ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Сентябрь—октябрь 2014. Том 21, № 5. С. 3–16

УДК 519.174

3-РЕГУЛЯРНЫЕ ПОДГРАФЫ И $(3,1)$-РАСКРАСКИ 4-РЕГУЛЯРНЫХ ПСЕВДОГРАФОВ *)

А. Ю. Бернштейн

Аннотация. Пусть G — 4-регулярный псевдограф. Назовём $(3,1)$-*раскраской* графа G раскраску его рёбер в несколько цветов такую, что в каждой вершине сходятся три ребра одного цвета и одно — другого. Свойства $(3,1)$-раскрасок тесно связаны с наличием в графе 3-регулярных подграфов. В работе доказывается, что любой связный 4-регулярный псевдограф, содержащий 3-регулярный подграф, обладает $(3,1)$-раскраской. Кроме того, любой 4-регулярный псевдограф без кратных рёбер (но, возможно, с петлями) обладает $(3,1)$-раскраской, что служит косвенным подтверждением предположения (недоказанного), что любой такой граф содержит 3-регулярный подграф. В работе также проводится анализ вопроса о том, какое наименьшее количество цветов необходимо для $(3,1)$-раскраски данного 4-регулярного графа. В заключение доказывается, что наличие $(3,1)$-раскраски, удовлетворяющей дополнительным требованиям (упорядоченной $(3,1)$-раскраски), равносильно наличию 3-регулярного подграфа.

Ключевые слова: 4-регулярный граф, рёберная раскраска.

Введение

Практически всюду в статье, если только специально не оговорено противное, будем рассматривать псевдографы, т. е. графы, которые могут содержать кратные рёбра и петли, поэтому там, где из контекста понятно, о чём идёт речь, будем называть их просто «графами».

Вопросы о том, при каких условиях данный граф обязан содержать подграф с предписанными степенями вершин, активно изучались многими исследователями (см., например, [4, 8, 11–15, 19, 20]). Одним из хорошо известных вопросов такого рода является следующий. Пусть G — 4-регулярный псевдограф (т. е. степени всех его вершин равны 4). При каких условиях можно гарантировать, что G содержит 3-регулярный

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 13–01–00645).

подграф? Легко видеть, что не всякий 4-регулярный псевдограф содержит 3-регулярный подграф (примером может служить граф на трёх вершинах, каждые две из которых соединены парой параллельных рёбер). Однако, как показал В. А. Ташкинов в [3], подтвердив таким образом гипотезу Бержа, любой простой 4-регулярный граф содержит 3-регулярный подграф (на самом деле, в [3] доказывается более сильный результат: любой псевдограф без петель, содержащий не более двух пар параллельных рёбер, а также любой псевдограф, содержащий одну петлю и не более одной пары параллельных рёбер, содержит 3-регулярный подграф). Этому результату предшествовала работа [10], в которой доказывается ослабленный вариант теоремы Ташкинова (для простых графов с циклической рёберной связностью $\lambda^c \geqslant 10$).

Для 4-регулярных псевдографов, содержащих кратные рёбра и петли, ситуация остаётся достаточно неясной. Полное описание класса 4-регулярных псевдографов, не содержащих 3-регулярных подграфов, неизвестно. В частности, открытым остаётся вопрос о том, любой ли 4-регулярный граф без кратных рёбер (но с петлями) должен содержать 3-регулярный подграф. Различные достаточные условия, при которых 4-регулярный граф содержит 3-регулярный подграф, приведены в [16, 17].

Важную роль в изучении 3-регулярных подграфов 4-регулярных псевдографов сыграли результаты, полученные в [5, 6]. Алгебраическими методами (с помощью теорем Шевалле — Варнинга [2] и Олсона [18]) доказан ряд результатов, касающихся регулярных подграфов регулярных псевдографов, в частности, знаменитая теорема о том, что всякий «4-регулярный граф плюс ребро» содержит 3-регулярный подграф. (Заметим, что этот же результат можно получить, применяя другой алгебраический инструмент — комбинаторную теорему о нулях [7]).

В данной работе рассмотрим класс раскрасок рёбер 4-регулярных псевдографов, свойства которых, как мы увидим, тесно связаны с наличием в графе 3-регулярных подграфов.

Определение 1. Пусть G — 4-регулярный псевдограф. $(3,1)$-*Раскраской* графа G будем называть раскраску его рёбер в несколько цветов такую, что в каждой вершине сходятся три ребра одного цвета и одно — другого (петли учитываются дважды).

Очевидно, что не любой граф обладает $(3,1)$-раскраской (примером служит всё тот же «удвоенный треугольник»). При этом определение $(3,1)$-раскраски ничего не говорит о количестве цветов, которые должны для неё использоваться. Первый наш результат описывает графы, для $(3,1)$-раскраски которых достаточно двух цветов.

Теорема 1. *Связный 4-регулярный псевдограф G обладает $(3,1)$-раскраской в два цвета, если и только если число его вершин чётно.*

Следующая теорема устанавливает связь между классами графов, обладающих $(3,1)$-раскраской, и графов, содержащих 3-регулярный подграф.

Теорема 2. *Если связный 4-регулярный псевдограф G содержит 3-регулярный подграф, то он обладает $(3,1)$-раскраской.*

Замечание. При этом существует 4-регулярный псевдограф G, который допускает $(3,1)$-раскраску, но не содержит 3-регулярного подграфа (рис. 1).

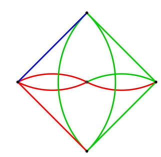

Рис. 1

Итак, класс графов без $(3,1)$-раскраски содержится, притом строго, в классе графов без 3-регулярной части. В частности, любой простой 4-регулярный граф допускает $(3,1)$-раскраску. Что можно сказать о графах без кратных рёбер, но с петлями (для которых вопрос о наличии 3-регулярных подграфов пока не решён)? Оказывается, что все они также обладают $(3,1)$-раскраской.

Теорема 3. *Любой 4-регулярный псевдограф без кратных рёбер* (*но, возможно, с петлями*) *допускает* $(3,1)$-*раскраску.*

Теоремы 2 и 3 косвенным образом свидетельствуют в пользу предположения о том, что всякий 4-регулярный псевдограф без кратных рёбер содержит 3-регулярный подграф.

Какое наименьшее количество цветов нужно задействовать, чтобы раскрасить данный 4-регулярный граф? Следующая теорема показывает, что, как ни странно, если граф допускает хотя бы какую-нибудь $(3,1)$-раскраску, то он допускает и раскраску не более чем в три цвета (что вместе с теоремой 1 полностью решает проблему о наименьшем необходимом количестве цветов для $(3,1)$-раскраски).

Теорема 4. *Если 4-регулярный псевдограф G обладает $(3,1)$-раскраской, то он обладает также и $(3,1)$-раскраской не более чем в три цвета.*

Доказательства теорем 1–4 приведены в разд. 1.

Видим, что класс графов, обладающих $(3,1)$-раскраской, шире класса графов, имеющих 3-регулярные подграфы. Можно ли как-нибудь усилить требования, накладываемые на раскраску, чтобы сделать эти классы совпадающими?

Определение 2. Назовём *упорядоченной* $(3,1)$*-раскраской* 4-регулярного псевдографа G раскраску его рёбер в цвета $\{1, 2, \ldots, k\}$ (где k — некоторое натуральное число) такую, что в каждой вершине сходятся три ребра одного цвета и одно — другого, причём с бо́льшим номером.

Очевидно, что любой граф, обладающий упорядоченной $(3,1)$-раскраской, содержит 3-регулярный подграф (образованный множеством рёбер, окрашенных в цвет 1). Оказывается, верно и обратное.

Теорема 5. *Связный 4-регулярный псевдограф G обладает упорядоченной $(3,1)$-раскраской, если и только если он содержит 3-регулярный подграф.*

Доказательство теоремы 5 приведено в разд. 2.

1. Существование $(3,1)$-раскрасок

В этом разделе приведём доказательства теорем 1–4. Общая идея, играющая в них ключевую роль, состоит в том (очевидном) наблюдении, что если $E' \subseteq E$ — множество рёбер одного из цветов в $(3,1)$-раскраске графа G, то степени всех вершин подграфа, индуцированного этим множеством, нечётны. Этот факт позволит нам для поиска $(3,1)$-раскрасок использовать системы линейных уравнений над $\mathbb{Z}_2$.

1.1. $(3,1)$**-Раскраска в два цвета.** Докажем теорему 1, продемонстрировав на этом несложном примере общую технику, которая будет использоваться в дальнейшем.

Доказательство теоремы 1. Пусть $G(V, E)$ — связный 4-регулярный псевдограф, $|V| = n$. Если $E' \subseteq E$ — множество рёбер одного из цветов в $(3,1)$-раскраске графа G в два цвета, то степени всех вершин графа $G'(V, E')$ нечётны, а значит, n чётно.

Пусть теперь n чётно. Нужно доказать, что G обладает $(3,1)$-раскраской в два цвета. Очевидно, что это условие равносильно тому, что G содержит остовный подграф $G'(V, E')$, степени всех вершин которого нечётны (*нечётный фактор*). Естественным образом отождествим множество $E' \subseteq E$ с вектором $x \in \mathbb{Z}_2^E$ (полагая $x_e = 1$, если и только если $e \in E'$). Для вершины $u \in V$, инцидентной рёбрам e_1, e_2, e_3, e_4 (если в вершине u находится петля, то какие-то два из этих рёбер совпадают), положим $f_u = x_{e_1} \oplus x_{e_2} \oplus x_{e_3} \oplus x_{e_4}$ (здесь и далее символом $\oplus$ обозначается сложение в поле $\mathbb{Z}_2$). Тогда условие нечётности степеней графа $G'(V, E')$ превращается в систему $\mathcal{F}$ линейных уравнений над $\mathbb{Z}_2$, состоящую из уравнений $f_u = 1$ для всех $u \in V$. Таким образом, задача свелась к доказательству разрешимости системы $\mathcal{F}$.

Предположим, что система $\mathcal{F}$ неразрешима. Тогда некая линейная комбинация левых частей её уравнений равна нулю, в то время как соответствующая комбинация правых частей отлична от нуля. Поскольку речь идёт о линейных комбинациях над $\mathbb{Z}_2$, это означает, что существует непустое множество вершин $U \subseteq V$ такое, что $\bigoplus\limits_{u\in U} f_u = 0$, но $\bigoplus\limits_{u\in U} 1 = 1$. Второе условие равносильно тому, что U содержит нечётное число вершин. При этом из первого условия следует, что если $vw \in E$, то v и w принадлежат или не принадлежат множеству U одновременно. В самом деле, из всех левых частей переменная x_{vw} встречается только в f_v и f_w, поэтому они должны или одновременно участвовать, или одновременно не участвовать в сумме $\bigoplus\limits_{u\in U} f_u$. В силу связности G, так как U непусто, получаем $U = V$. Но V содержит чётное число вершин; противоречие. Теорема 1 доказана.

Замечание. Приведённое выше рассуждение также показывает, что количество $(3,1)$-раскрасок 4-регулярного графа G с чётным числом n вершин в цвета $\{1,2\}$ равно 2^{n+1}.

1.2. Раскраска графа, содержащего 3-регулярный подграф. Докажем следующее усиление теоремы 2.

Теорема 6. *Любой связный 4-регулярный псевдограф G, содержащий 3-регулярный подграф H, допускает $(3,1)$-раскраску не более чем в три цвета, в которой множество рёбер одного из цветов совпадает с множеством рёбер графа H.*

Доказательство. Пусть $\widetilde{G}(V,\widetilde{E}) = G - E(H)$ — граф, полученный из G удалением всех рёбер, принадлежащих 3-регулярному подграфу H. Нужно раскрасить его рёбра в два цвета, т. е. выделить множество рёбер $E' \subseteq \widetilde{E}$ такое, что в любой вершине $u \in V \setminus V(H)$ сходится нечётное число рёбер из E' (при этом в каждой вершине из $V(H)$ автоматически будут сходиться три ребра того цвета, в который покрашены рёбра H, и одно — другого). Таким образом, как и в доказательстве теоремы 1, задача сводится к вопросу о разрешимости системы $\mathcal{F}$, состоящей из уравнений $f_u = 1$ для всех $u \in V \setminus V(H)$.

Неразрешимость системы $\mathcal{F}$ означала бы, что существует множество $U \subseteq V \setminus V(H)$ такое, что $|U|$ нечётно, но $\bigoplus\limits_{u\in U} f_u = 0$. Однако последнее равенство не может выполняться ни для какого непустого множества U. Действительно, если $v, w \in V \setminus V(H)$ и $vw \in E$, то v и w или одновременно попадают, или одновременно не попадают в множество U. Поэтому U вместе с любой вершиной содержит целиком всю компоненту связности

графа $\widetilde{G}$. Но граф G связен, а значит, каждая из компонент связности графа $\widetilde{G}$ содержит хотя бы одну вершину v, которая соединена ребром e с какой-то вершиной $w \in V(H)$. Поэтому если $v \in U$, то коэффициент при x_e в сумме $\bigoplus\limits_{u\in U} f_u$ равен 1; противоречие. Теорема 6 доказана.

1.3. Раскраска графа без кратных рёбер. В условиях теоремы 3 без ограничения общности можно считать, что граф G связен. Снова будем доказывать усиленное утверждение.

Теорема 7. *Любой связный* 4*-регулярный псевдограф* G *без кратных рёбер* (*но, возможно, с петлями*) *допускает* $(3, 1)$*-раскраску не более чем в три цвета, в которой множество рёбер одного из цветов содержит лишь одно ребро.*

Доказательство. Здесь нам потребуются несколько более тонкие рассуждения, чем в предыдущих случаях. Для начала докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть* $G(V, E)$ — *связный* 4*-регулярный псевдограф, и пусть две его вершины* $u, v \in V$ *соединены одинарным ребром* $e \in E$*, причём граф* $G - u - v$*, полученный из* G *удалением этих вершин, связен. Тогда* G *допускает* $(3, 1)$*-раскраску не более чем в три цвета, в которой множество рёбер одного из цветов равно* $\{e\}$.

Доказательство. Нужно раскрасить в два цвета рёбра из множества $E \setminus \{e\}$. Пусть $E' \subseteq E \setminus \{e\}$ — множество рёбер одного из цветов. Тогда, во-первых, в любой вершине $w \in V \setminus \{u, v\}$ сходится нечётное число рёбер из E', а во-вторых, все рёбра, инцидентные каждой из вершин u и v, должны быть окрашены одинаково. Чтобы выразить эти вторые условия в системе уравнений, каждому из рёбер, инцидентных вершине u, поставим в соответствие одну общую переменную x_u, а каждому из рёбер, инцидентных v, — переменную x_v. Задача, таким образом, сводится к вопросу о разрешимости системы уравнений $\mathcal{F}$, состоящей из уравнений вида $f_w = 1$ для всех $w \in V \setminus \{u, v\}$ (в которых вместо переменных для рёбер, инцидентных u и v, используются переменные x_u и x_v соответственно). Если эта система неразрешима, то существует множество $U \subseteq V \setminus \{u, v\}$, содержащее нечётное число элементов и такое, что $\bigoplus\limits_{w\in U} f_w = 0$. По тем же соображениям, что и в предыдущих доказательствах, в силу связности графа $G - u - v$ получаем $U = V \setminus \{u, v\}$. Тогда переменная x_u (так же, как и переменная x_v) в сумму $\bigoplus\limits_{w\in U} f_w$ входит с коэффициентом 1; противоречие. Лемма 1 доказана.

В силу леммы 1 осталось найти в G ребро $uv \in E$, при удалении обоих концов которого граф останется связен. Для этого потребуется понятие дерева поиска в глубину. Если u и v — две вершины корневого дерева T с корнем v_0, то говорим, что u — *потомок* v (или, что то же самое, v — *предок* u) в T, если v лежит на пути, соединяющем v_0 и u.

Определение 3. Корневое остовное дерево T в связном графе G называется *деревом поиска в глубину*, если из любых двух смежных вершин графа G одна из них является потомком другой в дереве T.

Утверждение 1 [1, предложение 1.5.5]. *Каждый связный граф содержит дерево поиска в глубину, причём в качестве корня можно взять произвольную вершину.*

Рассмотрим произвольное дерево поиска в глубину T в графе G с корнем v_0. Пусть u — наиболее удалённая от корня вершина в T, v — её отец. Докажем, что пара u, v удовлетворяет условиям леммы.

В самом деле, так как u наиболее удалена от корня, она является висячей вершиной в T так же, как и все остальные потомки вершины v. Пусть U — множество потомков вершины v, отличных от u. Тогда в графе $G - u - v$ все вершины из множества $V \setminus (U \cup \{u, v\})$ содержатся в одной компоненте связности (поскольку $T - u - v - U$ — дерево, содержащееся в $G - u - v$ и содержащее все эти вершины). Поэтому если граф $G - u - v$ несвязен, то существует вершина $w \in U$, которая не имеет соседей в множестве $V \setminus (U \cup \{u, v\})$, но T — дерево поиска в глубину, поэтому все соседи вершины w должны быть либо её потомками, либо предками в T. Потомков у неё нет, а все предки, кроме v, содержатся в множестве $V \setminus (U \cup \{u, v\})$. Значит, её соседями могут быть только она сама и v. Поскольку в G нет кратных рёбер, степень вершины w оказывается не больше $1 + 2 = 3 < 4$, что противоречит 4-регулярности G.

Итак, граф $G - u - v$ связен, а u и v соединены одинарным ребром (ибо в G вообще нет кратных рёбер). Значит, по лемме 1 граф G обладает $(3,1)$-раскраской не более чем в три цвета, в которой множество рёбер одного из цветов содержит лишь ребро uv, что и требовалось. Теорема 7 доказана.

1.4. Трёх цветов достаточно для $(3,1)$-раскраски. Используя результат теоремы 3, докажем, что для $(3,1)$-раскраски 4-регулярного псевдографа требуется не более трёх цветов.

Доказательство теоремы 4. Предположим, напротив, что существуют 4-регулярные псевдографы, обладающие $(3,1)$-раскраской, но только не менее чем в 4 цвета. Пусть $G(V, E)$ — минимальный контр-

пример в том смысле, что он содержит наименьшее возможное число вершин, а среди графов с данным числом вершин — наименьшее возможное количество пар вершин, соединённых параллельными рёбрами. Граф G, очевидно, связен. При этом $|V| > 1$, так как единственный 4-регулярный граф с одной вершиной не обладает $(3,1)$-раскраской. Кроме того, в силу теоремы 7 в G есть параллельные рёбра.

Пусть u и v — две вершины графа G, соединённые несколькими рёбрами. Заметим, что тогда они соединены ровно двумя рёбрами, так как три параллельных ребра образовали бы 3-регулярный подграф, что в силу теоремы 6 повлекло бы $(3,1)$-раскрашиваемость графа G не более чем в три цвета. Обозначим эти рёбра через e_1 и e_2. Зафиксируем $(3,1)$-раскраску c графа G.

Случай 1. В вершине u или в вершине v имеется петля (рис. 2).

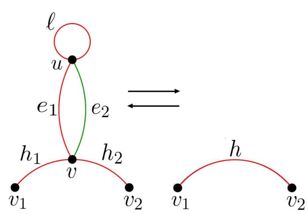

Рис. 2

Если петли есть в обеих вершинах u и v, то граф G обладает $(3,1)$-раскраской в два цвета. Так что без ограничения общности можно считать, что петля есть только в вершине u. Обозначим эту петлю через ℓ, и пусть v соединена ребром h_1 с вершиной v_1 и ребром h_2 — с вершиной v_2 (возможно, $v_1 = v_2$). Пусть $G'(V', E')$ — граф, полученный из G удалением вершин u и v и добавлением ребра h между вершинами v_1 и v_2. Легко убедиться, что $c(h_1) = c(h_2)$, поэтому G' обладает $(3,1)$-раскраской c' (достаточно положить $c'(e) = c(e)$ для всех $e \in E' \setminus \{h\}$ и $c'(h) = c(h_1)$). Но $|V'| < |V|$, поэтому G' обладает и $(3,1)$-раскраской c'_0 не более чем в три цвета. Обозначим множество этих цветов через $\mathcal{C}$. Положив $c_0(e) = c'_0(e)$ для $e \in E' \setminus \{h\}$, $c_0(h_1) = c_0(h_2) = c_0(e_1) = c_0(\ell) = c'_0(h)$ и $c_0(e_2) \in \mathcal{C} \setminus \{c_0(e_1)\}$, получаем $(3,1)$-раскраску c_0 графа G, которая также требует не более трёх цветов.

Пусть теперь в вершинах u и v нет петель. Предположим, что вершина u соединена рёбрами g_1 и g_2 с вершинами u_1 и u_2 соответственно, а вершина v — рёбрами h_1 и h_2 с вершинами v_1 и v_2 (некоторые из вершин u_1, u_2, v_1, v_2 могут совпадать).

Случай 2. $c(g_1) = c(g_2)$ (рис. 3 и 4). В этом случае, как легко убедиться, имеет место равенство $c(h_1) = c(h_2)$, поэтому граф $G'(V', E')$, полученный из G удалением вершин u и v и добавлением ребра g между u_1 и u_2 и ребра h между v_1 и v_2, обладает $(3,1)$-раскраской c' (достаточно положить $c'(e) = c(e)$ для $e \in E' \setminus \{g, h\}$, $c'(g) = c(g_1)$ и $c'(h) = c(h_1)$). Но

$|V'| < |V|$, поэтому G' обладает также и $(3,1)$-раскраской c_0' не более чем в три цвета. Обозначим множество этих цветов через $\mathcal{C}$. Положим $c_0(e) = c_0'(e)$ для $e \in E' \setminus \{g, h\}$, $c_0(g_1) = c_0(g_2) = c_0'(g)$, $c_0(h_1) = c_0(h_2) = c_0'(h)$, $c_0(e_1) = c_0'(g)$. При этом если $c_0'(g) \neq c_0'(h)$, то положим $c_0(e_2) = c_0'(h)$, а в противном случае пусть $c_0(e_2) \in \mathcal{C} \setminus \{c_0'(g)\}$. Полученная раскраска c_0 является $(3,1)$-раскраской графа G, которая требует, как и c_0', не более трёх цветов.

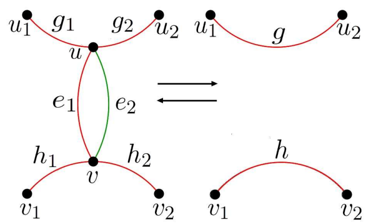

Рис. 3

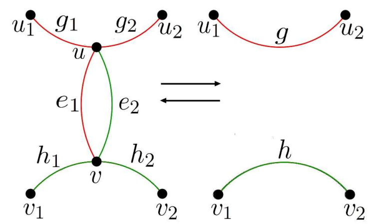

Рис. 4

Случай 3. $c(g_1) \neq c(g_2)$ (рис. 5). В этом случае $c(h_1) \neq c(h_2)$, поэтому граф $G^*(V, E^*)$, полученный из G удалением рёбер e_1 и e_2 и добавлением петель ℓ_1 и ℓ_2 в вершинах u и v соответственно, обладает $(3,1)$-раскраской c^* (достаточно положить $c^*(e) = c(e)$ для $e \in E^* \setminus \{\ell_1, \ell_2\}$, $c^*(\ell_1) = c(g_1)$ и $c^*(\ell_2) = c(h_1)$). Графы G и G^* содержат одинаковое количество вершин, но в G^* пар вершин, соединённых параллельными рёбрами, на одну меньше, чем в G. Значит, G^* обладает $(3,1)$-раскраской c_0^* не более чем в три цвета. Из четырёх рёбер g_1, g_2, h_1 и h_2 какие-то два при раскраске c_0^* окрашены в один и тот же цвет (так как цветов всего три). При этом, очевидно, $c_0^*(g_1) \neq c_0^*(g_2)$ и $c_0^*(h_1) \neq c_0^*(h_2)$, так что пусть для определённости $c_0^*(g_1) = c_0^*(h_1)$. Положив $c_0(e) = c_0^*(e)$ для всех $e \in E \setminus \{e_1, e_2\}$ и $c_0(e_1) = c_0(e_2) = c_0^*(g_1)$, получаем $(3,1)$-раскраску c_0 графа G, требующую не более трёх цветов.

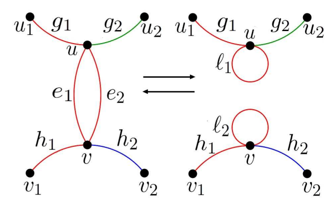

Рис. 5

Итак, в любом случае граф G обладает $(3,1)$-раскраской не более чем в три цвета, что противоречит его выбору. Теорема 4 доказана.

2. Упорядоченные $(3,1)$-раскраски

В этом разделе докажем теорему 5. Для этого потребуется техника, принципиально отличная от той, что использовалась при доказательстве

теорем 1–4. Основной результат будет следовать из нескольких лемм, опирающихся на утверждение, доказанное в [5].

2.1. Базовые леммы.

Утверждение 2 [5]. *Пусть G — псевдограф с n вершинами и m рёбрами такой, что $m > 2n$. Тогда G содержит нетривиальный (т. е. имеющий рёбра) подграф, степени всех вершин которого делятся на* 3.

Замечание. В случае, когда степени всех вершин графа G не превосходят пяти, такой подграф обязан быть 3-регулярным. Это наблюдение доказывает, что любой «4-регулярный граф плюс ребро» содержит 3-регулярный подграф [6].

Замечание. Полученный подграф всегда можно рассматривать как остовный, добавив в него при необходимости вершины степени 0.

Используем утверждение 2 для доказательства леммы 2, которая, в свою очередь, потребуется для доказательства теоремы 5.

Определение 4. Пусть G — псевдограф, e — его ребро, соединяющее вершины u_1 и u_2 (возможно, $u_1 = u_2$). Граф G', полученный из G удалением ребра e, добавлением новой вершины v, рёбер vu_1 и vu_2, а также петли в вершине v, назовём *графом, полученным из G добавлением петли на ребро e* (рис. 6).

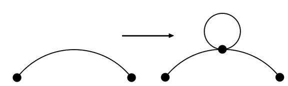

Рис. 6

Лемма 2. *Пусть G — 4-регулярный псевдограф, а граф G' получен из G добавлением петли на ребро. Тогда хотя бы один из графов G и G' содержит 3-регулярный подграф.*

Доказательство. Предположим, что G' получен из G добавлением петли ℓ в вершине v на ребро e, соединяющее вершины u_1 и u_2 (возможно, $u_1 = u_2$). Рассмотрим граф G'', полученный из графа G' добавлением ещё одной петли ℓ_1 в вершине v. Если количество вершин графа G равно n, то количество вершин графа G'' равно $n+1$, а количество рёбер — $2n+3$, так что для него выполняются условия утверждения 2. Значит, G'' содержит нетривиальный подграф H, степени всех вершин которого кратны трём. Рассмотрим возможные случаи.

Случай 1. Степень вершины v в H равна 0. Тогда H — 3-регулярный подграф как в графе G, так и в G'.

Случай 2. Степень вершины v в H равна 3. Тогда в H входит только одна из петель при вершине v (без ограничения общности это петля ℓ), так что H — 3-регулярный подграф в G'.

Случай 3. Степень вершины v в H равна 6. Тогда H содержит все рёбра графа G'' при вершине v, в частности, оба ребра vu_1 и vu_2. Но это значит, что граф $\widetilde{H}$, полученный из H удалением вершины v и добавлением ребра e, является 3-регулярным подграфом графа G. Лемма 2 доказана.

Следующая лемма составляет основную часть доказательства теоремы 5 и, кроме того, представляет самостоятельный интерес.

Лемма 3. *Пусть G — связный псевдограф, степени вершин которого равны* 3 *и* 4, *причём множество вершин степени* 3 *непусто и в каждой из них находится петля. Тогда G содержит* 3*-регулярный подграф.*

Доказательство. Ясно, что в графе $G(V,E)$ из условия леммы должно быть чётное число вершин степени 3. Разобьём их произвольным образом на пары и обозначим через u_1, v_1, $\ldots$, u_k, v_k (таким образом, в G ровно $2k$ вершин степени 3, по условию $k>0$). Пусть для каждого i от 1 до k вершина u_i соединена ребром e_i с вершиной a_i, а вершина v_i — ребром g_i с вершиной b_i (некоторые из a_i и b_i могут совпадать). Рассмотрим граф $G'(V',E')$, полученный из G удалением вершин u_i и v_i и добавлением рёбер h_i между a_i и b_i для всех $1<i\leqslant k$ (некоторые из рёбер h_i могут оказаться петлями, рис. 7). Очевидно, граф G' снова удовлетворяет условиям леммы, но содержит только две вершины степени 3 — u_1 и v_1. При этом если G' содержит 3-регулярный подграф, то это же можно сказать и о графе G. В самом деле, предположим, что $H'(V_0',E_0')$ — 3-регулярный подграф графа G'. Пусть множество $E_0\subseteq E$ рёбер графа G содержит все рёбра из множества $E\cap E_0'$, и, кроме того, для каждого $h_i\in E_0'$ добавим в E_0 рёбра e_i, g_i и петли, находящиеся в вершинах u_i и v_i. Тогда граф $H(V_0,E_0)$, индуцированный этим множеством рёбер, является 3-регулярным подграфом графа G.

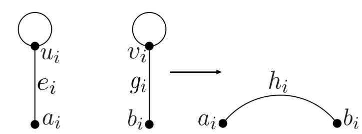

Рис. 7

Таким образом, достаточно доказать лемму для случая, когда граф G содержит лишь две вершины степени 3. Пусть это будут вершины u и v, причём u соединена ребром e с вершиной a, а v соединена ребром g с вершиной b (можно считать, что u и v не соседствуют, иначе сам граф G окажется 3-регулярным). Как и в первой части доказательства, пусть $G'(V',E')$ — это (4-регулярный) граф, полученный из G удалением вершин u и v и добавлением ребра h между a и b. Если G' содержит 3-регулярный подграф, то это же можно сказать и о G, поэтому

можно считать, что в G' нет 3-регулярного подграфа. Тогда пусть G^* — граф, полученный из G' добавлением петли в новой вершине w на ребро h (рис. 8).

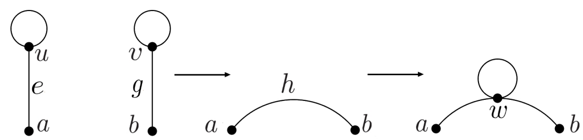

Рис. 8

В силу леммы 2 G^* содержит 3-регулярный подграф $H^*(V_0^*, E_0^*)$. Пусть множество $E_0 \subseteq E$ рёбер графа G содержит все рёбра из $E \cap E_0^*$, кроме того, если ребро wa лежит в множестве E_0^*, то добавим в E_0 ребро e и петлю, находящуюся в вершине u, а если $wb \in E_0^*$, то аналогично добавим в E_0 ребро g и петлю в вершине v (если $wa, wb \notin E_0^*$, то полагаем $E_0 = E_0^*$). Тогда подграф $H_0(V_0, E_0)$ графа G, индуцированный этим множеством рёбер, 3-регулярен, что и требовалось. Лемма 3 доказана.

2.2. Доказательство теоремы 5. Итак, пусть $G(V, E)$ — связный 4-регулярный псевдограф, $H(V_1, E_1)$ — его 3-регулярный подграф.

Пусть уже построена последовательность непустых попарно не пересекающихся множеств рёбер E_1, E_2, $\ldots$, E_k графа G такая, что для каждой вершины $u \in V$ графа G реализуется одна из следующих возможностей.

(i) Вершина u не инцидентна ни одному из рёбер множества $E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_k$ (*вершина первого типа*).

(ii) Три ребра, инцидентных вершине u, принадлежат E_i, а четвёртое не принадлежит множеству $E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_k$ (*вершина второго типа*).

(iii) Три ребра, инцидентных вершине u, принадлежат E_i, а четвёртое — E_j, причём $j > i$ (*вершина третьего типа*).

Заметим, что последовательность, состоящая только из E_1, удовлетворяет этому условию (при $k = 1$) и служит базой для дальнейшего доказательства по индукции.

Докажем, что если $E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_k \neq E$, то существует непустое множество E_{k+1} такое, что последовательность E_1, E_2, $\ldots$, E_k, E_{k+1} также удовлетворяет этому условию. В самом деле, рассмотрим граф G_k, вершины которого — вершины первого и второго типа, а множество рёбер равно $E \setminus (E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_k)$. Заметим, что любая компонента связности графа G_k содержит вершины второго типа, так как противное противоречило бы связности графа G. Пусть $\widetilde{G}_k$ — граф, полученный из G_k

добавлением петли в каждую вершину второго типа. Каждая компонента связности графа $\widetilde{G}_k$ удовлетворяет условиям леммы 3, поэтому $\widetilde{G}_k$ содержит 3-регулярный подграф $\widetilde{H}_k(\widetilde{V}_k, \widetilde{E}_k)$. Положим $E_{k+1} = \widetilde{E}_k \cap E$ (т. е. выкинем из $\widetilde{E}_k$ все петли, добавленные в граф G_k при построении графа $\widetilde{G}_k$). Тогда E_{k+1} — непустое множество, не пересекающееся ни с одним из $E_1, \ldots, E_k$, и легко убедиться, что оно удовлетворяет всем нашим требованиям.

На каком-то шаге описанный процесс построения последовательности оборвётся, так как все добавляемые в неё множества непусты. Получим семейство множеств $E_1, E_2, \ldots, E_k$ такое, что $E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_k = E$. При этом в графе останутся только вершины третьего типа, а искомой упорядоченной $(3,1)$-раскраской будет такая, при которой рёбра из множества E_i окрашены в цвет i. Теорема 5 доказана.

Автор выражает признательность А. Н. Глебову за его неоценимую помощь при подготовке статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Дистель Р.** Теория графов. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2002. — 336 с.
2. **Лидл Р., Нидеррайтер Г.** Конечные поля. Т. 1. — М.: Мир, 1988. — 430 с.
3. **Ташкинов В. А.** 3-Однородные части 4-однородных графов // Мат. заметки. — 1984. — Т. 36, № 2. — С. 239–259.
4. **Addario-Berry L., Dalal K., Reed B. A.** Degree constrained subgraphs // Discrete Appl. Math. — 2008. — Vol. 156, N 7. — P. 1168–1174.
5. **Alon N., Friedland S., Kalai G.** Regular subgraphs of almost regular graphs // J. Comb. Theory. Ser. B. — 1984. — Vol. 37, N 1. — P. 79–91.
6. **Alon N., Friedland S., Kalai G.** Every 4-regular graph plus an edge contains a 3-regular subgraph // J. Comb. Theory. Ser. B. — 1984. — Vol. 37, N 1. — P. 92–93.
7. **Alon N.** Combinatorial Nullstellensatz // J. Comb. Probab. Comput. — 1999. — Vol. 8, N 1–2. — P. 7–29.
8. **Berge C., Las Vergnas M.** On the existence of subgraphs with degree constraints // Indagationes Mathematicae (Proc.). — 1978. — Vol. 81, N 1. — P. 165–176.
9. **Bondy J. A., Murty U. S. R.** Graph theory. — Berlin: Springer-Verl., 2008. — 655 p. (Grad. Texts Math.; Vol.244).
10. **Chvátal V., Fleischner H., Sheehan J., Thomassen C.** Three-regular subgraphs of four-regular graphs // J. Graph Theory. — 1979. — Vol. 3, N 4. — P. 371–386.

11. **Cornuéjols G.** General factors of graphs // J. Comb. Theory. Ser. B. — 1988. — Vol. 45, N 2. — P. 185–198.
12. **Heinrich K., Hell P., Kirkpatrick D. G., Liu G.** A simple existence criterion for $(g < f)$-factors // Discrete Math. — 1990. — Vol. 85, N 3. — P. 313–317.
13. **Kano M., Saito A.** $[a, b]$-Factors of graphs // Discrete Math. — 1983. — Vol. 47. — P. 113–116.
14. **Kano M.** Factors of regular graphs // J. Comb. Theory. Ser. B. — 1986. — Vol. 41, N 1. — P. 27–36.
15. **Lovász L.** Subgraphs with prescribed valencies // J. Comb. Theory. — 1970. — Vol. 8, N 4. — P. 391–416.
16. **Moreno O., Zinoviev V. A.** Some sufficient conditions for 4-regular graphs to have 3-regular subgraphs // Lect. Notes Comput. Sci. — 1994. — Vol. 781. — P. 164–171.
17. **Moreno O., Zinoviev V. A.** Three-regular subgraphs of four-regular graphs // Eur. J. Comb. — 1998. — Vol. 19, N 3. — P. 369–373.
18. **Olson J. E.** A combinatorial problem on finite Abelian groups. II // J. Number Theory. — 1969. — Vol. 1, N 2. — P. 195–199.
19. **Sebö A.** General antifactors of graphs // J. Comb. Theory. Ser. B. — 1993. — Vol. 58, N 2. — P. 174–184.
20. **Tutte W. T.** The subgraph problem // Ann. Discrete Math. — 1978. — Vol. 3. — P. 289–295.

Бернштейн Антон Юрьевич,
e-mail: bahtoh@gmail.com

Статья поступила
16 декабря 2013 г.

Переработанный вариант —
21 февраля 2014 г.