ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Ноябрь—декабрь 2014. Том 21, № 6. С. 73–89

УДК 519.718.7

ОЦЕНКИ ДЛИН ПРОВЕРЯЮЩИХ И ДИАГНОСТИЧЕСКИХ ТЕСТОВ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ *)

К. А. Попков

Аннотация. Рассматриваются задачи проверки исправности и диагностики состояний N функциональных элементов, в исправном состоянии реализующих заданную булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, путём составления из них схем с одним выходом и наблюдения выдаваемых этими схемами значений на любых входных наборах значений переменных. Допускаются произвольные константные неисправности на выходах функциональных элементов; при этом предполагается, что не более k элементов неисправны, где k — заданное натуральное число, не превосходящее N. Требуется минимизировать число схем, необходимых для проверки исправности и определения состояний всех элементов. Показано, что для любых f, N и k необходимо не менее k схем. Для функций f специального вида получены необходимые и достаточные условия того, что для проверки исправности и определения состояний всех элементов достаточно k схем.

Ключевые слова: функциональный элемент, неисправность, схема, проверяющий тест, диагностический тест.

Введение

В работе рассматриваются задачи проверки исправности и распознавания состояний функциональных элементов с использованием экспериментов, заключающихся в составлении произвольных схем из заданных функциональных элементов с последующим «прозваниванием» этих схем, т. е. нахождением булевых функций, реализуемых составляемыми схемами. Суть общепринятой математической модели схемы из функциональных элементов и тех элементов, из которых строятся эти схемы, с исчерпывающей полнотой и ясностью представлена в [1], именно такая математическая модель является объектом исследования и рассматривается ниже.

Представим, что имеются N функциональных элементов $E_1, \ldots, E_N$ ($N \geqslant 1$). Каждый элемент, рассматриваемый как простейшая схема из

*) Исследование выполнено в Новосибирском гос. университете при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (договор № 02.G25.31.0054).

функциональных элементов, имеет $n \geqslant 1$ входов $v_1, \ldots, v_n$ и один выход и в исправном состоянии реализует на выходе заданную булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, где $x_1, \ldots, x_n$ — переменные, подаваемые на его входы $v_1, \ldots, v_n$ (считаем, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ существенно зависит от всех своих переменных и, как следствие, отлична от константы). В неисправном состоянии каждый элемент реализует одну из констант 0 или 1. Неисправность элемента E_i, при которой он реализует константу 0 (1), будем называть *неисправностью* E_i *типа* 0 (1). Предполагается, что среди данных N функциональных элементов не более k элементов могут быть неисправны, где k — заданное натуральное число, $k \leqslant N$. Можно составлять любые схемы с одним выходом из данных функциональных элементов и наблюдать выдаваемые схемами значения на любых наборах значений переменных.

Задача заключается в том, чтобы протестировать функциональные элементы, т. е. для каждого из них определить, исправен данный элемент или неисправен (задача проверки), и в дополнение к этому определить тип неисправности каждого неисправного элемента (задача диагностики), используя при тестировании по возможности меньшее число схем.

1. Основные определения и вспомогательные утверждения

Будем называть *неисправностью системы элементов* любое множество неисправностей функциональных элементов при условии, что число этих неисправностей не больше k. (В частности, случай, когда все элементы исправны, является одним из видов неисправности системы элементов.)

Здесь и далее будем предполагать, что для любого i от 1 до N элемент E_i имеет номер i. Тогда неисправность любого элемента можно представить в виде упорядоченной пары $\{i, \delta\}$, где i — номер этого элемента, δ — булева константа, которую он реализует. Соответственно любую неисправность системы элементов можно представить в виде множества $\{\{i_1, \delta_1\}, \ldots, \{i_s, \delta_s\}\}$, где s — число неисправных элементов, $i_1, \ldots,$ i_s — номера неисправных элементов, δ_j — булева константа, которую реализует элемент E_{i_j}.

Диагностическим тестом назовём такой набор схем $S_1, \ldots, S_l$, составленных из заданных функциональных элементов, что для любых двух различных неисправностей системы элементов наборы функций, реализуемых схемами, не совпадают (т. е. существует схема S_i такая, что реализуемая этой схемой функция при первой неисправности не совпадает с реализуемой этой же схемой функцией при второй неисправности). Число l назовём *длиной* этого теста. Здесь используется терминология, общепринятая для диагностики управляющих систем (см., например, [2]).

Проверяющим тестом назовём такой набор схем $S_1, \ldots, S_l$, составленных из заданных функциональных элементов, что для любых двух неисправностей системы элементов, при которых множества неисправных элементов различны, наборы функций, реализуемых схемами, не совпадают. Число l назовём *длиной* этого теста.

Содержательный смысл этих определений состоит в следующем: диагностический (проверяющий) тест — это такой набор схем $S_1, \ldots, S_l$, составленных из заданных N функциональных элементов, что по набору функций, реализуемых этими схемами, можно однозначно определить состояние (исправность или неисправность) каждого из N элементов. При этом проверяющий тест не обязан определять тип неисправности (0 или 1) каждого неисправного элемента.

Введём функции $L_c(f, N, k)$ и $L_d(f, N, k)$, равные длинам самого короткого проверяющего и диагностического тестов соответственно для N функциональных элементов, реализующих в исправном состоянии функцию f, среди которых не более чем k неисправных.

Отметим, что для любых f, N и k выполняется соотношение

$$L_d(f, N, k) \geqslant L_c(f, N, k), \tag{1}$$

поскольку любой диагностический тест является проверяющим.

В качестве тривиального диагностического (и проверяющего) теста длины N всегда можно взять множество из N схем, каждая из которых представляет собой один из заданных функциональных элементов. Отсюда $L_c(f, N, k) \leqslant N$ и $L_d(f, N, k) \leqslant N$ для любых f, N и k.

Заметим, что если некоторый функциональный элемент в некоторой схеме не является выходным и его выход никуда не подаётся, то такой элемент можно удалить, и функции на выходах всех оставшихся элементов (в том числе выходного) в этой схеме останутся неизменными. Поэтому далее без ограничения общности будем считать, что в каждой схеме выход каждого элемента, не являющегося выходным, соединён со входом по крайней мере одного элемента.

Пусть $B = \{E_1, \ldots, E_N\}$.

2. Формулировки и доказательства основных результатов

В данной работе формулируется и доказывается ряд теорем, устанавливающих оценки для функций $L_c(f, N, k)$ и $L_d(f, N, k)$ при различных f, N и k.

Теорема 1. *Для любых f, N и k выполняются неравенства*

$$L_c(f, N, k) \geqslant k, \quad L_d(f, N, k) \geqslant k.$$

Доказательство. В силу (1) достаточно доказать только первое неравенство. Пусть для некоторых f, N и k выполняется соотношение $L_c(f, N, k) = l < k$. Тогда существует набор схем $S_1, \dots, S_l$, являющийся проверяющим тестом. Пусть M — множество выходных элементов схем $S_1, \dots, S_l$. Поскольку $l < k$, существует элемент E из B, не совпадающий ни с одним из элементов из M. Тогда при неисправности всех элементов из M типа 0 каждая из схем будет реализовывать ту же функцию, что и при неисправности всех элементов из M и элемента E типа 0 — тождественный нуль, причём в обоих случаях неисправны не более k элементов, а множества неисправных элементов при этих двух неисправностях различны; противоречие, так как $\{S_1, \dots, S_l\}$ — проверяющий тест. Теорема 1 доказана.

Пусть S — произвольная схема из функциональных элементов, E и E' — элементы, содержащиеся в этой схеме. Будем говорить, что элемент E находится в схеме S *ниже* элемента E' (соответственно E' *выше* E), если в S существует ориентированный путь от E' к E.

Теорема 2. *Пусть $n \geqslant 2$, функция $f(x_1, \dots, x_n)$ не представима в виде $x_1^{\sigma_1} \& \dots \& x_n^{\sigma_n}$ или $x_1^{\sigma_1} \vee \dots \vee x_n^{\sigma_n}$, где $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ — булевы константы, и $k \in \{1,\ 2,\ N-1,\ N\}$. Тогда*

$$L_c(f, N, k) = L_d(f, N, k) = k.$$

Доказательство. По теореме 1

$$L_c(f, N, k) \geqslant k, \quad L_d(f, N, k) \geqslant k.$$

В силу (1) достаточно доказать неравенство $L_d(f, N, k) \leqslant k$.

Лемма 1. *Существует такое $j \in \{1, \dots, n\}$, что ни одна из функций $f(x_1, \dots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \dots, x_n)$, $f(x_1, \dots, x_{j-1}, 1, x_{j+1}, \dots, x_n)$ не равна тождественно константе.*

Доказательство. Предположим, что это не так, т. е. для любого $j \in \{1, \dots, n\}$ существуют такие булевы константы α_j, β_j, что

$$f(x_1, \dots, x_{j-1}, \alpha_j, x_{j+1}, \dots, x_n) \equiv \beta_j.$$

Отметим, что для любого j от 2 до n выполняются тождества

$$f(\alpha_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \beta_1 \equiv f(\alpha_1, x_2, \dots, x_{j-1}, \alpha_j, x_{j+1}, \dots, x_n),$$

$f(x_1, \ldots, x_{j-1}, \alpha_j, x_{j+1}, \ldots, x_n) \equiv \beta_j \equiv f(\alpha_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, \alpha_j, x_{j+1}, \ldots, x_n)$, откуда $\beta_j = \beta_1$.

Рассмотрим произвольный булев набор $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, не совпадающий с набором $(\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_n)$. Тогда существует $j \in \{1, \ldots, n\}$ такое, что $\gamma_j \neq \overline{\alpha}_j$, т. е. $\gamma_j = \alpha_j$. Но тем самым $f(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) = f(\gamma_1, \ldots, \gamma_{j-1}, \alpha_j, \gamma_{j+1}, \ldots, \gamma_n) = \beta_1$ в силу того, что $f(x_1, \ldots, x_{j-1}, \alpha_j, x_{j+1}, \ldots, x_n) \equiv \beta_j = \beta_1$. Таким образом, на всех наборах длины n, кроме, быть может, набора $(\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_n)$, функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ равна β_1. Очевидно, что $f(\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_n) = \overline{\beta}_1$, так как в противном случае функция f была бы тождественно равна константе, что противоречит условию рассматриваемой задачи. Нетрудно проверить, что выполняются тождества

$$f(x_1, \ldots, x_n) \equiv x_1^{\overline{\alpha}_1} \& \ldots \& x_n^{\overline{\alpha}_n} \quad \text{при } \beta_1 = 0,$$
$$f(x_1, \ldots, x_n) \equiv x_1^{\alpha_1} \vee \ldots \vee x_n^{\alpha_n} \quad \text{при } \beta_1 = 1,$$

однако по условию теоремы функция f не может быть представлена ни в одном из этих двух видов; противоречие. Лемма 1 доказана.

По лемме 1 существует $j \in \{1, \ldots, n\}$ такое, что ни одна из функций $f(x_1, \ldots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \ldots, x_n)$, $f(x_1, \ldots, x_{j-1}, 1, x_{j+1}, \ldots, x_n)$ не равна тождественно константе. Без ограничения общности считаем, что $j = 1$.

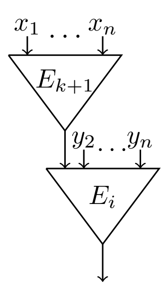

Рис. 1. Схема S_i

Если $k = N$, то тривиальный диагностический тест имеет длину k, откуда следует требуемое неравенство $L_d(f, N, k) \leqslant k$. Пусть $k = N - 1$, т. е. $N = k + 1$. Для каждого i от 1 до k построим схему S_i следующим образом. Пусть эта схема содержит два элемента E_i и E_{k+1}, на входы $v_1, \ldots, v_n$ элемента E_{k+1} подаются переменные $x_1, \ldots, x_n$ соответственно, а выход элемента E_{k+1} соединяется с входом v_1 элемента E_i. Пусть на входы $v_2, \ldots, v_n$ элемента E_i подаются переменные $y_2, \ldots, y_n$ соответственно, а выход E_i совпадает с выходом схемы S_i (рис. 1). Все переменные $x_1, \ldots, x_n, y_2, \ldots, y_n$ будем считать попарно различными. Докажем, что набор схем $S_1, \ldots, S_k$ является диагностическим тестом.

Лемма 2. *Схема S_i, $i = 1, \ldots, k$, реализует константу δ_i тогда и только тогда, когда элемент E_i неисправен и реализует константу δ_i.*

Доказательство. Зафиксируем некоторую неисправность системы элементов. Если при ней элемент E_i неисправен и реализует константу δ_i, то и схема S_i, очевидно, реализует константу δ_i. Пусть теперь E_i исправен. Предположим, что на входы схемы S_i вместо переменных $x_1, \ldots, x_n$

поданы нули. Тогда на выходе элемента E_{k+1} в этой схеме будет, очевидно, реализована некоторая константа (обозначим её через ε_i) вне зависимости от того, исправен этот элемент или неисправен. В таком случае, так как элемент E_i исправен, функция, реализуемая на выходе E_i, а значит, и на выходе схемы S_i, будет равна $f(\varepsilon_i, y_2, \dots, y_n)$. Но в силу леммы 1 данная функция не равна тождественно константе. Это означает, что и исходная функция, реализуемая схемой S_i (до подачи нулей вместо переменных $x_1, \dots, x_n$), отлична от константы, откуда следует справедливость леммы 2.

Пусть имеет место некоторая неисправность системы элементов. Возможны 2 случая.

Случай 1. Каждая из схем $S_1, \dots, S_k$ реализует константу. По лемме 2 это означает, что каждый из элементов $E_1, \dots, E_k$ неисправен и реализует соответствующую константу. Таким образом, в данном случае обнаружены k неисправных элементов, откуда следует, что элемент E_{k+1} исправен и состояние каждого элемента определено однозначно.

Случай 2. Некоторая схема S_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, реализует функцию, отличную от константы. В силу леммы 2 по набору функций, реализуемых схемами $S_1, \dots, S_k$, можно однозначно определить состояние каждого из элементов $E_1, \dots, E_k$, причём элемент E_i обязан быть исправным. Так как функция $f(x_1, \dots, x_n)$ существенно зависит от переменной x_1, вместо переменных $x_2, \dots, x_n$ на входы схемы S_i можно подать значения такие, что функция, реализуемая на выходе элемента E_{k+1} при исправном функционировании этого элемента, равна x_1^σ, где σ — некоторая булева константа. Тогда функция, реализуемая на выходе элемента E_i, а значит, и на выходе схемы S_i, равна $f(y_1, y_2, \dots, y_n)$, где

$$y_1 = \begin{cases} x_1^\sigma, & \text{если элемент } E_{k+1} \text{ исправен,} \\ 0 & \text{при неисправности элемента } E_{k+1} \text{ типа } 0, \\ 1 & \text{при неисправности элемента } E_{k+1} \text{ типа } 1. \end{cases}$$

В силу существенной зависимости функции f от своей первой переменной никакие две из функций $f\bigl(x_1^\sigma, y_2, \dots, y_n\bigr)$, $f(0, y_2, \dots, y_n)$, $f(1, y_2, \dots, y_n)$ не совпадают между собой. Отсюда следует, что по функции, реализуемой схемой S_i, можно однозначно определить состояние элемента E_{k+1}.

В итоге получаем, что по набору функций, реализуемых схемами $S_1, \dots, S_k$, можно однозначно определить, какой из случаев 1 и 2 имеет место, а в каждом из этих случаев — однозначно определить состояние каждого элемента. Это означает, что набор схем $S_1, \ldots, S_k$ является диагностическим тестом, откуда вытекает требуемое неравенство $L_d(f, N, k) \leqslant k$. Таким образом, в случае $k \in \{N-1,\, N\}$ теорема доказана.

Пусть $k \in \{1,\, 2\}$. Построим схему S_1 следующим образом. Пусть на входы $v_1, \ldots, v_n$ элемента E_1 подаются переменные $x_{1,1}, \ldots, x_{1,n}$ соответственно, а выход элемента E_1 соединяется с входом v_1 элемента E_2. Пусть для любого s от 2 до N на входы $v_2, \ldots, v_n$ элемента E_s подаются переменные $x_{s,2}, \ldots, x_{s,n}$ соответственно, а выход элемента E_s соединяется с входом v_1 элемента E_{s+1}, если $s < N$, и совпадает с выходом схемы S_1, если $s = N$. (Напомним, что по условиям теоремы $n \geqslant 2$.)

В случае $k = 2$ построим схему S_2 следующим образом. Пусть на входы $v_1, \ldots, v_n$ элемента E_N подаются переменные $x_{1,1}, \ldots, x_{1,n}$ соответственно, а выход элемента E_N соединяется с входом v_1 элемента E_{N-1}. Пусть для любого s от 2 до N на входы $v_2, \ldots, v_n$ элемента E_{N-s+1} подаются переменные $x_{s,2}, \ldots, x_{s,n}$ соответственно, а выход элемента E_{N-s+1} соединяется с входом v_1 элемента E_{N-s}, если $s < N$, и совпадает с выходом схемы S_2, если $s = N$.

Все переменные $x_{1,1}, \ldots, x_{1,n}, x_{2,2}, \ldots, x_{2,n}, \ldots, x_{N,2}, \ldots, x_{N,n}$ будем считать попарно различными. Вид схем S_1, S_2 показан на рис. 2. Очевидно, что любой элемент из множества B содержится в каждой из схем S_1, S_2, причём для любых двух элементов E_{s_1} и E_{s_2} из B в любой из этих схем либо E_{s_1} находится ниже E_{s_2}, либо E_{s_2} ниже E_{s_1}.

Пусть S — произвольная схема из числа S_1, S_2, а E — функциональный элемент, содержащийся в этой схеме. Тогда если элемент E неисправен, а все элементы, расположенные в схеме S ниже E, исправны, то E будем называть *нижним неисправным элементом* в схеме S.

С учётом леммы 1 и существенной зависимости функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ от всех переменных нетрудно заметить, что если E_i, $i \in \{1, \ldots, N\}$, — нижний неисправный элемент в схеме S_1, то в этом и только этом случае реализуемая схемой S_1 функция не зависит существенно от переменных, подаваемых на входы элемента E_i, и существенно зависит от переменных, подаваемых на входы элементов, лежащих в S_1 ниже E_1. А если известно, что E_i — нижний неисправный элемент в S_1, то с учётом существенной зависимости f от всех своих переменных по функции, реализуемой схемой S_1, можно однозначно указать, какую константу выдаёт элемент E_i. Аналогичные рассуждения можно провести и для схемы S_2. Таким образом, справедлива

Лемма 3. *Пусть имеет место некоторая неисправность системы эле-*

ментов. Тогда для любой из схем S_1, S_2 по функции, реализуемой этой схемой, можно однозначно определить, есть ли среди элементов из множества B хотя бы один неисправный, и если такой элемент существует, то можно однозначно указать нижний неисправный элемент в этой схеме и тип его неисправности.

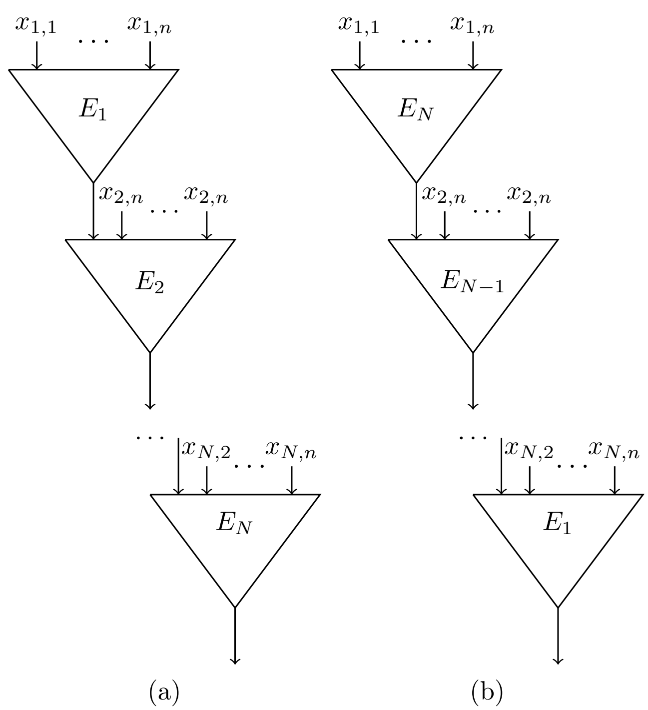

Рис. 2. (a) Схема S_1, (b) схема S_2

Перейдём к завершению доказательства теоремы 2. Рассмотрим 2 случая.

Случай 1. Пусть $k = 1$. В силу леммы 3 по функции, реализуемой схемой S_1, можно однозначно определить, есть ли среди элементов из множества B хотя бы один неисправный, и если такой элемент существует, то можно однозначно указать нижний неисправный элемент в этой схеме и тип его неисправности. Тогда если такой элемент найден, то все остальные элементы из множества B исправны, так как $k = 1$. Отсюда следует, что по функции, реализуемой схемой S_1, состояние каждого элемента из B определяется однозначно, т. е. $\{S_1\}$ — диагностический тест. Его длина равна $k = 1$, откуда следует требуемое неравенство $L_d(f, N, k) \leqslant k$.

Случай 2. Пусть $k = 2$. В силу леммы 3 для любой из схем S_1, S_2 по функции, реализуемой этой схемой, можно однозначно определить, есть ли среди элементов из множества B хотя бы один неисправный, и если такой элемент существует, то можно однозначно указать нижний неисправный элемент в этой схеме и тип его неисправности. Пусть среди элементов из множества B хотя бы один неисправен, E_{t_1} и E_{t_2} — нижние неисправные элементы в схемах S_1 и S_2 соответственно. Рассмотрим 2 подслучая.

Подслучай 2.1. Пусть $t_1 = t_2$. Если некоторый элемент E_{t_3} из множества B, отличный от элемента E_{t_1}, неисправен, то при $t_3 > t_1$ этот элемент находится ниже E_{t_1} в схеме S_1, а при $t_3 < t_1$ — в схеме S_2, поэтому элемент E_{t_1} не является нижним неисправным элементом по крайней мере в одной из схем S_1, S_2; противоречие. Следовательно, все элементы из множества B, кроме E_{t_1}, исправны. Для элемента E_{t_1} можно указать также тип его неисправности в силу леммы 3.

Подслучай 2.2. Пусть $t_1 \neq t_2$. Так как $k = 2$, а элементы E_{t_1} и E_{t_2} различны и неисправны, все остальные элементы из множества B исправны. Для элементов E_{t_1} и E_{t_2} в силу леммы 3 можно указать также типы их неисправностей.

В итоге получаем, что $\{S_1, S_2\}$ — диагностический тест. Его длина равна $k = 2$, откуда следует требуемое неравенство $L_d(f, N, k) \leqslant k$. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть $n \geqslant 2$, функция $f(x_1, \dots, x_n)$ имеет вид либо $x_{s_1}^{\sigma_1} \& \dots \& x_{s_m}^{\sigma_m} \& \big(x_{s_{m+1}}^{\sigma_{m+1}} \vee \dots \vee x_{s_n}^{\sigma_n}\big)$, либо $x_{s_1}^{\sigma_1} \vee \dots \vee x_{s_m}^{\sigma_m} \vee \big(x_{s_{m+1}}^{\sigma_{m+1}} \& \dots \& x_{s_n}^{\sigma_n}\big)$, где $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in \{0, 1\}$, $1 \leqslant m \leqslant n-1$, $s_1, \dots, s_n$ — попарно различные индексы от 1 до n, и выполнено одно из следующих условий*:

(i) $m = n - 1$ *и* $k \leqslant N - 1$;

(ii) $m \leqslant n - 2$ *и* $3 \leqslant k \leqslant N - 2$.

Тогда $L_c(f, N, k) \geqslant k + 1$ *и* $L_d(f, N, k) \geqslant k + 1$.

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $s_1 = 1$, $s_2 = 2, \dots, s_n = n$ (в противном случае можно соответствующим образом перенумеровать входы каждого элемента). В силу (1) достаточно доказать только первое неравенство. Пусть $L_c(f, N, k) \leqslant k$. Из теоремы 1 следует, что $L_c(f, N, k) \geqslant k$, значит, $L_c(f, N, k) = k$. Тогда существует набор схем $S_1, \dots, S_k$, являющийся проверяющим тестом. Пусть M — множество выходных элементов схем $S_1, \dots, S_k$.

Лемма 4. *Выходные элементы схем $S_1, \dots, S_k$ попарно различны.*

Доказательство. Предположим, что это не так, т. е. некоторый элемент из B является выходным элементом по крайней мере двух схем из числа $S_1, \ldots, S_k$. Тогда $|M| \leqslant k-1$. Так как $|B| = N > k$, существует элемент $E \in B \setminus M$. Тем самым при неисправности всех элементов из M типа 0 каждая из схем будет реализовывать ту же функцию, что и при неисправности всех элементов из M и элемента E типа 0 — тождественный нуль, причём в обоих случаях неисправны не более k элементов. Осталось заметить, что при данных двух неисправностях множества неисправных элементов различны; противоречие, так как $\{S_1, \ldots, S_k\}$ — проверяющий тест. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *В каждой из схем $S_1, \ldots, S_k$ содержатся все функциональные элементы из множества $B \setminus M$.*

Доказательство. Предположим, что это не так, т. е. в некоторой схеме S_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, не содержится некоторого элемента E из $B \setminus M$. Рассмотрим две неисправности H_1 и H_2 системы элементов: H_1 заключается в неисправности типа 0 всех выходных элементов схем $S_1, \ldots, S_{i-1}, S_{i+1}, \ldots, S_k$, а H_2 заключается в неисправности типа 0 всех выходных элементов схем $S_1, \ldots, S_{i-1}, S_{i+1}, \ldots, S_k$ и элемента E. Так как $E \notin M$, т. е. E не является выходным элементом ни одной схемы из числа $S_1, \ldots, S_k$, эти неисправности различны. Каждая из схем $S_1, \ldots, S_{i-1}, S_{i+1}, \ldots, S_k$ при H_1 и H_2 будет реализовывать, очевидно, одну и ту же функцию — тождественный нуль. Схема S_i будет реализовывать одинаковую функцию при H_1 и H_2, поскольку состояние каждого элемента, содержащегося в S_i, при H_1 и H_2 одинаково (в силу того, что E не входит в S_i). Таким образом, при H_1 и H_2 наборы функций, реализуемых схемами $S_1, \ldots, S_k$, совпадают, причём в обоих случаях неисправны, очевидно, не более k элементов; противоречие, так как при данных двух неисправностях множества неисправных элементов различны, а $\{S_1, \ldots, S_k\}$ — проверяющий тест. Лемма 5 доказана.

Пусть $\circ_0$ — другое обозначение для операции $\&$, а $\circ_1$ — другое обозначение для операции $\vee$. Из условия теоремы и того, что $s_1 = 1,\ s_2 = 2, \ldots, s_n = n$, следует, что функция f представима в виде

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^{\sigma_1} \circ_\delta \ldots \circ_\delta x_m^{\sigma_m} \circ_\delta \left(x_{m+1}^{\sigma_{m+1}} \circ_{\overline{\delta}} \ldots \circ_{\overline{\delta}} x_n^{\sigma_n}\right), \tag{2}$$

где δ — некоторая булева константа.

Легко проверить, что для любых булевой функции g и булевых констант α и β выполняются соотношения

$$g \circ_\alpha \alpha = \alpha \circ_\alpha g = \alpha, \tag{3}$$

$$(\alpha \oplus \beta)^{\alpha} = \overline{\beta}. \tag{4}$$

Пусть выполнено условие (i) теоремы 3 и $m = n-1$, а равенство (2) имеет вид

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^{\sigma_1} \circ_\delta \ldots \circ_\delta x_n^{\sigma_n}. \tag{5}$$

Рассмотрим схему S_1. Пусть E_0 — её выходной элемент. Из соотношения $k \leqslant N-1$ следует, что множество $B \setminus M$ непусто. Выберем любой элемент E' из этого множества. По лемме 5 данный элемент содержится в каждой из схем $S_1, \ldots, S_k$, в том числе в схеме S_1. Так как $E_0 \in M$, элементы E_0 и E' не совпадают, откуда получаем, что в схеме S_1 содержатся по крайней мере два элемента. Это означает, что хотя бы один вход элемента E_0 в схеме S_1 соединяется с выходом w некоторого другого функционального элемента E (элементы E и E' могут совпадать). Пусть w соединяется с входом v_t элемента E_0, $t \in \{1, \ldots, n\}$. Рассмотрим две неисправности H_1 и H_2 системы элементов: H_1 заключается в неисправности всех элементов из множества $(M \setminus \{E_0\}) \cup \{E\}$ типа $\sigma_t \oplus \overline{\delta}$, а H_2 заключается в неисправности всех элементов из множества $M \setminus \{E_0\}$ типа $\sigma_t \oplus \overline{\delta}$ и неисправности элемента E_0 типа δ. Каждая из схем $S_2, \ldots, S_k$ при H_1 и H_2 будет реализовывать одну и ту же функцию — константу $\sigma_t \oplus \overline{\delta}$, так как выходные элементы этих схем лежат в множестве $M \setminus \{E_0\}$ в силу леммы 4. Пусть $g_1, \ldots, g_n$ — функции, подаваемые в схеме S_i при неисправности H_1 на 1-й, $\ldots, n$-й входы элемента E_0 соответственно. Тогда по построению $g_t = \sigma_t \oplus \overline{\delta}$. Отсюда в силу (3)–(5) получаем, что функция, реализуемая на выходе E_0, т. е. схемы S_1, при H_1 равна

$$\begin{aligned} f(g_1, \ldots, g_n) &= g_1^{\sigma_1} \circ_\delta \ldots \circ_\delta g_{t-1}^{\sigma_{t-1}} \circ_\delta (\sigma_t \oplus \overline{\delta})^{\sigma_t} \circ_\delta g_{t+1}^{\sigma_{t+1}} \circ_\delta \ldots \circ_\delta g_n^{\sigma_n} \\ &= g_1^{\sigma_1} \circ_\delta \ldots \circ_\delta g_{t-1}^{\sigma_{t-1}} \circ_\delta \delta \circ_\delta g_{t+1}^{\sigma_{t+1}} \circ_\delta \ldots \circ_\delta g_n^{\sigma_n} = \delta, \end{aligned}$$

т. е. равна функции, реализуемой на выходе E_0 при неисправности H_2. Таким образом, при H_1 и H_2 наборы функций, реализуемых схемами $S_1, \ldots, S_k$, совпадают, причём в обоих случаях неисправны, очевидно, не более k элементов. Но при данных двух неисправностях множества неисправных элементов различны; противоречие, так как $\{S_1, \ldots, S_k\}$ — проверяющий тест. Таким образом, в случае выполнения условия (i) теорема доказана.

Пусть выполнено условие (ii) теоремы 3. Пусть S — произвольная схема из числа $S_1, \ldots, S_k$, а E — произвольный функциональный элемент, содержащийся в этой схеме. Будем говорить, что E является *собирающим элементом* схемы S, если входы элемента E соединяются с выходами по крайней мере двух различных функциональных элементов, а входы любого элемента, находящегося в S ниже E, соединяются с выходом ровно одного функционального элемента (рис. 3).

Очевидно, что если в схеме S существует собирающий элемент, то он один. Очевидно также, что для любого элемента E' схемы S, находящегося в ней не ниже собирающего элемента, любая цепь, соединяющая этот элемент с выходом S, проходит через собирающий элемент.

Лемма 6. *Пусть в схеме S_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, существует собирающий элемент E и все функциональные элементы, выходы которых соединены с входами элемента E, принадлежат множеству M. Тогда любой элемент из множества $B \setminus M$ либо совпадает с E, либо находится в схеме S_i ниже E.*

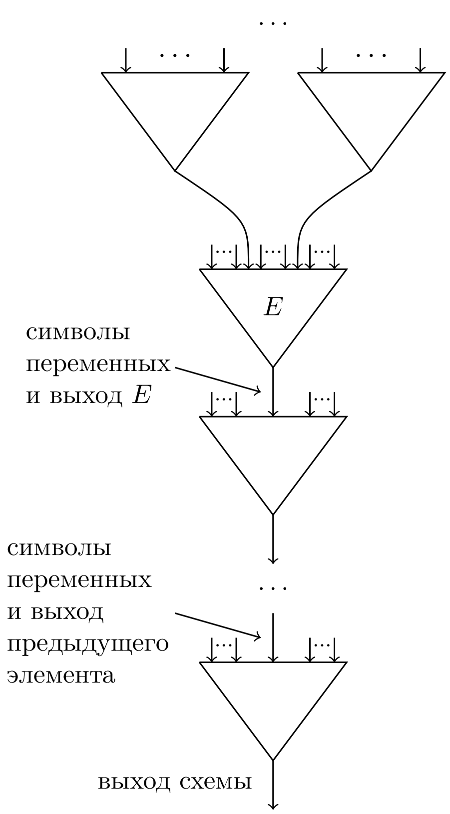

Рис. 3. Схема S

Доказательство. Предположим, что это не так, т. е. существует элемент $E' \in B \setminus M$ такой, что E' не совпадает с E и не находится в схеме S_i ниже E. В силу леммы 5 E' содержится в S_i. Рассмотрим две неисправности H_1 и H_2 системы элементов: H_1 заключается в неисправности типа 0 всех выходных элементов схем $S_1, \ldots, S_{i-1}, S_{i+1}, \ldots, S_k$, а H_2 заключается в неисправности типа 0 всех выходных элементов схем $S_1, \ldots, S_{i-1}, S_{i+1}, \ldots, S_k$ и элемента E'. Так как $E' \notin M$, т. е. E' не является выходным элементом ни одной схемы из числа $S_1, \ldots, S_k$, эти неисправности различны. Каждая из схем $S_1, \ldots, S_{i-1}, S_{i+1}, \ldots, S_k$ при H_1 и H_2 будет реализовывать, очевидно, одну и ту же функцию — тождественный нуль. Рассмотрим схему S_i. В ней элемент E' находится не ниже собирающего элемента E, откуда следует, что любая цепь, соединяющая E' с выходом S_i, проходит через E. Так как E' не совпадает с E, а все функциональные элементы, выходы которых соединены с входами элемента E, принадлежат M, эта цепь проходит через некоторый элемент E'' из множества M, выход которого соединён с одним или несколькими входами элемента E. Более того, поскольку $E' \notin M$, а $E'' \in M$, E'' не совпадает с E' и, следовательно, находится в данной цепи ниже E'. Заметим также, что элемент E'' не совпадает с выходным элементом схемы S_i, поэтому E'' совпадает с одним из выходных элементов схем $S_1, \ldots, S_{i-1}, S_{i+1}, \ldots, S_k$. Таким образом, в любой цепи, соединяющей элемент E' с выходом схемы S_i, присутствует хотя бы один элемент, являющийся выходным элементом одной из схем $S_1, \ldots, S_{i-1}, S_{i+1}, \ldots, S_k$ и находящийся в этой цепи ниже E'. Отсюда при неисправности типа 0 всех выходных элементов схем $S_1, \ldots, S_{i-1}, S_{i+1}, \ldots, S_k$ изменение состояния элемента E' с исправного на неисправность типа 0, т. е. переход от неисправности H_1 к неисправности H_2, никак не отразится на функции, реализуемой схемой S_i. Таким образом, при H_1 и H_2 наборы функций, реализуемых схемами $S_1, \ldots, S_k$, совпадают, причём в обоих случаях неисправны, очевидно, не более k элементов. Осталось заметить, что при данных двух неисправностях множества неисправных элементов различны; противоречие, так как $\{S_1, \ldots, S_k\}$ — проверяющий тест. Лемма 6 доказана.

Лемма 7. *Существуют схема S_i из $S_1, \ldots, S_k$ и функциональный элемент E из множества B такие, что E является собирающим элементом в S_i и по крайней мере один из входов элемента E в S_i соединён с выходом функционального элемента из множества $B \setminus M$.*

Доказательство. Предположим, что это не так. Тогда для каждой схемы S_i, $i = 1, \ldots, k$, выполнен один из двух случаев.

Случай 1. В схеме S_i нет собирающего элемента. Предположим, что в S_i существует такой элемент, что его входы соединены с выходами по крайней мере двух различных функциональных элементов. Из всех элементов с указанным свойством выберем такой, ниже которого в S_i не существует элемента с таким свойством (очевидно, что это можно сделать). Ясно, что выбранный элемент будет собирающим элементом в S_i; противоречие, из которого следует, что входы любого элемента схемы S_i соединены с выходом не более чем одного функционального элемента. Очевидно, что S_i в таком случае представляет собой цепь из функциональных элементов, причём в силу леммы 5 в этой цепи содержатся все элементы из множества $B \setminus M$.

Случай 2. В схеме S_i существует собирающий элемент E и все функциональные элементы, выходы которых соединены с входами элемента E, принадлежат множеству M. В этом случае выполнены условия леммы 6, откуда получаем, что любой элемент из множества $B \setminus M$ либо совпадает с E, либо находится в схеме S_i ниже E.

В этих случаях очевидно, что для каждого элемента из $B \setminus M$ существует единственная цепь, соединяющая этот элемент с выходом схемы S_i, $i = 1, \ldots, k$, причём эта цепь проходит через все элементы, находящиеся в S_i не выше этого элемента. Так как выполнено условие (ii) теоремы 3, то $N \geqslant k+2$, откуда следует, что $|B \setminus M| \geqslant 2$. Выберем два элемента E' и E'' из этого множества. Получаем, что в каждой из схем $S_1, \ldots, S_k$ либо элемент E' расположен ниже элемента E'' в указанной цепи, либо наоборот. Пусть число схем, в которых E' расположен ниже E'', равно n_1, а число схем, в которых E'' расположен ниже E', равно n_2. Тогда $n_1 + n_2 = k \geqslant 3$ в силу условия (ii) теоремы 3, откуда получаем, что хотя бы одно из этих чисел (без ограничения общности, n_1) не меньше 2. Это означает, что среди схем $S_1, \ldots, S_k$ существуют такие две схемы (без ограничения общности, S_1 и S_2), в каждой из которых элемент E' расположен в цепи ниже E''. Рассмотрим две неисправности H_1 и H_2 системы элементов: H_1 заключается в неисправности типа 0 всех выходных элементов схем $S_3, \ldots, S_k$ и элемента E', а H_2 заключается в неисправности типа 0 всех выходных элементов схем $S_3, \ldots, S_k$, элемента E' и элемента E''. Каждая из схем $S_3, \ldots, S_k$ при H_1 и H_2 будет реализовывать, очевидно, одну и ту же функцию — тождественный нуль. В то же время, в каждой из схем S_1, S_2 элемент E', реализующий константу 0 как при H_1, так и при H_2, находится ниже элемента E'' в единственной цепи, соединяющей E'' с выходом схемы. Поэтому изменение состояния элемента E'' с исправного на неисправность типа 0 (т. е. переход от неисправности H_1 к неисправности H_2) никак не отразится на функциях, реализуемых схемами S_1 и S_2. В итоге получаем, что при H_1 и H_2 наборы функций, реализуемых схемами $S_1, \ldots, S_k$, совпадают, причём в обоих случаях неисправны, очевидно, не более k элементов; противоречие, так как при данных двух неисправностях множества неисправных элементов различны, а $\{S_1, \ldots, S_k\}$ — проверяющий тест. Лемма 7 доказана.

Рассмотрим схему S_i из числа $S_1, \ldots, S_k$ и элемент E из множества B, определяемые условиями леммы 7. Пусть s — наименьший номер входа элемента E, соединённый с выходом какого-то элемента E' из $B \setminus M$. Так как E — собирающий элемент в схеме S_i, существует элемент, отличный от E', выход которого соединён хотя бы с одним входом элемента E. Пусть t — наименьший номер входа элемента E, соединённый с выходом какого-то элемента E'', отличного от E'. Пусть M_i — множество, состоящее из выходных элементов схем $S_1, \ldots, S_{i-1}, S_{i+1}, \ldots, S_k$. Поскольку $E' \notin M$, то $E' \notin M_i$. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть $E \in M_i$. Рассмотрим две неисправности H_1 и H_2

системы элементов: H_1 заключается в неисправности типа 0 всех элементов из M_i, а H_2 заключается в неисправности типа 0 всех элементов из M_i и элемента E'. Так как $E' \notin M_i$, эти неисправности различны. Каждая из схем $S_1, \ldots, S_{i-1}, S_{i+1}, \ldots, S_k$ при H_1 и H_2 будет реализовывать одну и ту же функцию — тождественный нуль. В схеме же S_i элемент E' находится не ниже собирающего элемента E, откуда следует, что любая цепь, соединяющая E' с выходом S_i, проходит через E, но $E \in M_i$. Это означает, что при неисправности типа 0 всех элементов из M_i изменение состояния элемента E' с исправного на неисправность типа 0, т. е. переход от неисправности H_1 к неисправности H_2, никак не отразится на функции, реализуемой схемой S_i. Таким образом, при H_1 и H_2 наборы функций, реализуемых схемами $S_1, \ldots, S_k$, совпадают, причём в обоих случаях неисправны не более k элементов. При данных двух неисправностях множества неисправных элементов различны; противоречие, так как $\{S_1, \ldots, S_k\}$ — проверяющий тест.

Случай 2. Пусть $E \notin M_i$. Рассмотрим три подслучая.

Подслучай 2.1. Пусть $s \leqslant m$. Рассмотрим две неисправности H_1 и H_2 системы элементов: H_1 заключается в неисправности всех элементов из множества $M_i \cup \{E'\}$ типа $\sigma_s \oplus \overline{\delta}$, а H_2 заключается в неисправности всех элементов из множества M_i типа $\sigma_s \oplus \overline{\delta}$ и неисправности элемента E типа δ. Каждая из схем $S_1, \ldots, S_{i-1}, S_{i+1}, \ldots, S_k$ как при H_1, так и при H_2 будет реализовывать одну и ту же функцию — константу $\sigma_s \oplus \overline{\delta}$. Пусть $g_1, \ldots, g_n$ — функции, подаваемые в схеме S_i при неисправности H_1 на 1-й, ..., n-й входы элемента E соответственно. Тогда $g_t = \sigma_s \oplus \overline{\delta}$, так как s-й вход элемента E по построению соединён с выходом элемента E'. Отсюда и из (2)–(4) получаем, что функция, реализуемая на выходе E, при H_1 равна

$$\begin{aligned} f(g_1, \ldots, g_n) = g_1^{\sigma_1} \circ_\delta \ldots \circ_\delta g_{s-1}^{\sigma_{t-1}} \circ_\delta (\sigma_t \oplus \overline{\delta})^{\sigma_t} \circ_\delta g_{s+1}^{\sigma_{t+1}} \\ \circ_\delta \ldots \circ_\delta g_m^{\sigma_m} \circ_\delta (g_{m+1}^{\sigma_{m+1}} \circ_{\overline{\delta}} \ldots \circ_{\overline{\delta}} g_n^{\sigma_n}) = g_1^{\sigma_1} \circ_\delta \ldots \circ_\delta g_{s-1}^{\sigma_{t-1}} \\ \circ_\delta \delta \circ_\delta g_{s+1}^{\sigma_{t+1}} \circ_\delta \ldots \circ_\delta g_m^{\sigma_m} \circ_\delta (g_{m+1}^{\sigma_{m+1}} \circ_{\overline{\delta}} \ldots \circ_{\overline{\delta}} g_n^{\sigma_n}) = \delta, \end{aligned}$$

т. е. функции, реализуемой на выходе E при неисправности H_2. Тогда и функция, реализуемая схемой S_i, одинакова при H_1 и H_2, поскольку состояние всех элементов, находящихся в S_i ниже E, одинаково при этих двух неисправностях. Таким образом, при H_1 и H_2 наборы функций, реализуемых схемами $S_1, \ldots, S_k$, совпадают, причём в обоих случаях неисправны, очевидно, не более k элементов. При данных двух неисправностях множества неисправных элементов различны; противоречие, так как $\{S_1, \ldots, S_k\}$ — проверяющий тест.

Подслучай 2.2. Пусть $s \geqslant m+1$ и $t \leqslant m$. Рассмотрим две неисправности H_1 и H_2 системы элементов: H_1 заключается в неисправности всех элементов из множества $M_i \cup \{E''\}$ типа $\sigma_t \oplus \overline{\delta}$, а H_2 заключается в неисправности всех элементов из множества M_i типа $\sigma_t \oplus \overline{\delta}$ и неисправности элемента E типа δ. Рассуждая аналогично случаю 2.1, получаем, что набор схем $S_1, \ldots, S_k$ не может быть проверяющим тестом.

Подслучай 2.3. Пусть $s \geqslant m+1$ и $t \geqslant m+1$. Рассмотрим две неисправности H_1 и H_2 системы элементов: H_1 заключается в неисправности всех элементов из множества $M_i \cup \{E''\}$ типа $\sigma_t \oplus \delta$, а H_2 заключается в неисправности всех элементов из множества M_i типа $\sigma_t \oplus \delta$ и неисправности элемента E' типа $\sigma_s \oplus \delta$. Каждая из схем $S_1, \ldots, S_{i-1}, S_{i+1}, \ldots, S_k$ как при H_1, так и при H_2 будет реализовывать константу $\sigma_t \oplus \delta$. Пусть $g_1, \ldots, g_n$ — функции, подаваемые в схеме S_i при неисправности H_1 на 1-й, …, n-й входы элемента E соответственно. Согласно определению чисел s и t 1-й, $\ldots, m$-й входы элемента E не могут соединяться с выходами функциональных элементов. Отсюда $g_j = y_j$ для $j = 1, \ldots, m$, где $y_1, \ldots, y_m$ — некоторые входные переменные схемы S_i (часть из них может совпадать). Кроме того, $g_t = \sigma_t \oplus \delta$, так как t-й вход элемента E по построению соединён с выходом элемента E''. Отсюда и из (2)–(4) получаем, что на выходе элемента E при H_1 реализуется функция

$$
\begin{aligned}
f(g_1, \ldots, g_n) = y_1^{\sigma_1} \circ_\delta \ldots \circ_\delta y_m^{\sigma_m} \circ_\delta \bigl(g_{m+1}^{\sigma_{m+1}} \circ_{\overline{\delta}} \ldots \circ_{\overline{\delta}} g_{t-1}^{\sigma_{t-1}} \\
\circ_{\overline{\delta}} (\sigma_t \oplus \delta)^{\sigma_t} \circ_{\overline{\delta}} g_{t+1}^{\sigma_{t+1}} \circ_{\overline{\delta}} \ldots \circ_{\overline{\delta}} g_n^{\sigma_n}\bigr) = y_1^{\sigma_1} \circ_\delta \ldots \circ_\delta y_m^{\sigma_m} \circ_\delta \bigl(g_{m+1}^{\sigma_{m+1}} \\
\circ_{\overline{\delta}} \ldots \circ_{\overline{\delta}} g_{t-1}^{\sigma_{t-1}} \circ_{\overline{\delta}} \overline{\delta} \circ_{\overline{\delta}} g_{t+1}^{\sigma_{t+1}} \circ_{\overline{\delta}} \ldots \circ_{\overline{\delta}} g_n^{\sigma_n}\bigr) = y_1^{\sigma_1} \circ_\delta \ldots \circ_\delta y_m^{\sigma_m} \circ_\delta \overline{\delta}.
\end{aligned}
$$

Пусть теперь $h_1, \ldots, h_n$ — функции, подаваемые в S_i при неисправности H_2 на 1-й, $\ldots, n$-й входы элемента E соответственно. Аналогично случаю неисправности H_1 получаем, что $h_j = y_j$ для $j = 1, \ldots, m$, $h_s = \sigma_s \oplus \delta$. Отсюда и из (2)–(4) получаем, что на выходе элемента E при H_2 реализуется функция

$$
\begin{aligned}
f(h_1, \ldots, h_n) = y_1^{\sigma_1} \circ_\delta \ldots \circ_\delta y_m^{\sigma_m} \circ_\delta \bigl(h_{m+1}^{\sigma_{m+1}} \circ_{\overline{\delta}} \ldots \circ_{\overline{\delta}} h_{s-1}^{\sigma_{s-1}} \\
\circ_{\overline{\delta}} (\sigma_s \oplus \delta)^{\sigma_s} \circ_{\overline{\delta}} h_{s+1}^{\sigma_{s+1}} \circ_{\overline{\delta}} \ldots \circ_{\overline{\delta}} h_n^{\sigma_n}\bigr) = y_1^{\sigma_1} \circ_\delta \ldots \circ_\delta y_m^{\sigma_m} \circ_\delta \bigl(h_{m+1}^{\sigma_{m+1}} \\
\circ_{\overline{\delta}} \ldots \circ_{\overline{\delta}} h_{s-1}^{\sigma_{s-1}} \circ_{\overline{\delta}} \overline{\delta} \circ_{\overline{\delta}} h_{s+1}^{\sigma_{s+1}} \circ_{\overline{\delta}} \ldots \circ_{\overline{\delta}} h_n^{\sigma_n}\bigr) = y_1^{\sigma_1} \circ_\delta \ldots \circ_\delta y_m^{\sigma_m} \circ_\delta \overline{\delta},
\end{aligned}
$$

равная функции, реализуемой на выходе E при неисправности H_1. Тогда и функция, реализуемая схемой S_i, одинакова при H_1 и H_2, так как состояния всех элементов, находящихся в S_i ниже E, одинаковы при этих двух неисправностях. Таким образом, при H_1 и H_2 наборы функций, реализуемых схемами $S_1, \ldots, S_k$, совпадают, причём в обоих случаях неисправны, очевидно, не более k элементов. Осталось заметить, что при данных двух неисправностях множества неисправных элементов различны; противоречие, так как $\{S_1, \ldots, S_k\}$ — проверяющий тест.

Во всех случаях получено противоречие, откуда следует, что $L_c(f, N, k) \geqslant k + 1$. Теорема 3 доказана.

Из теорем 1–3 для функций f вида $x_{s_1}^{\sigma_1} \& \ldots \& x_{s_m}^{\sigma_m} \& \big(x_{s_{m+1}}^{\sigma_{m+1}} \vee \ldots \vee x_{s_n}^{\sigma_n}\big)$ или $x_{s_1}^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_{s_m}^{\sigma_m} \vee \big(x_{s_{m+1}}^{\sigma_{m+1}} \& \ldots \& x_{s_n}^{\sigma_n}\big)$, где $n \geqslant 2$, $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \{0, 1\}$, $1 \leqslant m \leqslant n - 1$ и $s_1, \ldots, s_n$ — попарно различные индексы от 1 до n, следуют необходимые и достаточные условия того, что $L_c(f, N, k) = k$ и $L_d(f, N, k) = k$, а именно, $L_c(f, N, k) = k$ тогда и только тогда, когда либо $m \leqslant n - 2$ и $k \in \{1, 2, N - 1, N\}$, либо $m = n - 1$ и $k = N$; для равенства $L_d(f, N, k) = k$ необходимые и достаточные условия те же самые. Действительно, в силу теоремы 2 если $m \leqslant n - 2$ и $k \in \{1, 2, N - 1, N\}$, то $L_c(f, N, k) = L_d(f, N, k) = k$. Если $m = n - 1$ и $k = N$, то $L_c(f, N, k) = L_d(f, N, k) = k$ в силу теоремы 1 и того, что тривиальный диагностический (и проверяющий) тест имеет длину k. Если $m \leqslant n - 2$, но $k \notin \{1, 2, N - 1, N\}$, или если $m = n - 1$ и $k \leqslant N - 1$, то $L_c(f, N, k) \geqslant k + 1$ и $L_d(f, N, k) \geqslant k + 1$ в силу теоремы 3. Таким образом, для функций f специального вида получен критерий того, что $L_c(f, N, k) = k$ и $L_d(f, N, k) = k$.

В заключение автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Н. П. Редькину за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лупанов О. Б.** Асимптотические оценки сложности управляющих систем // М.: Изд-во МГУ, 1984. — 139 с.
2. **Редькин Н. П.** Надёжность и диагностика схем. — М.: Изд-во МГУ, 1992. — 191 с.

Попков Кирилл Андреевич,
e-mail: kirill-formulist@mail.ru

Статья поступила
18 декабря 2013 г.

Переработанный вариант —
2 июля 2014 г.