ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Сентябрь—октябрь 2014. Том 21, № 5. С. 17–22

УДК 519.175.3

ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ПОМЕЧЕННЫХ ЭЙЛЕРОВЫХ ТЕТРАЦИКЛИЧЕСКИХ ГРАФОВ

В. А. Воблый, А. К. Мелешко

Аннотация. Получена точная и асимптотическая формулы для числа помеченных эйлеровых тетрациклических графов с заданным количеством вершин.

Ключевые слова: перечисление, помеченный граф, эйлеров граф, тетрациклический граф, асимптотика.

В работе рассматриваются простые (без петель и кратных рёбер) помеченные неориентированные графы.

Граф называется *чётным*, если каждая его вершина имеет чётную степень. Эйлеров граф — связный чётный граф. Рид [10] перечислил помеченные чётные и эйлеровы графы с заданными числами вершин и рёбер, а Тазава [11] перечислил помеченные эйлеровы блоки с заданным числом вершин. В [1] получены явные формулы и асимптотика для числа помеченных бициклических и трициклических эйлеровых графов. В [2] перечислены помеченные тетрациклические эйлеровы блоки.

Нами получена явная формула для числа помеченных эйлеровых тетрациклических графов с заданным числом вершин и найдена асимптотика для числа таких графов с большим числом вершин.

Точкой сочленения связного графа называется его вершина, после удаления которой вместе с инцидентными ей рёбрами граф становится несвязным. *Блок* — связный граф без точек сочленения, а также максимальный связный нетривиальный подграф, не имеющий точек сочленения [7, с. 41]. Под *тетрациклическим графом* понимается связный граф с цикломатическим числом, равным 4.

Включением вершины w степени 2 *в ребро* $e = uv$ графа G (равенство $u = v$ допускается) называется замена e на два новых ребра $e_1 = uw$ и $e_2 = wv$. Обратная операция называется *исключением вершины степени* 2 *из ребра.* В результате применения этой операции в графе могут появиться кратные рёбра или петля. Два графа называются *гомеоморфными*, если они могут быть получены друг из друга с помощью последовательности операций включения и исключения вершин степени 2. Отношение «быть гомеоморфными» является отношением эквивалентности. *Гомеоморфным* (*топологическим*) типом называется общий граф (допускаются петли и кратные рёбра), не содержащий вершин степени 2, из которого с помощью операций включения вершин степени 2 могут быть получены все графы данного класса гомеоморфных графов [4, 6, 8].

Теорема 1. *При $n \geqslant 6$ число E_n помеченных тетрациклических эйлеровых графов с n вершинами равно*

$$E_n = \frac{n!}{11520}(11n^5 - 135n^4 + 440n^3 + 510n^2 - 3556n - 720).$$

Доказательство. Граф является эйлеровым только тогда, когда его гомеоморфный тип — эйлеров граф. Из 105 гладких тетрациклических гомеоморфных типов только 7 являются эйлеровыми графами [4, с. 63–65]. Эти типы графов представлены на рис. 1.

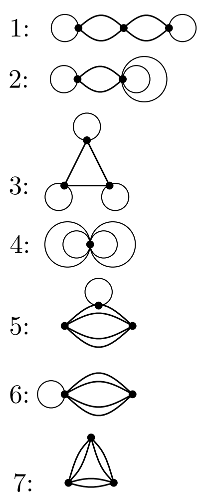

Рис. 1

Пусть H — гомеоморфный тип с a вершинами, b ребрами (петля считается ребром), b_0 петлями, b_i — число пучков рёбер кратности i, $A(H)$ — порядок вершинно-рёберной группы автоморфизмов графа H. Тогда число помеченных графов C_n с n вершинами и гомеоморфным типом H равно [6, лемма 2]:

$$C_n = \frac{n!}{2^{b_0}A(H)}\mathrm{Coef}_{x^{n-a}}\frac{x^{b+b_0-\sum\limits_{i=1}^{b} b_i}\prod\limits_{i=1}^{b}(x+i(1-x))^{b_i}}{(1-x)^b}.$$

В нашем случае для числа $C_{i,n}$ графов с i-м гомеоморфным типом и n вершинами имеем

1) $a = 3,\ b = 6,\ b_0 = b_2 = 2,\ b_1 = b_3 = b_4 = b_5 = b_6 = 0,\ A(H) = 8,$

$$C_{1,n} = \frac{n!}{32}\mathrm{Coef}_{x^{n-3}}\frac{x^6(x+2(1-x))^2}{(1-x)^6}.$$

С помощью известного разложения [5, с. 709]

$$(1-w)^{-m-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{m+n}{m}w^n$$

получим

$$C_{1,n} = \frac{n!}{32}\mathrm{Coef}_{x^{n-3}}\left(\frac{x^8}{(1-x)^6} + 4\frac{x^7}{(1-x)^5} + 4\frac{x^6}{(1-x)^4}\right)$$
$$= \frac{n!}{32}\mathrm{Coef}_{x^{n-3}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+5}{5}x^{k+8} + 4\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+4}{4}x^{k+7} + 4\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+3}{3}x^{k+6}\right)$$
$$= \frac{n!}{32}\left(\binom{n-6}{5} + 4\binom{n-6}{4} + 4\binom{n-6}{3}\right)$$
$$= \frac{n!}{3840}(n-6)(n-7)(n-8)(n^2+n-10).$$

Аналогично для остальных гомеоморфных типов графов найдём

2) $a = 2,\ b = 5,\ b_0 = 3,\ b_2 = 1,\ b_1 = b_3 = b_4 = b_5 = 0,\ A(H) = 4,$

$$C_{2,n} = \frac{n!}{32}\mathrm{Coef}_{x^{n-2}}\frac{x^7(x+2(1-x))}{(1-x)^5}$$
$$= \frac{n!}{32}\mathrm{Coef}_{x^{n-2}}\left(\frac{x^8}{(1-x)^5} + \frac{2x^7}{(1-x)^4}\right)$$
$$= \frac{n!}{32}\mathrm{Coef}_{x^{n-2}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+4}{4}x^{k+8} + \sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+3}{3}x^{k+7}\right)$$
$$= \frac{n!}{32}\left(\binom{n-6}{4} + 2\binom{n-6}{3}\right) = \frac{n!}{768}(n-1)(n-6)(n-7)(n-8);$$

3) $a = 3,\ b = 6,\ b_0 = b_1 = 3,\ b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = b_6 = 0,\ A(H) = 6,$

$$C_{3,n} = \frac{n!}{48}\mathrm{Coef}_{x^{n-3}}\frac{x^6}{(1-x)^6} = \frac{n!}{48}\mathrm{Coef}_{x^{n-3}}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+5}{5}x^{k+6}$$
$$= \frac{n!}{5760}\binom{n-4}{5} = \frac{n!}{5760}(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8);$$

4) $a = 1,\ b = 4,\ b_0 = 4,\ b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 0,\ A(H) = 24,$

$$C_{4,n} = \frac{n!}{384}\mathrm{Coef}_{x^{n-1}}\frac{x^8}{(1-x)^4} = \frac{n!}{384}\mathrm{Coef}_{x^{n-1}}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+3}{3}x^{k+8}$$
$$= \frac{n!}{384}\binom{n-6}{3} = \frac{n!}{2304}(n-6)(n-7)(n-8);$$

5) $a=3,\ b=6,\ b_0=1,\ b_1=2,\ b_3=1,\ b_2=b_4=b_5=b_6=0,\ A(H)=12$,

$$C_{5,n}=\frac{n!}{24}\mathrm{Coef}_{x^{n-3}}\frac{x^4(x+3(1-x))}{(1-x)^6}$$
$$=\frac{n!}{24}\mathrm{Coef}_{x^{n-3}}\left(\frac{x^5}{(1-x)^6}+3\frac{x^4}{(1-x)^5}\right)$$
$$=\frac{n!}{24}\mathrm{Coef}_{x^{n-3}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+5}{5}x^{k+5}+3\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+4}{4}x^{k+4}\right)$$
$$=\frac{n!}{24}\left(\binom{n-3}{5}+3\binom{n-3}{4}\right)=\frac{n!}{2880}(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n+8);$$

6) $a=2,\ b=5,\ b_0=1,\ b_4=1,\ b_1=b_2=b_3=b_5=0,\ A(H)=24$,

$$C_{6,n}=\frac{n!}{48}\mathrm{Coef}_{x^{n-2}}\frac{x^5(x+4(1-x))}{(1-x)^5}=\frac{n!}{48}\mathrm{Coef}_{x^{n-2}}\left(\frac{x^6}{(1-x)^5}+4\frac{x^5}{(1-x)^4}\right)$$
$$=\frac{n!}{48}\mathrm{Coef}_{x^{n-2}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+4}{4}x^{k+6}+4\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+3}{3}x^{k+5}\right)$$
$$=\frac{n!}{48}\left(\binom{n-4}{4}+4\binom{n-4}{3}\right)=\frac{n!}{1152}(n-4)(n-5)(n-6)(n+9);$$

7) $a=3,\ b=6,\ b_0=0,\ b_2=3,\ b_1=b_3=b_4=b_5=b_6=0,\ A(H)=48$,

$$C_{7,n}=\frac{n!}{48}\mathrm{Coef}_{x^{n-3}}\frac{x^3(x+2(1-x))^3}{(1-x)^6}=\frac{n!}{48}\mathrm{Coef}_{x^{n-3}}\frac{x^3(1+(1-x))^3}{(1-x)^6}$$
$$=\frac{n!}{48}\mathrm{Coef}_{x^{n-3}}\left(\frac{x^3}{(1-x)^3}+3\frac{x^3}{(1-x)^4}+3\frac{x^3}{(1-x)^5}+\frac{x^3}{(1-x)^6}\right)$$
$$=\frac{n!}{48}\mathrm{Coef}_{x^{n-3}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+2}{2}x^{k+3}+3\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+3}{3}x^{k+3}+3\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+4}{4}x^{k+3}\right.$$
$$\left.+\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+5}{5}x^{k+3}\right)=\frac{n!}{48}\left(\binom{n-4}{2}+3\binom{n-3}{3}+3\binom{n-2}{4}+\binom{n-1}{5}\right)$$
$$=\frac{n!}{5760}(n-2)(n-4)(n-5)(n^2+11n+18).$$

Сложим сначала числа графов типов 1–4 (эти графы — кактусы):

$$E_n^{(1)}=C_{1,n}+C_{2,n}+C_{3,n}+C_{4,n}=\frac{n!}{3840}(n-6)(n-7)(n-8)(n^2+n-10)$$

$$+\frac{n!}{768}(n-1)(n-6)(n-7)(n-8)+\frac{n!}{5760}(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)$$
$$+\frac{n!}{2304}(n-6)(n-7)(n-8)=\frac{n!}{11520}(n-6)(n-7)(n-8)5n^2=\frac{n!n^2}{384}\binom{n-6}{3}.$$

Сложим теперь числа графов типов 5–7:

$$E_n^{(2)}=C_{5,n}+C_{6,n}+C_{7,n}=\frac{n!}{2880}(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n+8)$$
$$+\frac{n!}{1152}(n-4)(n-5)(n-6)(n+9)+\frac{n!}{5760}(n-2)(n-4)(n-5)(n^2+11n+18)$$
$$=\frac{n!}{5760}(n-4)(n-5)(3n^3+12n^2-97n-18).$$

Учитывая, что $E_n=E_n^{(1)}+E_n^{(2)}$, получим

$$E_n=\frac{n!}{5760}\left(15n^2\binom{n-6}{3}+(n-4)(n-5)(3n^3+12n^2-97n-18)\right).$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получим утверждение теоремы. Теорема 1 доказана.

Из теоремы непосредственно вытекает

Следствие. *При $n\to\infty$ верно асимптотическое равенство*

$$E_n\sim\frac{11n^5}{11520}n!.$$

Отметим, что диаграммы на рис. 1 шести гомеоморфных типов тетрациклических эйлеровых графов, не являющихся блоками, легко получаются присоединением нового цикла к одному из трёх гомеоморфных типов трициклических эйлеровых графов, рассмотренных в [1]. Перечень диаграмм гомеоморфных типов блоков имеется также в [9].

Графы с гомеоморфным типом 4 являются графами розы с 4 лепестками. Графы розы с k лепестками перечислены в [3].

В таблице представлены числа E_n, вычисленные с помощью формулы из теоремы.

n	6	7	8	9	10	11
E_n	120	4830	126840	2934225	64486800	1394801100

Авторы благодарят анонимного рецензента за внимательное прочтение работы, ценные замечания и предложения по улучшению изложения результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Воблый В. А.** Перечисление помеченных связных бициклических и трициклических эйлеровых графов // Мат. заметки. — 2012. — Т. 92, № 5. — С. 678–683.
2. **Воблый В. А., Мелешко А. К.** Перечисление помеченных тетрациклических эйлеровых блоков // Мат. XVII Междунар. конф. «Проблемы теоретической кибернетики» (Казань, 16–20 июня, 2014 г.). — Казань: Отечество, 2014. — С. 60–62.
3. **Воблый В. А., Мелешко А. К.** Перечисление помеченных графов розы // Мат. XVI Межвуз. семинара «Комбинаторные конфигурации и их приложения» (Кировоград, 11–12 апреля 2014 г.). — Кировоград: Кировоградский нац. техн. университет, 2014. — С. 27–29.
4. **Дмитриев Е. Ф.** Перечисление отмеченных графов с данными структурными свойствами: Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.09. — Минск: Ин-т математики АН БССР, 1986. — 130 с.
5. **Прудников А. П. и др.** Интегралы и ряды. Т. 1. — М.: Наука, 1981. — 800 с.
6. **Степанов В. Е.** О некоторых особенностях строения случайного графа вблизи критической точки // Теория вероятности и её применения. — 1987. — Т. 32, вып. 4. — С. 633–657.
7. **Харари Ф.** Теория графов. — М.: Мир, 1973. — 302 с.
8. **Ford G. W., Uhlenbeck G. E.** Combinatorial problems in theory graphs. IV // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. — 1957. — Vol. 43. — P. 163–167.
9. **Heap B. R.** Enumeration homeomorphically irreducible star graphs // J. Math. Phys. — 1966. — Vol. 7, N 7. — P. 1582–1587.
10. **Read R. C.** Euler graphs on labelled nodes // Can. J. Math. — 1962. — Vol. 14. — P. 482–486.
11. **Tazawa S.** Enumeration of labelled 2-connected Euler graphs // J. Combin. Inf. Syst. Sci. — 1998. — Vol. 23, N 1–4. — P. 407–414.

Воблый Виталий Антониевич,
e-mail: vitvobl@yandex.ru
Мелешко Анна Константиновна,
e-mail: konstantin_meleshko@rambler.ru

Статья поступила
29 апреля 2014 г.

Переработанный вариант —
24 июня 2014 г.