ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Сентябрь—октябрь 2014. Том 21, № 5. С. 40–53

УДК 519.833.2

ЧИСЛЕННЫЙ ПОИСК РАВНОВЕСИЯ В МОДЕЛИ КУРНО С S-ОБРАЗНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ИЗДЕРЖЕК *)

И. М. Минарченко

Аннотация. Рассмотрена игровая модель Курно с линейной функцией спроса и S-образными функциями издержек, заданными полиномами третьей степени. Благодаря свойству потенциальности модель сведена к задаче максимизации одной функции — потенциала. Показано, что полученная задача оптимизации может иметь более одной стационарной точки, следовательно, рассматриваемая модель Курно может иметь более одного равновесия. Предложены методы нахождения стационарных точек потенциала, основанные на применении вогнутых опорных функций-минорант. Проведено численное сравнение методов.

Ключевые слова: модель Курно, равновесие Нэша, потенциальная игра, DC-разложение, опорная функция.

Введение

Модель Курно до сих пор актуальна как математическая модель [16, 19, 22, 23], а также в различных приложениях [7, 15, 20, 29, 30], что связано отчасти с простотой соотношений, участвующих в записи модели, и, как следствие, с простотой её анализа. Многие основополагающие работы посвящены линейным или выпуклым моделям (см., например, [2, 10]). В [16] рассмотрен случай с гиперболической функцией спроса. При этом автору не известны работы, в которых рассматривается модель с нелинейными издержками вида, предлагаемого в данной статье.

Линейная функция издержек зачастую не отражает реальную действительность должным образом, и потому возникает необходимость замены её нелинейной функцией, которая отвечает основным требованиям: не убывает, определена на неотрицательной области и принимает

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке совместного интеграционного проекта СО и УрО РАН «Теория и методы решения задач дискретной оптимизации и их применение в информационно-телекоммуникационных системах».

неотрицательные значения. В данной работе в качестве функции издержек предлагается использовать такую функцию, у которой участок вогнутости сменяется выпуклым участком, иными словами, имеющую S-образный вид. Вогнутый участок можно трактовать как участок ввода производственных мощностей, а выпуклый — как этап их нормальной эксплуатации. Обоснование издержек подобного вида можно найти в [3], а также они описываются в [10] и других учебниках по микроэкономике.

Мы предлагаем в качестве S-образной функции использовать полином третьей степени как наиболее простую функцию данного вида. Функция спроса, как и в классической постановке, принимается линейной. Линейный спрос в модели Курно рассматривается, например, в [7, 15, 16, 18, 26, 29]. В [17, 25, 27] линейная функция спроса изучается в условиях неопределённости в других моделях.

Введение невыпуклости, очевидно, увеличивает сложность анализа и нахождения равновесия в модели по сравнению с хорошо изученными выпуклыми аналогами; в связи с потерей функциями издержек выпуклости нельзя применить стандартную теорему существования равновесия в модели, изложенную в [2].

Целый ряд статей также посвящён динамической версии модели, которую затрагивать не будем.

Целью данной работы является анализ модели Курно с линейным спросом и функциями издержек, заданными полиномами третьей степени, и поиск равновесий Нэша в ней. Поскольку задача поиска равновесия в рассматриваемой модели не поддаётся аналитическому решению, цель работы сводится к поиску и адаптации эффективных численных методов, с помощью которых можно было бы отыскивать равновесия в модели.

1. Постановка задачи

Рассмотрим модель Курно с n участниками, где i-й участник предлагает на один и тот же рынок однородный продукт в количестве x_i, при этом

$$x_i \in X^i = [\check{x}_i, \widehat{x}_i], \quad \widehat{x}_i > \check{x}_i \geqslant 0,$$

возможен случай $\widehat{x}_i = +\infty$ для некоторых $i \in N$.

Ограничения на объём производства обусловлены физическим смыслом задачи (технологическими ограничениями участников). Такие ограничения вводятся, в том числе для модели Курно, в [7, 14, 29], а также во многих других работах как теоретического, так и прикладного характера. В [1, 24] ограничения на выпуск закладываются в функцию издержек таким образом, что при объёме выпуска, большем некоторого значения, предельные издержки равны или стремятся к бесконечности; нам такой подход видится излишне усложняющим задачу. Ограничения на выпуск могут быть также обусловлены поведением других участников, что отражается в играх с запрещёнными ситуациями [4]. В работах [11, 12], также посвящённым играм с запрещёнными ситуациями, результаты иллюстрируются на примере модели Курно. В рассматриваемой нами постановке ограничения на выпуск не зависят от стратегий, выбираемых остальными участниками.

Введём вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и множества $N = \{1, 2, \dots, n\}$ и $X = X^1 \times X^2 \times \dots \times X^n$. Цена на продукцию определяется линейной обратной функцией спроса, зависящей от суммарного объёма предложения:

$$p(x) = d - a \sum_{j \in N} x_j, \tag{1}$$

где $d > 0$, $a > 0$. Каждый участник исходит из максимума прибыли, т. е., оперируя собственным объёмом предложения, максимизирует функцию прибыли

$$F_i(x) = p(x) x_i - C_i(x_i), \tag{2}$$

где $C_i \colon X^i \to \mathbb{R}^+$ — неубывающая функция издержек, $\mathbb{R}^+$ — множество неотрицательных действительных чисел (множество всех действительных чисел будем обозначать через $\mathbb{R}$).

Отметим, что математически возможен случай $p(x) < 0$ при некотором $x \in X$. Не будем вводить никаких дополнительных ограничений, запрещающих данную ситуацию, поскольку такое x заведомо не будет являться равновесием. Это следует из того, что при отрицательной цене игроки будут уходить с рынка, зануляя объёмы производства; в случае $x_i = 0$ для всех $i \in N$ получим $p(x) = d > 0$.

В данной работе рассматриваются функции издержек в виде полиномов третей степени

$$C_i(x_i) = \alpha_i x_i^3 + \beta_i x_i^2 + \gamma_i x_i + \delta_i, \quad i \in N. \tag{3}$$

Для обеспечения S-образного вида, а также свойств, указанных во введении, необходимы ограничения на коэффициенты [5]

$$\alpha_i > 0, \quad \beta_i < 0, \quad \gamma_i > 0, \quad \delta_i \geqslant 0, \quad \beta_i^2 \leqslant 3\alpha_i\gamma_i, \quad i \in N. \tag{4}$$

Условия (4) гарантируют вогнутость функции C_i на участке $\big[0, -\frac{\beta_i}{3\alpha_i}\big]$ и выпуклость — на $\big[-\frac{\beta_i}{3\alpha_i}, +\infty\big)$.

Таким образом, с учётом (1)–(3) имеем систему из n задач

$$F_i(x) = \Big(d - a\sum_{j\in N} x_j\Big)x_i - \alpha_i x_i^3 - \beta_i x_i^2 - \gamma_i x_i \to \max_{x_i\in X^i}, \quad i \in N. \tag{5}$$

Необходимое условие оптимальности для (5) представляет собой систему из n вариационных неравенств

$$\frac{\partial F_i(x)}{\partial x_i}(y_i - x_i) \leqslant 0, \quad y_i \in X^i,\ i \in N,\ x \in X,$$

которая сложна для решения. Поэтому предлагаем воспользоваться замечательным свойством, которым обладает рассматриваемая модель. Отметим, что (5) может быть представлена как бескоалиционная игра в нормальной форме [6], в связи с этим систему задач (5) будем также называть *игрой*.

Определение [21]. Игра (5) называется *потенциальной*, если существует функция $P\colon X \to \mathbb{R}$ такая, что

$$F_i(\overline{x}_i, x_{-i}) - F_i(x_i, x_{-i}) = P(\overline{x}_i, x_{-i}) - P(x_i, x_{-i})$$

для любых $x_i, \overline{x}_i \in X^i$, $x_{-i} \in \prod\limits_{j\neq i} X^j$ и $i \in N$. Функция P, если она существует, называется *потенциалом* (или *потенциальной*).

В [28] показано, что модель Курно потенциальна в том и только том случае, когда функция спроса в ней линейна, а значит, игра (5) потенциальна, и потенциальная функция восстанавливается по формуле [8, 21]

$$P(x) = \int\limits_0^1 \sum_{i\in N} \frac{\partial F_i(tx)}{\partial x_i} x_i\, dt$$

следующим образом:

$$\begin{aligned} P(x) &= \int\limits_0^1 \left(\frac{\partial F_1(tx)}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial F_2(tx)}{\partial x_2}x_2 + \dots + \frac{\partial F_n(tx)}{\partial x_n}x_n\right)dt \\ &= \int\limits_0^1 \sum_{i\in N}\Big(-3\alpha_i t^2 x_i^2 - 2(a+\beta_i)tx_i + d - \gamma_i - at\sum_{\substack{j\in N,\\ j\neq i}} x_j\Big)x_i\, dt \end{aligned}$$

$$= \left[\sum_{i \in N} \left(-\alpha_i x_i^3 t^3 - (a+\beta_i) x_i^2 t^2 - \frac{a}{2} t^2 x_i \sum_{\substack{j \in N, \\ j \neq i}} x_j + (d - \gamma_i) x_i t \right) \right] \Bigg|_0^1$$

$$= \sum_{i \in N} \left[-\alpha_i x_i^3 - (a+\beta_i) x_i^2 + \left(d - \gamma_i - \frac{a}{2} \sum_{\substack{j \in N, \\ j \neq i}} x_j \right) x_i \right]. \quad (6)$$

Тогда в силу потенциальности (5) эквивалентна (в смысле совпадения множеств равновесных точек) игре

$$P(x_i, x_{-i}) \to \max_{x_i}, \quad x_i \in X^i, \ i \in N. \quad (7)$$

Если некоторая точка x^* является равновесной (по Нэшу) в (7), т. е.

$$P(x_i^*, x_{-i}^*) \geqslant P(x_i, x_{-i}^*), \quad x_i \in X^i, \ i \in N, \quad (8)$$

то нетрудно заметить, что x^* — стационарная точка функции P [9]. Иными словами, равновесия следует искать среди стационарных точек потенциальной функции. Чтобы проверить, является ли найденная стационарная точка равновесием, достаточно решить n задач глобальной максимизации функции одной переменной в соответствии с (8).

Из (8) следует, что глобальный максимум P гарантированно является равновесием, а точки минимума не могут являться равновесными. Поэтому задачу поиска стационарных точек запишем в виде задачи максимизации (используя (6)):

$$P(x) = \sum_{i \in N} \left[-\alpha_i x_i^3 - (a+\beta_i) x_i^2 + \left(d - \gamma_i - \frac{a}{2} \sum_{\substack{j \in N, \\ j \neq i}} x_j \right) x_i \right] \to \max_{x \in X}. \quad (9)$$

В силу развитости теории методов оптимизации задачу (9) решать легче, чем исходную. Функция P является полиномом третьей степени от n неизвестных, а множество X замкнуто и выпукло.

Если $\widehat{x}_i \neq +\infty$ для всех $i \in N$, то существование глобального максимума P на множестве X обеспечивает теорема Вейерштрасса. Если $\widehat{x}_i = +\infty$ для некоторых $i \in N$, то в силу того, что $\alpha_i > 0$ для всех $i \in N$, функция P убывает вдоль любого направления, состоящего из неотрицательных компонент, при длине шага, большей некоторого значения. Значит, глобальный максимум будет достигаться по крайней мере на границе X. Из данных рассуждений следует, что в (5) всегда существует равновесная точка.

Утверждение. *n-Мерный полином третьей степени имеет не более одной точки локального максимума и не более одной точки локального минимума.*

Доказательство. Пусть $G\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — полином третьей степени от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Предположим, что он имеет две точки максимума $\overline{x}'$ и $\overline{x}''$. Нетрудно убедиться, что функция $g(\lambda) = G\left(\overline{x}' + \lambda(\overline{x}'' - \overline{x}')\right)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, также является полиномом третьей степени.

Так как $\overline{x}'$ и $\overline{x}''$ — точки максимума G, то $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$ — точки максимума g, являющиеся также стационарными (в силу гладкости g). Отметим, что полином не может иметь нестрогие точки максимума в силу того, что число корней его производной (также полинома) ограничено старшей степенью. Следовательно, $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$ являются строгими максимумами g. Известно, что между двумя строгими максимумами непрерывной функции одной переменной найдётся минимум. Тогда существует точка $\lambda = \overline{\lambda} \in (0, 1)$, доставляющая g минимум и являющаяся в силу гладкости g стационарной точкой. Таким образом, получили, что g имеет три стационарные точки. С другой стороны, производная g' представляет собой квадратичную функцию одной переменной, значит, g имеет не более двух стационарных точек; противоречие. Относительно минимумов доказательство аналогичное. Утверждение доказано.

Из утверждения следует, что функция P имеет не более одной точки максимума внутри X. При этом на границе X также могут существовать точки максимума, что может привести к неединственности равновесия.

2. Методы

Поскольку задача (9) не поддаётся аналитическому решению, целью нашей работы, как упоминалось, является поиск и адаптация эффективных численных методов оптимизации. Мы предлагаем использовать методы, основанные на DC-разложении[1)] и построении вогнутых опорных функций-минорант. Их суть заключается в том, что последующее приближение выбирается как точка максимума опорной вогнутой функции. Так как задача многоэкстремальная (следовательно, может иметь более одной стационарной точки), а указанные методы осуществляют локальный поиск, предлагается их использование в сочетании с мультистартом, что также позволит находить несколько различных точек равновесия в модели. Напомним, что не все стационарные точки являются равновесиями, и потому подлежат соответствующей проверке.

[1)] DC — (от англ.) «difference of two convex functions». DC-разложение означает представление функции в виде разности двух выпуклых функций.

2.1. DC-разложение и DCA. В качестве первого метода будем использовать DC-алгоритм (DCA) [23], который считается одним из самых эффективных методов локального поиска. Для работы метода требуется осуществить DC-разложение функции P, т. е. представить P как сумму выпуклой и вогнутой функций φ и ψ соответственно.

Перепишем P следующим образом:

$$P(x) = \sum_{i\in N}\Big(-\beta_i - \frac{a}{2}\Big)x_i^2 + \sum_{i\in N}\big(-\alpha_i x_i^3 + (d-\gamma_i)x_i\big) - \frac{a}{2}x^T(A-I)x,$$

где A — матрица размера $n \times n$ вида

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 1 \\ & & \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot & & \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \end{pmatrix},$$

I — единичная матрица размера $n \times n$. Нетрудно убедиться, что $A - I$ неотрицательно определена. Действительно, для всех $x \in \mathbb{R}^n$ выполнено

$$x^T(A-I)x = \Big(\sum_{i\in N} x_i\Big)^2 \geqslant 0.$$

В таком случае P можно представить как сумму выпуклой функции φ и вогнутой функции ψ вида

$$\varphi(x) = \sum_{i\in U}\Big(-\beta_i - \frac{a}{2}\Big)x_i^2,$$

$$\psi(x) = \sum_{i\in V}\Big(-\beta_i - \frac{a}{2}\Big)x_i^2 + \sum_{i\in N}\big(-\alpha_i x_i^3 + (d-\gamma_i)x_i\big) - \frac{a}{2}x^T(A-I)x,$$

$$U = \Big\{i \in N \mid \beta_i + \frac{a}{2} < 0\Big\}, \quad V = N\backslash U.$$

Напомним, что DCA в качестве опорной миноранты использует сумму вогнутой и линеаризованной в точке текущего приближения выпуклой составляющих максимизируемой функции. Обозначим через k номер итерации, x^k — текущее приближение. Итерационный процесс, генерируемый DCA, запишется следующим образом:

$$x^{k+1} = \arg\max_x\{m_P(x, x^k)\}, \quad x \in X, \tag{10}$$

$$m_P(x, x^k) = \varphi(x^k) + \nabla\varphi(x^k)^T(x - x^k) + \psi(x), \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{11}$$

Сходимость алгоритма (10), (11) к стационарным точкам задачи (9) следует из результатов в [23].

2.2. DCA с линейным поиском. Добавим в итерационный процесс (10), (11) процедуру линейного поиска вдоль направления

$$h^k = \overline{x}^{k+1} - x^k, \tag{12}$$

где $\overline{x}^{k+1}$ — решение задачи максимизации функции $m_P(x, x^k)$, которое в (10) обозначено через x^{k+1}. Поскольку P — полином третьей степени, можем без труда аналитически отыскивать глобальный максимум P вдоль h^k на отрезке максимальной длины, содержащемся в X.

На каждой итерации нам потребуются максимальная и минимальная длины шага $\widehat{t}_k$ и $\check{t}_k$ соответственно, не выводящие за пределы допустимого множества X вдоль прямой, содержащей направление h^k, т. е.

$$x(t) \in X, \quad t \in [\widehat{t}_k, \check{t}_k], \quad x(t) \notin X, \quad t \notin [\widehat{t}_k, \check{t}_k], \quad x(t) = x^k + th^k.$$

Вычисляются они по формулам $\widehat{t}_k = \min\limits_{i \in S} \widehat{t}_{k_i}$, $\check{t}_k = \max\limits_{i \in S} \check{t}_{k_i}$, $S = \{i \in N \mid h_i^k \neq 0\}$, и для всех $i \in S$

$$\widehat{t}_{k_i} = \begin{cases} \dfrac{\widehat{x}_i - x_i^k}{h_i^k} & \text{при } h_i^k > 0, \\ \dfrac{\check{x}_i - x_i^k}{h_i^k} & \text{при } h_i^k < 0, \end{cases} \qquad \check{t}_{k_i} = \begin{cases} \dfrac{\check{x}_i - x_i^k}{h_i^k} & \text{при } h_i^k > 0, \\ \dfrac{\widehat{x}_i - x_i^k}{h_i^k} & \text{при } h_i^k < 0. \end{cases}$$

За длину шага t_k на k-й итерации будем брать глобальный максимум функции $g_k(t) = P(x^k + th^k)$ на отрезке $[\check{t}_k, \widehat{t}_k]$, т. е. $t_k = \arg\max g_k(t)$, $\check{t}_k \leqslant t \leqslant \widehat{t}_k$. Решить данную задачу можно следующим образом. Функция g_k представляет собой полином третьей степени от одной неизвестной:

$$g_k(t) = p_{k_3} t^3 + p_{k_2} t^2 + p_{k_1} t,$$

где

$$p_{k_3} = \sum_{i \in N} \big(-\alpha_i \big(h_i^k\big)^3\big),$$

$$p_{k_2} = \sum_{i \in N} \big(-3\alpha_i x_i^k \big(h_i^k\big)^2 - (a + \beta_i)\big(h_i^k\big)^2\big) - \frac{a}{2} \sum_{\substack{i,j \in N, \\ i \neq j}} h_i^k h_j^k,$$

$$p_{k_1} = \sum_{i \in N} \big(-3\alpha_i \big(x_i^k\big)^2 h_i^k - 2(a + \beta_i) x_i^k h_i^k + (d - \gamma_i) h_i^k\big) - a \sum_{\substack{i,j \in N, \\ i \neq j}} x_i^k h_j^k.$$

Имеем $g_k'(t) = 3p_{k_3}t^2 + 2p_{k_2}t + p_{k_1}$. Если $4p_{k_2}^2 - 12p_{k_3}p_{k_1} \leqslant 0$ (это значит, что $g_k(t)$ монотонна), то

$$t_k = \arg\min\{g_k(\check{t}_k), g_k(\widehat{t}_k)\}, \tag{13}$$

в противном случае вычисляем $t^*_{k_{1,2}} = \frac{-p_{k_2} \pm \sqrt{p_{k_2}^2 - 3p_{k_3}p_{k_1}}}{3p_{k_3}}$, тогда

$$t_k = \arg\min\{g_k(\check{t}_k), g_k(\widehat{t}_k), \Phi_k\},$$

где $\Phi_k = \{g(t^*_{k_i}) \mid t^*_{k_i} \in [\check{t}_k, \widehat{t}_k],\ i = 1, 2\}$. Если Φ_k пусто, то t_k вычисляется по формуле (13).

За следующее приближение будем принимать $x^{k+1} = x^k + t_k h^k$, где h^k определено в (12). Таким образом, каждое следующее приближение удовлетворяет соотношению

$$P(x^{k+1}) \geqslant P(\overline{x}^{k+1}), \quad k = 0, 1, \ldots,$$

т. е. доставляет значение функции P не меньшее, чем точка максимума опорной функции.

2.3. Метод опорных функций. Задачу (9) можно решать методом вогнутых опорных функций [13], который не основан на DC-разложении.

Рассмотрим полиномы третьей степени, входящие в состав P:

$$\rho_i(x_i) = -\alpha_i x_i^3 - \beta_i x_i^2, \quad i \in N.$$

Вторая производная имеет вид $\rho_i''(x_i) = -6\alpha_i x_i - 2\beta_i$ и обращается в нуль в точке $\widetilde{x}_i = -\frac{\beta_i}{3\alpha_i}$, причём $\rho_i''(x_i) \geqslant 0,\ x_i \leqslant \widetilde{x}_i$, и $\rho_i''(x_i) \leqslant 0,\ x_i \geqslant \widetilde{x}_i$.

Так как функция ρ_i вогнута при $x_i \geqslant \widetilde{x}_i$, для всех точек $x_i^k \geqslant \widetilde{x}_i$ построим опорную вогнутую функцию m_{ρ_i} для ρ_i следующим образом: сделаем её на этом интервале совпадающей с ρ_i, а для $x_i \leqslant \widetilde{x}_i$ доопределим её касательной $l_i(x_i)$, проведённой к ρ_i в точке $\widetilde{x}_i$:

$$l_i(x_i) = \frac{\beta_i^3}{27\alpha_i^2} + \frac{\beta_i^2}{3\alpha_i} x_i.$$

Если $x_i^k < \widetilde{x}_i$, то в силу выпуклости ρ_i на этом участке опорную функцию в x_i^k будем строить путём линеаризации выпуклой составляющей $-\beta_i x_i^2$. Таким образом, для любых $x^k \in X$ получим всюду дифференцируемую по x опорную функцию

$$m_{\rho_i}(x_i, x_i^k) = \begin{cases} \rho_i(x_i), & x_i \geqslant \widetilde{x}_i, \\ l_i(x_i), & x_i < \widetilde{x}_i, \end{cases} \quad x_i^k \geqslant \widetilde{x}_i,$$

$$m_{\rho_i}\big(x_i, x_i^k\big) = -\alpha_i x_i^3 - \beta_i x_i^k\big(x_i^k + 2\big(x_i - x_i^k\big)\big), \quad x_i^k < \widetilde{x}_i.$$

Тогда имеем итерационный процесс вида

$$x^{k+1} = \arg\max_x \{\widetilde{m}_P(x, x^k)\}, \quad x \in X,\ k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{14}$$

$$\widetilde{m}_P(x, x^k) = \sum_{i \in N} \big((d - \gamma_i)x_i + m_{\rho_i}\big(x_i, x_i^k\big)\big) - \frac{a}{2} x^T A x. \tag{15}$$

В силу построения функция $\widetilde{m}_P(x, x^k)$ вогнута при всех $x, x^k \in X$.

Сходимость метода вогнутых опорных функций к стационарным точкам (9) обоснована в [13].

К схеме (14), (15) можно аналогично тому, как это делалось выше, добавить процедуру линейного поиска. Именно такой вариант метода опорных функций будет использоваться при численном сравнении.

3. Численное сравнение методов

В сравнении участвовали следующие методы: DCA, DCA с линейным поиском и метод опорных функций с линейным поиском, обозначенные соответственно через DCA, DCA-ls, SF-ls.

Для сравнения методов использовались случайно сгенерированные задачи, по 30 задач в рамках каждой выбранной для тестирования размерности. Мультистарт производился из $n+2$ начальных точек: из середины каждой нулевой границы допустимого множества X, из центра X, а также из угловой точки X с максимальными выпусками участников:

$$x^0_{(i)} = \left(\frac{\check{x}_1 + \widehat{x}_1}{2}, \ldots, \frac{\check{x}_{i-1} + \widehat{x}_{i-1}}{2}, 0, \frac{\check{x}_{i+1} + \widehat{x}_{i+1}}{2}, \ldots, \frac{\check{x}_n + \widehat{x}_n}{2}\right), \quad i \in N,$$

$$x^0_{(n+1)} = \left(\frac{\check{x}_1 + \widehat{x}_1}{2}, \ldots, \frac{\check{x}_n + \widehat{x}_n}{2}\right),$$

$$x^0_{(n+2)} = (\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \ldots, \widehat{x}_n).$$

Такой выбор начальных точек обусловлен тем, что внутри X может существовать не более одной точки максимума, и, как показали предварительные расчёты, равновесия зачастую попадают на нулевые границы X.

Вычисления производились в системе GAMS на компьютере конфигурации Intel Core 2 Duo E4400 2 GHz, 3.2 Gb RAM. Вспомогательные задачи выпуклой оптимизации (см. (10) и (14)) решались встроенным в GAMS пакетом CONOPT. В качестве критерия останова использовалось стандартное необходимое условие оптимальности

$$\|\pi_X(x^k + \nabla P(x^k)) - x^k\| < \theta,$$

где $\|\cdot\|$ — оператор нормы, $\pi_X(\cdot)$ — оператор проектирования на множество X, θ — малое положительное число. Средние результаты вычислений каждого метода, сгруппированные в зависимости от размерности задач, представлены в табл. 1. Здесь i — среднее количество итераций и t — среднее время счёта в секундах, затрачиваемое на нахождение стационарной точки. Столбец «%» отражает процент запусков, в которых метод сошёлся к точке равновесия Нэша, столбец «E» — максимальное количество точек равновесия, найденных для одной задачи конкретной размерности.

Т а б л и ц а 1

Результаты численного сравнения методов

n	Метод	i	t	%	E
2	DCA	22	2,93	83	2
	DCA-ls	3	0,37	89	2
	SF-ls	2	0,19	85	2
5	DCA	40	4,93	69	3
	DCA-ls	10	1,23	76	3
	SF-ls	3	0,33	75	3
10	DCA	45	5,59	63	4
	DCA-ls	17	2,04	70	4
	SF-ls	4	0,42	76	3
20	DCA	62	7,50	49	5
	DCA-ls	26	3,19	59	5
	SF-ls	5	0,56	64	5
30	DCA	53	6,57	44	4
	DCA-ls	25	3,13	47	4
	SF-ls	6	0,69	63	7
50	DCA	75	10,55	10	5
	DCA-ls	35	4,97	10	5
	SF-ls	7	0,96	36	12

Целью вычислительного эксперимента являлось выявление наиболее эффективного метода нахождения стационарной точки потенциала на практике. Как можно видеть, производительность методов увеличивается в порядке их перечисления в табл. 1. При этом добавление линейного поиска даёт ощутимое увеличение в скорости нахождения стационарной точки. Наилучшие результаты для каждой из рассмотренных размерностей демонстрирует метод опорных функций с линейным поиском. Это может быть объяснено тем, что DCA в рассматриваемой в данной статье постановке не использует в полной мере структуру целевой функции, в отличие от метода опорных функций. Отметим также, что с увеличением размерности модели увеличивается количество возможных точек равновесия, что подтверждается результатами расчётов. При этом увеличивается частота попадания методов в неравновесные стационарные точки потенциальной функции.

В заключение стоит сказать, что важным достоинством предлагаемой методики является возможность с помощью неё находить в модели несколько точек равновесия Нэша за небольшое время. Например, как видно из табл. 1, для случая 50 участников метод опорных функций с линейным поиском отыскал 12 различных равновесий (в одной задаче) при средней длительности одного запуска, равной 1 с.

Автор благодарит рецензентов за ценные советы и замечания, которые помогли улучшить статью.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бредихин С. В., Тиунова Е. М., Хуторецкий А. Б.** Ценовое согласование спроса и предложения при распределении мощности многопроцессорной системы // Сиб. журн. индустр. математики. — 2007. – Т. 10, № 3. — С. 20–28.
2. **Бусыгин В. П., Желободько Е. В., Коковин С. Г., Цыплаков А. А.** Микроэкономический анализ несовершенных рынков. — Новосибирск: НГУ, 1999. — 133 с.
3. **Гальперин В. М., Игнатьев С. М., Моргунов В. И.** Микроэкономика. В 2-х т. / Общая редакция В. М. Гальперина. — СПб.: Экономическая школа, 1994. — Т. 1. — 349 с.
4. **Горелов М. А., Кононенко А. Ф.** Игры с запрещёнными ситуациями. Модели с жёсткими ограничениями // Автоматика и телемеханика. — 2010. — № 1. — С. 118–129.
5. **Минарченко И. М.** О потенциальных и непотенциальных задачах поиска равновесия в модели Курно // Тр. XV Байкальской междунар. школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения». Т. 6. Мат. экономика. — Иркутск: РИО ИДСТУ СО РАН, 2011. — С. 197–202.
6. **Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Семина Е. А.** Теория игр. — М.: Высш. школа, 1998. — 304 с.
7. **Подковальников С. В., Хамисов О. В.** Несовершенные электроэнергетические рынки: моделирование и исследование развития генерирующих мощностей // Изв. АН. Энергетика. — 2011. — № 2. — С. 57–76.
8. **Попов Л. Д.** Введение в теорию, методы и экономические приложения задач о дополнительности. — Екатеринбург: Изд-во УрГУ, 2001. — 124 с.
9. **Сухарев А. Г., Тимохов А. В., Федоров В. В.** Курс методов оптимизации. — 2-е изд. — М.: Физматлит, 2005. — 368 с.
10. **Тарасевич Л. С., Гребенников П. И., Леусский А. И.** Микроэкономика. — М.: Юрайт-Издат, 2006. — 374 с.
11. **Токарев В. В.** Гарантированные результаты в играх с запрещёнными ситуациями // Автоматика и телемеханика. — 2009. — № 6. — С. 123–140.
12. **Токарев В. В.** Особенности равновесий в играх с запрещёнными ситуациями // Автоматика и телемеханика. — 2009. — № 7. — С. 127–138.
13. **Хамисов О. В.** Невыпуклая оптимизация с нелинейными опорными функциями // Тр. ИММ УрО РАН. — 2013. — Т. 19, № 2. — С. 295–306.

14. **Badri A., Rashidinejad M.** Security constrained optimal bidding strategy of GenCos in day ahead oligopolistic power markets: a Cournot-based model // Electr. Eng. — 2013. — Vol. 95. — P. 63–72.
15. **Bagwell K., Staiger R. W.** The economics of trade agreements in the linear Cournot delocation model // J. Int. Econ. — 2012. — Vol. 88. — P. 32–46.
16. **Bischi G.-I., Chiarella C., Kopel M., Szidarovszky F.** Nonlinear oligopolies. — Berlin: Springer-Verl., 2010. — 334 p.
17. **Botterud A., Ilic M. D., Wangensteen I.** Optimal investments in power generation under centralized and decentralized decision making // IEEE Trans. Power Syst. — 2005. — Vol. 20, N 1. — P. 254–263.
18. **Chen H., Wong K. P., Nguyen D. H. M., Chung C. Y.** Analyzing oligopolistic electricity market using coevolutionary computation // IEEE Trans. Power Syst. — 2006. — Vol. 21, N 1. — P. 143–152.
19. **Ewerhart C.** Cournot games with biconcave demand // Games Econ. Behav. — 2014. — Vol. 85. — P. 37–47.
20. **Metzler C.** Nash–Cournot equilibria in power markets on a linearized DC network with arbitrage: formulations and properties // Networks Spatial Econ. — 2003. — Vol. 3, N 2. — P. 123–150.
21. **Monderer D., Shapley L. S.** Potential games // Games Econ. Behav. — 1996. — N 14. — p. 124–143.
22. **Peters H.** Game theory: A multi-leveled approach. — Berlin: Springer-Verl., 2008. — 366 p.
23. **Pham D. T., Le T. H. A.** Convex analysis approach to D.C. programming: theory, algorithms and applications // Acta Math. Vietnam. — 1997. — N 22. — P. 289–355.
24. **Puu T.** Oligopoly: old ends — new means. — Berlin: Springer-Verl., 2011. — 172 p.
25. **Ryan J. K., Daewon S., Xuying Z.** Coordinating a supply chain with a manufacturer-owned online channel: a dual channel model under price competition // IEEE Trans. Eng. Manage. — 2013. — Vol. 60, N 2. — P. 247–259.
26. **Ryan S. M., Downward A., Philpott A. B., Zakeri G.** Welfare effects of expansions in equilibrium models of an electricity market with fuel network // IEEE Trans. Power Syst. — 2010. — Vol. 25, N 3. — P. 1337–1349.
27. **Shan Jin, Botterud A., Ryan S. M.** Impact of demand response on thermal generation investment with high wind penetration // IEEE Trans. Smart Grid. — 2013. — Vol. 4, N 4. — P. 2374–2383.
28. **Slade M. E.** What does an oligopoly maximize? // J. Industr. Econ. — 1994. — Vol. 42, N 1. — P. 45–61.
29. **Vallee T., Yildizoglu M.** Can they beat the Cournot equilibrium learning with memory and convergence to equilibria in a Cournot oligopoly? // Comput. Econ. — 2013. — Vol. 41. — P. 493-516.

30. **Wang R., Li Y., Zhang S.** Analysis of Nash–Cournot equilibrium for electricity markets considering option contracts // J. Shanghai Univ. — 2008. — Vol. 12, N 6. — P. 542–547.

Минарченко Илья Михайлович,
e-mail: sla669@gmail.com

Статья поступила
1 сентября 2013 г.

Переработанный вариант —
29 апреля 2014 г.