения z, удовлетворяющие свойствам*:

(i) *z является означивающим для $\mathcal{Z}$;*

(ii) *z является корректным;*

(iii) *если z' — корректное означивающее для $\mathcal{Z}$ размещение Последователя, то $\mathcal{F}(x, z') \leqslant \mathcal{F}(x, z)$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное корректное размещение Лидера x и некоторое оптимальное размещение Последователя z. В силу корректности размещения Лидера из леммы 1 сразу получаем (i), но кроме того заметим, что в таком случае значение целевой функции Последователя можно представить в виде суммы

$$N^1_{\mathcal{X}}(z) + 2N^2_{\mathcal{X}}(z) + (M+1)N^1_{\mathcal{Z}}(z) + N^2_{\mathcal{Z}}(z) + \mathcal{F}(x, z),$$

где

$$N^1_{\mathcal{X}}(z) = \#\{x \in \mathcal{X} \mid x_{a_x} + x_{a_{\overline{x}}} + z_{a_x} + z_{a_{\overline{x}}} = 1\},$$
$$N^2_{\mathcal{X}}(z) = \#\{x \in \mathcal{X} \mid x_{a_x} + x_{a_{\overline{x}}} + z_{a_x} + z_{a_{\overline{x}}} = 0\},$$
$$N^1_{\mathcal{Z}}(z) = \#\{z \in \mathcal{Z}_0(x) \mid z_{b_z} + z_{b_{\overline{z}}} = 1\}, \quad N^2_{\mathcal{Z}}(z) = \#\{j \in B_{\mathcal{Z}} \mid z_j = 1\}.$$

Пусть $\sum\limits_{i \in A_{\mathcal{X}}} z_i > 0$. Рассмотрим решение z', отличающееся от z только тем, что $z'_i = 0,\ i \in A_{\mathcal{X}}$. Заметим, что $N^1_{\mathcal{Z}}(z) = N^1_{\mathcal{Z}}(z')$ и $N^2_{\mathcal{Z}}(z) = N^2_{\mathcal{Z}}(z')$. Кроме того, $N^1_{\mathcal{X}}(z) + 2N^2_{\mathcal{X}}(z) < N^1_{\mathcal{X}}(z') + 2N^2_{\mathcal{X}}(z')$. Поскольку потребители множества T не приносят доход предприятиям Последователя, находящимся в точках $A_{\mathcal{X}}$, верно также, что $\mathcal{F}(x, z) \leqslant \mathcal{F}(x, z')$. Приходим к противоречию с оптимальностью z.

Итак, для корректных размещений Лидера любое оптимальное размещение Последователя обладает свойствами (i) и (ii). Заметим, что значения целевой функции Последователя для двух размещений z и z', удовлетворяющих данным свойствам, могут отличаться только в силу отличия величин $\mathcal{F}(x,z)$ и $\mathcal{F}(x,z')$. Следовательно, имеет место (iii). Лемма 2 доказана.

Для оптимального значения целевой функции Лидера L^*_Φ получаем следующую оценку снизу.

Следствие 1. $L^*_\Phi \geqslant (M+1)\,(|\mathcal{X}| + |\mathcal{Z}|)$.

Доказательство. Рассмотрим произвольное корректное и означивающее для $\mathcal{X}$ размещение Лидера x, некоторое оптимальное размещение Последователя z и соответствующее им распределение потребителей (z_{ij}). Для целевой функции Лидера имеем

$$
\begin{aligned}
-\sum_{i\in I} f_i x_i + \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} p_{ij}x_{ij} &= \sum_{i\in I}\Big(\sum_{j\in A_\mathcal{X}} p_{ij}x_{ij} + \sum_{j\in A_\mathcal{Z}} p_{ij}x_{ij} + \sum_{j\in T} p_{ij}x_{ij}\Big) \\
&= (M+1)\big(R_\mathcal{X}(x,z) + R^1_\mathcal{Z}(x,z) + 2R^2_\mathcal{Z}(x,z)\big) + \mathcal{T}(x,z),
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{aligned}
R_\mathcal{X}(x,z) &= \#\{x \in \mathcal{X} \mid x_{a_x} + x_{a_{\overline{x}}} + z_{a_x} + z_{a_{\overline{x}}} = 1\},\\
R^1_\mathcal{Z}(x,z) &= \#\{z \in \mathcal{Z} \mid x_{b_z} + x_{b_{\overline{z}}} + z_{b_z} + z_{b_{\overline{z}}} = 1\},\\
R^2_\mathcal{Z}(x,z) &= \#\{z \in \mathcal{Z} \mid x_{b_z} + x_{b_{\overline{z}}} + z_{b_z} + z_{b_{\overline{z}}} = 0\}.
\end{aligned}
$$

По лемме 2 $R_\mathcal{X}(x,z) = |\mathcal{X}|$, $R^1_\mathcal{Z}(x,z) = |\mathcal{Z}|$, $R^2_\mathcal{Z}(x,z) = 0$. Поскольку $\mathcal{T}(x,z) \geqslant 0$, получаем требуемое. Следствие 1 доказано.

Лемма 3. *Оптимальное размещение Лидера является корректным и означивающим для* $\mathcal{X}$.

Доказательство. Рассмотрим произвольное размещение Лидера x, некоторое оптимальное размещение Последователя z и соответствующее им распределение потребителей (x_{ij}). Если $\mathcal{Z}_2(x) = \mathcal{Z}$, то доход Лидера от обслуживания потребителей множества $A_\mathcal{Z}$ равен нулю. Тогда в целом его доход не превосходит $(M+1)|\mathcal{X}|+M$, и по следствию 1 размещение x не оптимально. В противном случае в силу леммы 1, если размещение x не является корректным, имеем

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in A_\mathcal{Z}} p_{ij}x_{ij} \leqslant (M+1)(|\mathcal{Z}|-1).$$

Поскольку

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in A_\mathcal{X}} p_{ij}x_{ij} \leqslant (M+1)|\mathcal{X}| \quad \text{и} \quad \sum_{i\in I}\sum_{j\in T} p_{ij}x_{ij} \leqslant M,$$

доход Лидера не превосходит $(M+1)(|\mathcal{X}|+|\mathcal{Z}|)-1$. По следствию 1 размещение x не оптимально.

Пусть размещение x не является означивающим для $\mathcal{X}$. В таком случае найдётся $x \in \mathcal{X}$ такой, что $x_{a_x}+x_{a_{\overline{x}}}=0$ или $x_{a_x}+x_{a_{\overline{x}}}=2$. Несложно убедиться, что в первом случае открытие любого из предприятий a_x, $a_{\overline{x}}$ увеличит значение целевой функции Лидера.

Обратимся ко второму случаю и рассмотрим размещение x', отличающееся от x только тем, что $x'_{a_x}=0$, и некоторое оптимальное размещение Последователя z'. Из леммы 2 следует, что $R_{\mathcal{X}}(x',z')=R_{\mathcal{X}}(x,z)+1$, $R^1_{\mathcal{Z}}(x',z')=R^1_{\mathcal{Z}}(x,z)$, $R^2_{\mathcal{Z}}(x',z')=R^2_{\mathcal{Z}}(x,z)=0$. Поскольку $\mathcal{T}(x,z)\leqslant M$, размещение x' предпочтительнее x и последнее не может быть оптимальным. Лемма 3 доказана.

Пусть z^* — оптимальное размещение Последователя при корректном размещении Лидера x. Положим $\mathcal{F}^*(x)=\mathcal{F}(x,z^*)$. В силу леммы 2 в определении величины $\mathcal{F}^*(x)$ не имеет значения выбор оптимального размещения Последователя в случае, когда таковых несколько.

Следствие 2. *Для любого корректного и означивающего для $\mathcal{X}$ размещения Лидера значение его целевой функции определено однозначно и не зависит от выбора оптимального размещения Последователя.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное корректное и означивающее для $\mathcal{X}$ размещение Лидера x, некоторое оптимальное ответное размещение Последователя z. В силу выкладок следствия 1 значение целевой функции Лидера равно $(M+1)\,(|\mathcal{X}|+|\mathcal{Z}|)+\mathcal{T}(x,z)$. Заметим, что в случае, когда размещения x и z являются корректными и означивающими для $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Z}$ соответственно, имеет место равенство $\mathcal{T}(x,z)+\mathcal{F}(x,z)=M$, поскольку каждый из потребителей множества T приносит ненулевой доход одной из сторон. Из леммы 2 имеем $\mathcal{T}(x,z)=M-\mathcal{F}^*(x)$, что и доказывает следствие 2.

Теорема 4. *Задача* CompFLP *с нулевыми фиксированными затратами Σ_2^P-трудна.*

Доказательство. Покажем, что формула $\Phi=\exists x_1\ldots\exists x_m\forall z_1\ldots\forall z_n\varphi$ выполнима тогда и только тогда, когда $L^*_\Phi>(M+1)(|\mathcal{X}|+|\mathcal{Z}|)$. Пусть Φ выполнима. В таком случае найдётся означивание γ переменных из $\mathcal{X}$ такое, что для любого означивания σ переменных из $\mathcal{Z}$ имеем $(\sigma\cdot\gamma)\varphi=true$. По означиванию γ построим размещение Лидера x^γ. Для каждого $x\in\mathcal{X}$ положим $x^\gamma_{a_x}=1$, $x^\gamma_{a_{\overline{x}}}=0$, если $\gamma x=true$, $x^\gamma_{a_x}=0$, $x^\gamma_{a_{\overline{x}}}=1$, если $\gamma x=false$. Означиванию σ переменных из $\mathcal{Z}$ по аналогичному правилу сопоставим размещение Последователя z^σ. Для каждого $z \in \mathcal{Z}$ положим $z^{\sigma}_{b_z} = 1$, $z^{\sigma}_{b_{\overline{z}}} = 0$, если $\sigma z = true$, $z^{\sigma}_{b_z} = 0$, $z^{\sigma}_{b_{\overline{z}}} = 1$, если $\sigma z = false$. Описанное выше правило осуществляет взаимно однозначное соответствие между множеством означиваний переменных из $\mathcal{X}$ ($\mathcal{Z}$) и множеством корректных и означивающих для $\mathcal{X}$ ($\mathcal{Z}$) размещений Лидера (Последователя).

Обратим внимание на то, что когда речь идёт о корректных и означивающих для $\mathcal{X}$ в случае Лидера и означивающих для $\mathcal{Z}$ в случае Последователя размещениях, какими являются и построенные выше размещения x^{γ} и z^{σ}, величины $\mathcal{T}(x^{\gamma}, z^{\sigma})$ и $\mathcal{F}(x^{\gamma}, z^{\sigma})$ приобретают ещё один смысл: они равны числу термов t формулы φ, для которых $(\sigma \cdot \gamma)t = true$ и $(\sigma \cdot \gamma)t = false$ соответственно. В силу выполнимости Φ множество выполненных термов непусто для любого означивания σ переменных из $\mathcal{Z}$. Другими словами, $\mathcal{F}^*(x^{\gamma}) < M$. Пользуясь доказательством следствия 2, получаем требуемое:

$$L^*_{\Phi} \geqslant (M+1)(|\mathcal{X}| + |\mathcal{Z}|) + M - F^*(x^{\gamma}) > (M+1)(|\mathcal{X}| + |\mathcal{Z}|).$$

В обратную сторону, пусть $L^*_{\Phi} > (M+1)(|\mathcal{X}| + |\mathcal{Z}|)$. По лемме 3 размещение x^*, на котором достигается оптимальное значение целевой функции, является корректным и означивающим для $\mathcal{X}$. Такому размещению можно естественным образом сопоставить означивание γ^* переменных из $\mathcal{X}$. Положим $\gamma^* x = true$, если $x^*_{a_x} = 1$ и $\gamma^* x = false$, если $x^*_{a_{\overline{x}}} = 1$. По лемме 2 оптимальное размещение Последователя содержится в множестве корректных и означивающих для $\mathcal{Z}$ размещений, каждому из которых по аналогичному правилу можно сопоставить означивание σ переменных из $\mathcal{Z}$. Положим $\sigma z = true$, если $z_{b_z} = 1$, и $\sigma z = false$, если $z_{b_{\overline{z}}} = 1$. Таким образом, можно переписать выражение для целевой функции Лидера:

$$L_{\Phi}(x^*) = (M+1)(|\mathcal{X}| + |\mathcal{Z}|) + \min_{\sigma} \mathcal{T}(x^*, z^{\sigma}) > (M+1)(|\mathcal{X}| + |\mathcal{Z}|).$$

Следовательно, при означивании γ^* переменных из $\mathcal{X}$ и любом означивании σ переменных из $\mathcal{Z}$ число $\mathcal{T}(x^*, z^{\sigma})$ термов t формулы φ таких, что $(\sigma \cdot \gamma^*)t = true$, положительно. Таким образом, формула Φ выполнима. Теорема 4 доказана.

Следствие 3. *Задача* CompFLP Σ^P_2*-трудна в случае, когда начальные затраты* $f_i = g_i = 0$, $i \in I$, *а все элементы матриц доходов принимают значение* 0 *или* 1.

Доказательство. Достаточно заметить, что потребитель, приносящий доход $M{+}1$, эквивалентен набору из $M{+}1$ одинакового потребителя, приносящего доход 1. Следствие 3 доказано.

В силу следствия 2 задачи поиска оптимальных гарантированного и оптимистического решения Лидера для построенного примера совпадают, следовательно, совпадают и их вычислительные сложности.

4. Заключение

В работе установлена вычислительная сложность поиска оптимальных гарантированного и оптимистического решений задачи CompFLP в двух частных случаях. Показано, что нулевые затраты на открытие предприятий не делают задачу тривиальной, в данных ограничениях она является Σ_2^P-трудной. Более того, размер примера задачи CompFLP, полученного алгоритмом сведе́ния, полиномиально ограничен относительно размера входа исходной задачи $\exists\forall$Sat даже при записи его в унарной кодировке, что является аналогом полноты в сильном смысле. Установлено также, что задача CompFLP на сети перестаёт быть полиномиально разрешимой и становится труднорешаемой при переходе от простых цепей к графам-паукам.

Приведённые результаты локализуют область поисков полиномиально разрешимых случаев задачи CompFLP и обосновывают разработку метаэвристических процедур и алгоритмов локального поиска как хорошо зарекомендовавших себя при решении задач высокой вычислительной сложности.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Береснев В. Л.** Верхние оценки для целевых функций дискретных задач конкурентного размещения предприятий // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2008. — Т. 15, № 4. — С. 3–24.
Beresnev V. L. Upper bounds for objective functions of discrete competitive facility location problems // J. Appl. Industr. Math. — 2009. — Vol. 3, N 4. — P. 419–432.
2. **Береснев В. Л.** Алгоритмы локального поиска для задачи конкурентного размещения предприятий // Автоматика и телемеханика. — 2012. — № 3. — С. 12–27.
Beresnev V. L. Local search algorithms for the problem of competitive location of enterprises // Autom. Remote Control. — 2012. — Vol. 73, N 3. — P. 425–439.
3. **Береснев В. Л., Гончаров Е. Н., Мельников А. А.** Локальный поиск по обобщённой окрестности для задачи оптимизации псевдобулевых функций // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2011. — Т. 18, № 4. — С. 3–16.
Beresnev V. L., Goncharov E. N., Mel'nikov A. A. Local search with a generalized neighborhood in the optimization problem for pseudo-Boolean functions // J. Appl. Industr. Math. — 2012. — Vol. 6, N 1. — P. 22–30.

4. **Береснев В. Л., Мельников А. А.** Приближённые алгоритмы для задачи конкурентного размещения предприятий // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2010. — Т. 17, № 6. — С. 3–19.
Beresnev V. L., Melnikov A. A. Approximate algorithms for the competitive facility location problems // J. Appl. Industr. Math. — 2011. — Vol. 5, N 2. — P. 180–190.
5. **Васильев И. Л., Климентова К. Б.** Метод ветвей и отсечений для задачи размещения с предпочтениями клиентов // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2009. — Т. 16, № 2. — С. 21–41.
Vasil'ev I. L., Klimentova K. B. The branch and cut method for the facility location problem with clients' preferences // J. Appl. Industr. Math. — 2010. — Vol. 4, N 3. — P. 441–454.
6. **Васильев И. Л., Климентова К. Б., Кочетов Ю. А.** Новые нижние оценки для задачи размещения с предпочтениями клиентов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 2009. — Т. 49, № 6. — С. 1055–1066.
Vasil'ev I. L., Klimentova K. B., Kochetov Yu. A. New lower bounds for the facility location problem with clients' preferences // Comput. Math. Math. Phys. — 2009. — Vol. 49, N 6. — P. 1010–1020.
7. **Гермейер Ю. Б.** Игры с непротивоположными интересами. — М.: Наука, 1976. — 328 с.
8. **Кононов А. В., Кочетов Ю. А., Плясунов А. В.** Конкурентные модели размещения производства // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 2009. — Т. 49, № 6. — С. 1037–1054.
Kononov A. V., Kochetov Yu. A., Plyasunov A. V. Competitive facility location models // Comput. Math. Math. Phys. — 2009. — Vol. 49, N 6. — P. 994–1009.
9. **Beresnev V.** Branch-and-bound algorithm for competitive facility location problem // Comput. Oper. Res. — 2013. — Vol. 40. — P. 2062–2070.
10. **Canovas L., Garcia S., Labbe M., Marin A.** A strengthened formulation for the simple plant location problem with order // Oper. Res. Lett. — 2007. — Vol. 35. — P. 141–150.
11. **Davydov I., Kochetov Yu., Plyasunov A.** On the complexity of the $(r|p)$-centroid problem in the plane // TOP. — 2013. — DOI: 10.1007/s11750-013-0275-y.
12. **Dempe S.** Foundations of bilevel programming. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002. — 332 p.
13. **Garey M. R., Johnson D. S.** Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completeness. — San Francisco: W. H. Freeman Co., 1979. — 338 p.
14. **Krarup J., Pruzan P. M.** The simple plant location problem: survey and synthesis // Eur. J. Oper. Res. — 1983. — N 12. — P. 36–81.
15. **Stackelberg H.** The theory of the market economy. — Oxford: Oxford Univ. Press, 1952. — 289 p.

16. **Stockmeyer L. J.** The polynomial-time hierarchy // Theor. Comput. Sci. — 1977. — N 3. — P. 1–22.

Мельников Андрей Андреевич,
e-mail: melnikov@math.nsc.ru

Статья поступила
18 марта 2014 г.

Переработанный вариант —
24 мая 2014 г.