ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—февраль 2015. Том 22, № 1. С. 5–18

УДК 519.718

О ШИРОКОМ КЛАССЕ БАЗИСОВ С КОЭФФИЦИЕНТОМ НЕНАДЁЖНОСТИ, РАВНЫМ ЕДИНИЦЕ *)

А. В. Васин[1]
[1]Пензенский гос. университет,
ул. Красная, 40, 440026 Пенза, Россия
e-mail: alvarvasin@mail.ru

Аннотация. Рассматривается реализация булевых функций схемами из ненадёжных функциональных элементов в полном базисе B. Предполагается, что базисные элементы подвержены инверсным неисправностям на выходах и переходят в неисправные состояния независимо друг от друга с вероятностью $\varepsilon \in (0, 1/2)$. Найдено множество функций G, и доказано, что коэффициент ненадёжности базиса B, содержащего функции множества G, равен 1. Ил. 3, библиогр. 13.

Ключевые слова: ненадёжный функциональный элемент, асимптотически оптимальная по надёжности схема, инверсная неисправность на выходах элементов, синтез схем из ненадёжных элементов.

Рассматривается реализация булевых функций схемами (см., например, [2, 8]) из ненадёжных функциональных элементов в полном конечном базисе B. Считаем, что схема S из ненадёжных элементов реализует булеву функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если при поступлении на входы схемы S двоичного набора $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ при отсутствии неисправностей на выходе схемы появляется значение $f(\mathbf{a})$.

Впервые задачу синтеза надёжных схем из ненадёжных функциональных элементов рассматривал Нейман [9]. Он предполагал, что все элементы схемы независимо друг от друга с вероятностью $\varepsilon \in (0, 1/2)$ подвержены инверсным неисправностям на выходах. Эти неисправности характеризуются тем, что в исправном состоянии функциональный элемент реализует приписанную ему булеву функцию φ, а в неисправном — функцию $\overline{\varphi}$. С помощью итерационного метода Нейман установил, что

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 14–01–31360 и № 14–01–00273).

в произвольном полном конечном базисе любую булеву функцию можно реализовать схемой, вероятность ошибки на выходе которой при любом входном наборе значений переменных не превосходит $c_1\varepsilon$ (c_1 — некоторая константа, зависящая от базиса) при $\varepsilon \in (0, 1/6]$.

Схема из ненадёжных элементов характеризуется двумя важными параметрами — вероятностью ошибки на выходе схемы и сложностью схемы. Основной недостаток метода Неймана в том, что с ростом числа итераций сложность схем увеличивается экспоненциально (примерно в 3^k раз, где k — число итераций). Поэтому именно сложности уделялось главное внимание в дальнейших исследованиях (см., например, [10, 12, 13]).

В этой статье в отличие от упомянутых работ сложность схем не рассматривается, а в центре внимания будет максимальная вероятность ошибки на выходе схемы, которая реализует функцию наилучшим или «почти» наилучшим образом с точки зрения вероятности ошибки. В работе описаны базисы, коэффициент ненадёжности которых равен 1.

Введём необходимые определения и понятия.

Ненадёжностью $P(S)$ схемы S назовём максимальную вероятность ошибки на выходе схемы S при всевозможных входных наборах схемы. *Надёжность* схемы S равна $1 - P(S)$.

Пусть $P_\varepsilon(f) = \inf P(S)$, где инфимум берётся по всем схемам S из ненадёжных элементов, реализующим булеву функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Схема A из ненадёжных элементов, реализующая f, называется *асимптотически оптимальной* (*асимптотически наилучшей*) по надёжности, если $P(A) \sim P_\varepsilon(f)$ при $\varepsilon \to 0$, т. е. $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{P_\varepsilon(f)}{P(A)} = 1$.

Задача построения асимптотически оптимальных по надёжности схем в полных базисах из двухвходовых элементов исследовалась в [3] при условии, что элементы схемы подвержены однотипным константным неисправностям только на входах или только на выходах элементов, и в [13] при условии, что элементы схемы подвержены инверсным неисправностям на входах элементов.

Число k будем называть *коэффициентом ненадёжности базиса*, если все функции в этом базисе можно реализовать схемами с ненадёжностью асимптотически не больше $k\varepsilon$ ($\varepsilon \to 0$), и найдётся функция f, которую нельзя реализовать схемой с ненадёжностью асимптотически меньше $k\varepsilon$ ($\varepsilon \to 0$).

Обозначим через K (возможно, с нижними индексами) множество функций, для которых асимптотически оптимальные по надёжности схемы в базисе B функционируют с ненадёжностью, асимптотически равной $k\varepsilon$ ($\varepsilon \to 0$), где k — коэффициент ненадёжности базиса B.

Поясним, какие значения может принимать коэффициент ненадёжности базиса.

Нетрудно проверить, что при инверсных неисправностях на выходах элементов в любом базисе ненадёжность любой схемы, содержащей хотя бы один элемент не меньше ε. Поэтому коэффициент ненадёжности любого базиса не меньше 1.

Из [9] следует, что если базис содержит медиану (функцию голосования) $g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$, то его коэффициент ненадёжности равен 1.

Оказалось, что существуют и другие базисы (не содержащие медианы), коэффициент ненадёжности которых также равен 1 (некоторые из этих базисов укажем далее).

В [1] доказано, что в произвольном полном конечном базисе B любую функцию можно реализовать схемой S с ненадёжностью

$$P(S) \leqslant 5\varepsilon + d\varepsilon^2 \tag{1}$$

при любом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Здесь $d = 10584$, $\varepsilon_0 = 1/3600$. Из этого результата следует, что коэффициент ненадёжности любого полного конечного базиса не больше 5.

Позднее в [5] удалось ослабить ограничение на ε, а константу d уменьшить. Например, в качестве констант ε_0 и d можно взять $1/960$ и 182 соответственно. Далее этот результат сформулирован в виде теоремы.

Отрицательный ответ на вопрос о возможности снижения мультипликативной константы 5 в оценке ненадёжности (1) для базиса $\{x_1x_2, \overline{x}_1\}$ получен в [7]. Поэтому коэффициент ненадёжности любого базиса принимает значения из отрезка $[1, 5]$, т. е. $k \in [1, 5]$.

Пусть S — любая схема в произвольном полном базисе, и пусть S содержит $N \in \mathbb{N}$ элементов. Тогда, применяя формулу полной вероятности, ненадёжность $P(S)$ схемы S при всех $\varepsilon \in (0, 1/2)$ можно представить полиномом

$$P(S) = \sum_{i=1}^{N} c_i \varepsilon^i (1 - \varepsilon)^{n-i} \tag{2}$$

с целыми коэффициентами $c_1 \in \{1, 2, \ldots, N\}$, $c_i \in \left\{0, 1, \ldots, \frac{N!}{i!(N-i)!}\right\}$, $i = 2, 3, \ldots, N$.

Таким образом, верно

Утверждение 1. *Для любой схемы S, содержащей $N \geqslant 1$ элементов, найдётся натуральное число $c_1 \in \{1, 2, \ldots, N\}$ такое, что $P(S) \sim c_1\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$.*

Из утверждения 1 и условия $k \in [1,5]$ получаем, что $k \in \{1,2,3,4,5\}$.

Итак, если в полном конечном базисе B каждая булева функция f реализована асимптотически оптимальной по надёжности схемой S, функционирующей с ненадёжностью $P(S) \sim c_f\varepsilon$, $c_f \in \{1,2,3,4,5\}$, при $\varepsilon \to 0$, то число $k = \max\limits_{f\in P_2} c_f$ — коэффициент ненадёжности базиса B. Обозначим через K множество булевых функций f таких, что $c_f = k$.

Укажем некоторые базисы с коэффициентом ненадёжности 1.

Булевы функции f_1 и f_2 назовём *конгруэнтными*, если одна из них может быть получена из другой заменой переменных (без отождествления).

Пусть $D \subset P_2$. Через D^* обозначим множество булевых функций, двойственных функциям множества D.

Пусть G_1, G_2, G_3 — множества функций, зависящих от переменных x_1, x_2, x_3 и конгруэнтных функциям вида $x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2} \vee x_1^{\sigma_1}x_3^{\sigma_3} \vee x_2^{\sigma_2}x_3^{\sigma_3}$, $x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2} \oplus x_3^{\sigma_3}$, $x_1^{\sigma_1}x_2^{\overline{\sigma}_2} \vee x_2^{\sigma_2}x_3^{\sigma_3}$ соответственно ($\sigma_i \in \{0,1\},\ i \in \{1,2,3\}$). Нетрудно проверить, что $G_i^* = G_i$, $i = 1,2,3$.

Пусть G_4 — множество функций, зависящих от x_1, x_2, x_3, x_4 и конгруэнтных одной из функций вида $\left(x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2} \vee x_3^{\sigma_3}x_4^{\sigma_4}\right)^{\sigma_5}$ ($\sigma_i \in \{0,1\},\ i \in \{1,2,3,4,5\}$). Нетрудно проверить, что $G_4^* = G_4$.

В [1] доказано, что если $B \cap (G_1 \cup G_4) \neq \varnothing$, то коэффициент ненадёжности базиса B равен 1.

Пусть $B_i,\ i \geqslant 2,$ — множество всех булевых функций, зависящих от i переменных $x_1, \ldots, x_i$. Ясно, что $\{\overline{x}_1, x_1, 0, 1\} \subset B_2 \subset B_3 \subset B_4$.

Доказано [5, 7], что полный базис $B \subseteq B_3$ имеет коэффициент ненадёжности 1 тогда и только тогда, когда $B \cap (G_1 \cup G_2 \cup G_3) \neq \varnothing$. Другими словами, множество $G_1 \cup G_2 \cup G_3$ является критериальным, если нужно выяснить, равен ли 1 коэффициент ненадёжности базиса $B \subseteq B_3$.

Известно также [4], что множество G_4 таким свойством не обладает, т. е. среди полных базисов $B \subseteq B_4 \backslash (G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4)$ есть базисы с коэффициентом ненадёжности 1.

Пусть $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}$ — некоторые двоичные наборы длины k. Обозначим через $\rho\,(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta})$ расстояние Хэмминга между ними, равное $\rho\,(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = \sum\limits_{i=1}^{k} |\alpha_i - \beta_i|$.

Пусть булева функция $m(x_1, \ldots, x_k)$, $k \geqslant 3$, имеет следующие свойства:

(i) существуют наборы $\widetilde{\sigma}_0, \widetilde{\sigma}_1$ такие, что $3 \leqslant \rho(\widetilde{\sigma}_0, \widetilde{\sigma}_1) = \rho \leqslant k$,

(ii) для любого набора $\widetilde{x}$ такого, что $\rho\,(\widetilde{x}, \widetilde{\sigma}_0) \leqslant 1$, верно $m(\widetilde{x}) = 0$,

(iii) для любого набора $\widetilde{x}$ такого, что $\rho\,(\widetilde{x}, \widetilde{\sigma}_1) \leqslant 1$, верно $m(\widetilde{x}) = 1$.

Обозначим через $M_k(\rho)$ класс функций с названным свойством. Наборы $\widetilde{\sigma}_0$ и $\widetilde{\sigma}_1$ назовём характеристическими, как это сделано в [4]. Положим $M_k = \bigcup\limits_{\rho=3}^{k} M_k(\rho)$, $M = \bigcup\limits_{k=3}^{\infty} M_k$.

В [4] доказано, что при наличии в базисе функций из множества M коэффициент ненадёжности базиса равен 1.

В этой статье найдено множество функций $G \supset \bigcup\limits_{i=1}^{4} G_i \cup M$, при наличии которых в базисе B коэффициент ненадёжности базиса B равен 1.

Чтобы сформулировать полученный результат в виде теоремы, введём ещё некоторые обозначения и множества.

Пусть X — произвольное множество функций, зависящих от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $\mathrm{Congr}(X)$ — множество всех функций, зависящих от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, каждая из которых конгруэнтна некоторой функции множества X.

Напомним, что B — произвольный полный конечный базис.

В качестве исходных схем, надёжность которых будем повышать с помощью итерационного метода, будем использовать схемы из теоремы 1.

Теорема 1 [5]. *В произвольном полном конечном базисе B любую функцию f можно реализовать такой схемой A, что*

$$P(A) \leqslant 5\varepsilon + 182\varepsilon^2 \leqslant 5,2\varepsilon$$

при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$.

Опишем множество G функций $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, которые будем использовать для повышения надёжности схем.

Пусть $\widehat{e}_1, \widehat{e}_2, \ldots, \widehat{e}_k \in \{0,1\}^k$, где $\widehat{e}_i$ — вектор, имеющий ровно одну ненулевую компоненту на i-м месте, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Пусть $r \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Обозначим через E^r множество из k векторов $\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2, \ldots, \widetilde{e}_k \in \{0,1\}^k$ такое, что

(i) $\widetilde{e}_i = \widehat{e}_i$, $i = 1, 2, \ \ldots, r$,

(ii) $\widetilde{e}_i = \widehat{e}_i + \sum\limits_{j=1}^{i-1} \lambda_{ij} \widehat{e}_j$, где $\lambda_{ij} \in \{0,1\}$ — произвольные коэффициенты, $i = r+1, r+2, \ \ldots, k$.

Пусть существуют двоичные наборы $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in \{0,1\}^k$ такие, что

1) $\varphi(\widetilde{\alpha}) = 0$, $\varphi(\widetilde{\beta}) = 1$;

2) для любого набора $\widetilde{y}$ такого, что $\widetilde{y} = \widetilde{\alpha} + \widetilde{e}_i$, $\widetilde{e}_i \in E^r$, $\widetilde{e}_i \in E^r$, $i = 1, 2, \ldots, k$, верно $\varphi(\widetilde{y}) = 0$;

3) для любого набора $\widetilde{y}$ такого, что $\widetilde{y} = \widetilde{\beta} + \widetilde{e}_i$, $\widetilde{e}_i \in E^r$, $i = 1, 2, \ldots, k$, верно $\varphi(\widetilde{y}) = 1$;

4) $A \cap B = \varnothing$, где $A = \{\widetilde{\alpha}\} \cup \{\widetilde{y} \mid \widetilde{y} = \widetilde{\alpha} + \widetilde{e}_i,\ i = 1, 2, \ldots, k\}$, $B = \{\widetilde{\beta}\} \cup \{\widetilde{y} \mid \widetilde{y} = \widetilde{\beta} + \widetilde{e}_i,\ i = 1, 2, \ldots, k\}$.

Пусть G' — множество всевозможных функций φ, G'' — множество функций, конгруэнтных функциям G', т. е. $G'' = \mathrm{Congr}(G')$, а G — множество функций G'', а также функций, из которых отождествлением переменных можно получить одну из функций множества G''.

Обозначим через $m(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ булеву функцию из M_k с характеристическими наборами $\widetilde{\sigma}_0 = (0, 0, \ldots, 0)$, $\widetilde{\sigma}_1 = (1, 1, \ldots, 1)$.

Лемма 1. *Пусть в базисе B любую функцию можно реализовать схемой с ненадёжностью не больше $p < 1/2$ и B содержит хотя бы одну функцию $\varphi \in G$. Тогда можно построить схему S_m, реализующую функцию $m(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ с ненадёжностью $P(S_m) \leqslant kp + \varepsilon$, такую, что вероятности ошибок ν^1 и ν^0 схемы S_m на наборах $\widetilde{\sigma}_0$ и $\widetilde{\sigma}_1$ не превосходят величины $\varepsilon + p^2(4(3/2)^k)$.*

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что φ в точности удовлетворяет условиям 1–4, так как переименованием и отождествлением переменных можно добиться требуемого соответствия.

Пусть схема S_m реализует функцию $m(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ из M_k. Схему S_m построим, как показано на рис. 1. Выделим в схеме S_m выходной элемент. Обозначим его через E. Будем считать, что элементу E приписана функция $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_k)$.

Схему S_E построим в зависимости от значения r, как показано на рис. 2.

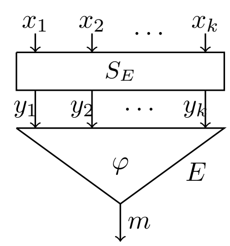

Рис. 1. Схема S_m

Выходы схем $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_r$ являются выходами схемы S_E. Выходы схем $\Sigma_{r+1}, \Sigma_{r+2}, \ldots, \Sigma_k$ соединяются со входами (возможно фиктивно) всех схем Σ_i, имеющих меньший индекс, а также являются выходами всей схемы S_E.

Схемы $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_k$ подбираются так, что

(i) при поступлении на входы схемы S_E наборов $\widetilde{\sigma}_0$ и $\widetilde{\sigma}_1$ и отсутствии неисправностей на выходе схемы появляются наборы $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ соответственно;

(ii) при поступлении на входы схемы S_E наборов $\widetilde{\sigma}_0 + \widehat{e}_i$ и $\widetilde{\sigma}_1 + \widehat{e}_i$ и отсутствии неисправностей на выходе схемы S_E появляются наборы $\widetilde{\alpha} + \widetilde{e}_i$ и $\widetilde{\beta} + \widetilde{e}_i$ соответственно, $i = 1, 2, \ldots, k$;

(iii) при поступлении на входы схемы S_E наборов $\widetilde{\sigma}_0$ и $\widetilde{\sigma}_1$ в случае появления ошибочного значения на выходе схемы Σ_i на выходе схемы S_E появляются наборы $\widetilde{\beta} + \widetilde{e}_i$ и $\widetilde{\alpha} + \widetilde{e}_i$ соответственно, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Оценим ненадёжность схемы S_m и вероятности ошибок ν^1 и ν^0. По условию леммы любую функцию можно реализовать с ненадёжностью не больше p, тем самым $P(\Sigma_i) \leqslant p$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Тогда $P(S_m) \leqslant kp + \varepsilon$.

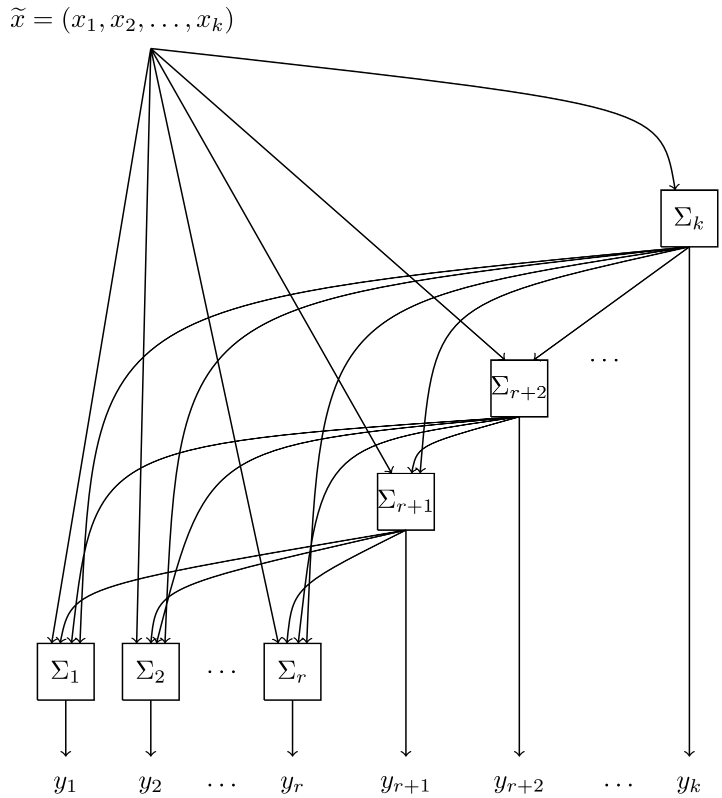

Рис. 2. Схема S_E

Из построения схемы видно, что при поступлении на входы схемы S_m набора $\widetilde{\sigma}_0$ в случае ошибки ровно одной из схем $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_k$ на выходе схемы S_m появится верное значение 0. Поэтому

$$\nu^1 \leqslant \varepsilon + kp\varepsilon + \sum_{i=2}^{k} \binom{k}{i} p^i \leqslant \varepsilon + k\varepsilon p + p^2(4\,(3/2)^k - 2k - 4)$$

$$\leqslant \varepsilon + p^2(4(3/2)^k - k - 4) \leqslant \varepsilon + 4(3/2)^k p^2.$$

Аналогично выводится оценка $\nu^0 \leqslant \varepsilon + 4(3/2)^k p^2$. Лемма 1 доказана.

Для повышения надёжности исходных схем и получения верхних оценок ненадёжности будем использовать теорему 2.

Теорема 2. *Пусть любую функцию f в базисе B можно реализовать схемой с ненадёжностью не больше $p \leqslant 1/2$. Пусть функция $m(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in M_k$ имеет характеристические наборы $\widetilde{\sigma}_0 = (0, 0, \ldots, 0)$ и $\widetilde{\sigma}_1 = (1, 1, \ldots, 1)$. Пусть схема S_m реализует функцию $m(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ с ненадёжностью $P(S_m)$, причём ν^1 и ν^0 — вероятности ошибок схемы S_m на наборах $\widetilde{\sigma}_0$ и $\widetilde{\sigma}_1$ соответственно. Тогда функцию f можно реализовать схемой $\chi(S)$ такой, что*

$$P(\chi(S)) \leqslant \max\{\nu^0, \nu^1\} + kpP(S_m) + 4\,(3/2)^k\,p^2.$$

Доказательство. Пусть функция f в базисе B реализована схемой S такой, что $P(S) \leqslant p$. Теперь построим схему $\chi(S)$. Для построения схемы $\chi(S)$ возьмём один экземпляр схемы S_m и k экземпляров схемы S. Соединим i-й вход схемы S_m с выходом i-го экземпляра схемы S так, как показано на рис. 3, $i = 1, 2, \ldots, k$. Нетрудно видеть, что построенная схема $\chi(S)$ реализует функцию f.

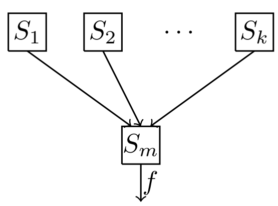

Рис. 3. Схема $\chi_i(S)$

Оценим ненадёжность схемы $\chi(S)$. Если все схемы S работают без ошибок, то на вход схемы S_m поступит один из наборов $\widetilde{\sigma}_0 = (0, 0, \ldots, 0)$, $\widetilde{\sigma}_1 = (1, 1, \ldots, 1)$. Следовательно, в этом случае ошибка на выходе всей схемы появится только при ошибке схемы S_m с вероятностью не больше $\max\{\nu^0, \nu^1\}$. При ошибке ровно одной из схем S на выходе схемы $\chi(S)$ неверное значение появится с вероятностью не больше $kpP(S_m)$. Будем считать, что при ошибке двух и более схем S на выходе схемы $\chi(S)$ появится ошибочное значение, так что

$$\begin{aligned} P(\chi(S)) &\leqslant \max\{\nu^0, \nu^1\} + kpP(S_m) + \sum_{i=2}^{k} \binom{k}{i} p^i \\ &\leqslant \max\{\nu^0, \nu^1\} + kpP(S_m) + p^2((p+1)^k p^{-2} - kp^{-1} - p^{-2}) \\ &\leqslant \max\{\nu^0, \nu^1\} + kpP(S_m) + p^2((1/2+1)^k (1/2)^{-2} - k(1/2)^{-1} - (1/2)^{-2}) \\ &\leqslant \max\{\nu^0, \nu^1\} + kpP(S_m) + p^2(4(3/2)^k - 2k - 4) \\ &\leqslant \max\{\nu^0, \nu^1\} + kpP(S_m) + 4(3/2)^k p^2. \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

Надёжные схемы будем строить при помощи теоремы 3. Она даёт верхнюю оценку ненадёжности схем в рассматриваемых базисах. Однако её доказательство выполнено конструктивно и даёт метод построения надёжных схем.

Докажем теорему 3 с использованием теоремы 2 и леммы 1.

Теорема 3. *Пусть полный базис B содержит функцию $\varphi \in G$. Тогда любую функцию f в B можно реализовать схемой A с ненадёжностью*

$$P(A) \leqslant \varepsilon + 1,1(8(3/2)^k + k(k+1))\varepsilon^2$$

при любом $\varepsilon \in (0, \min\{1/960, 1/(28(8(3/2)^k + k(k+1)))\}]$.

Доказательство. Пусть f — произвольная булева функция. Искомую схему A, реализующую булеву функцию f, построим в 4 этапа.

Этап 1. По теореме 1 произвольную функцию f можно реализовать схемой S такой, что $P(S) \leqslant p = 5,2\varepsilon$. По лемме 1, используя функциональный элемент, реализующий функцию $\varphi \in G$, построим схему S_m^1, реализующую функцию $m(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, для которой $P(S_m^1) \leqslant kp + \varepsilon$, а вероятности ошибок ν^1 и ν^0 удовлетворяют неравенствам $\nu^1, \nu^0 \leqslant \varepsilon + 4(3/2)^k p^2$. Схему S_m^1 используем для повышения надёжности исходных схем. Возьмём k экземпляров схемы S, один экземпляр схемы S_m^1 и построим схему $\chi_1(S)$, реализующую функцию f. По теореме 2 ненадёжность схемы $\chi_1(S)$ удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} P(\chi_1(S)) &\leqslant \max\{\nu^0, \nu^1\} + kpP(S_m) + 4(3/2)^k p^2 \\ &\leqslant \varepsilon + kp(kp+\varepsilon) + 8(3/2)^k p^2 \leqslant \varepsilon + 27{,}04(8(3/2)^k + k(k+1))\varepsilon^2 \leqslant 2\varepsilon \end{aligned}$$

при $\varepsilon \in (0, \min\{1/960, 1/(28(8(3/2)^k + k(k+1)))\}]$.

Этап 2. Поскольку булеву функцию f можно реализовать схемой с ненадёжностью не больше 2ε при $\varepsilon \in (0, \min\{1/960, 1/(28(8(3/2)^k + k(k+1)))\}]$, по лемме 1 можно построить схему S_m^2, реализующую функцию $m(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, для которой $P(S_m^2) \leqslant \varepsilon + k \cdot 2\varepsilon^2$, а вероятности ошибок ν^1 и ν^0 удовлетворяют неравенствам $\nu^1, \nu^0 \leqslant \varepsilon + 4(3/2)^k(2\varepsilon)^2$. Реализуем функцию f схемой S, для которой $P(S) \leqslant 2\varepsilon$. Возьмём k экземпляров схемы S, один экземпляр схемы S_m^2 и по теореме 2 построим схему $\chi_2(S)$, реализующую функцию f, для которой

$$\begin{aligned} P(\chi_2(S)) &\leqslant \varepsilon + (8(3/2)^k + k(k+1))(2\varepsilon)^2 \\ &\leqslant \varepsilon + 4(8(3/2)^k + k(k+1))\varepsilon^2 \leqslant 1{,}143\varepsilon \end{aligned}$$

при $\varepsilon \in (0, \min\{1/960, 1/(28(8(3/2)^k + k(k+1)))\}]$.

Этап 3. Поскольку произвольную булеву функцию f можно реализовать схемой с ненадёжностью не больше $1{,}143\varepsilon$, действуя аналогично первым двум этапам, построим схему S_m^3, реализующую функцию

$m(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, для которой $P\big(S_m^3\big) \leqslant \varepsilon + k \cdot 1{,}143\varepsilon$, а вероятности ошибок ν^1 и ν^0 удовлетворяют неравенствам $\nu^1, \nu^0 \leqslant \varepsilon + 4(3/2)^k(1,143\varepsilon)^2$. Реализуем функцию f схемой S, для которой $P(S) \leqslant 1{,}143\varepsilon$. Возьмём k экземпляров схемы S, один экземпляр схемы S_m^3 и построим схему $\chi_3(S)$, реализующую функцию f, для которой

$$\begin{aligned} P(\chi_3(S)) &\leqslant \varepsilon + (8(3/2)^k + k(k+1))(1{,}143\varepsilon)^2 \\ &\leqslant \varepsilon + 1,143^2(8(3/2)^k + k(k+1))\varepsilon^2 \leqslant 1{,}046\varepsilon \end{aligned}$$

при $\varepsilon \in (0, \min\{1/960, 1/(28(8(3/2)^k + k(k+1)))\}]$.

Этап 4. Выполним ещё одну итерацию. Поскольку произвольную булеву функцию f можно реализовать схемой с ненадёжностью не больше $1{,}046\varepsilon$, действуя аналогично предыдущим этапам, построим схему S_m^4, реализующую $m(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, такую, что $P\big(S_m^4\big) \leqslant \varepsilon + 1{,}046k\varepsilon$, а вероятности ошибок ν^1 и ν^0 удовлетворяют неравенствам ν^1, $\nu^0 \leqslant \varepsilon + 4(3/2)^k(1{,}046\varepsilon)^2$. Реализуем функцию f схемой S, для которой $P(S) \leqslant 1{,}046\varepsilon$. Возьмём k экземпляров схемы S, один экземпляр схемы S_m^4 и построим схему $\chi_4(S)$, реализующую функцию f, для которой

$$P(\chi_4(S)) \leqslant \varepsilon + (8(3/2)^k + k(k+1))(1{,}046\varepsilon)^2 \leqslant \varepsilon + 1{,}1(8(3/2)^k + k(k+1))\varepsilon^2$$

при $\varepsilon \in (0, \min\{1/960, 1/(28(8(3/2)^k + k(k+1)))\}]$; $A = \chi_4(S)$ — искомая схема. Теорема 3 доказана.

Замечание. Повышение надёжности исходной схемы в теореме 3 происходит итерационно. Если говорить об асимптотических оценках, то при построении надёжной схемы достаточно ограничиться первым этапом доказательства. Однако для реальных схем ненадёжность элементов не стремится к нулю и слагаемые ε и $27{,}04(8(3/2)^k + k(k+1))\varepsilon^2$ при указанных ограничениях $\varepsilon \in (0, \min\{1/960, 1/(28(8(3/2)^k + k(k+1)))\}]$ в оценке вероятности ошибки на первом этапе сравнимы по порядку. Чтобы выделить главный член в оценке ненадёжности, проведено ещё несколько итераций. Итерационный процесс завершен на четвёртом этапе, так как из оценок ненадёжности видно, что вероятности ошибок после выполнения итерации уменьшились незначительно, т. е. итерационный процесс с использованием схемы $\chi(S)$ начинает стабилизироваться, значит, на следующих итерациях существенных изменений в оценках вероятностей ошибок не будет.

Обозначим множество функций, зависящих не более чем от n переменных, отличных от тождественных, через $K(n)$, $K = \lim\limits_{n\to\infty} K(n)$. Любая схема S, реализующая функцию $f \in K$, содержит хотя бы один функциональный элемент, поэтому ее ненадёжность удовлетворяет неравенству $P(S) \geqslant \varepsilon$ при любом $\varepsilon \in (0, 1/2)$.

Следовательно, если произвольный полный базис B содержит хотя бы один функциональный элемент, реализующий функцию из множества G, то для почти всех функций (так как $\lim\limits_{n\to\infty} |K(n)|/2^{2^n} = 1$) асимптотически оптимальные по надёжности схемы S функционируют с ненадёжностью $P(S) \sim \varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$.

Таким образом справедлива

Теорема 4. *Если полный базис B содержит функцию $\varphi \in G$, то коэффициент ненадёжности базиса B равен* 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Аксёнов С. И.** О надёжности схем над произвольной полной системой функций при инверсных неисправностях на выходах элементов // Изв. вузов. Поволж. регион. Естеств. науки. 2005. №6. С. 42–55.
2. **Алексеев В. Б.** Лекции по дискретной математике. М.: Изд. отдел ф-та ВМиК МГУ, 2004. 76 с.
3. **Алёхина М. А.** Синтез асимптотически оптимальных по надёжности схем из ненадёжных элементов. Пенза: Инф.-издат. центр ПГУ, 2006. 156 с.
4. **Алёхина М. А., Аксёнов С. И., Васин А. В.** О функциях и схемах, применяемых для повышения надёжности схем // Изв. вузов. Поволж. регион. Физ.-мат. науки. 2008. №3. С. 30–38.
5. **Алехина М. А., Васин А. В.** О надежности схем в базисах, содержащих функции не более чем трех переменных // Уч. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2009. Т. 151, кн. 2. С. 25–35.
6. **Васин А. В.** О функциях специального вида // Тр. VIII Междунар. конф. «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Лесной городок, Моск. обл., 6–9 апреля 2009 г.). М.: МАКС Пресс, 2009. С. 43–46.
7. **Васин А. В.** Об асимптотически оптимальных схемах в базисе $\{\&, \neg\}$ при инверсных неисправностях на выходах элементов // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2009. Т. 16, №6. С. 12–22.
8. **Лупанов О. Б.** Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1984. 138 с.
9. **Нейман Дж.** Автоматы. М.: Изд-во иностр. лит., 1956. С. 68–139.
10. **Ортюков С. И.** Об избыточности реализации булевых функций схемами из ненадёжных элементов // Тр. семинара по дискретной математике и её приложениям (Москва, 27–29 января 1987 г.). М.: Изд-во МГУ, 1989. С. 166–168.
11. **Чугунова В. В.** Синтез асимптотически оптимальных по надёжности схем при инверсных неисправностях на входах элементов // Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.09. Пенза, 2007. 110 с.

12. **Яблонский С.** Асимптотически наилучший метод синтеза надежных схем из ненадежных элементов // Banach Center Publ. 1982. Vol. 7. P. 11–19.
13. **Uhlig D.** Reliable networks from unreliable gates with almost minimal comlexity // Fundamentals of Computation Theory. Proc. Int. Conf. FCT'87 (Kazan, June, 1987). Berlin: Springer-Verl., 1987. P. 462–469. (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 278).

Алексей Валерьевич Васин

Статья поступила
27 декабря 2013 г.

Исправленный вариант —
24 апреля 2014 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
January–February 2015. Volume 22, No. 1. P. 5–18

UDC 519.718

ON A WIDE CLASS OF BASES WITH UNRELIABILITY COEFFICIENT EQUAL TO ONE

A. V. Vasin[1]
[1]Penza State University,
40 Krasnaya St., 440026 Penza, Russia
e-mail: alvarvasin@mail.ru

Abstract. We consider a realization of Boolean functions by circuits composed of unreliable functional elements in some complete finite basis B. We assume that all elements are subjected independently of each other to inverse failures on the output with probability $\varepsilon \in (0, 1/2)$. We find a set of functions G and prove that the unreliability coefficient of the basis B which contains functions of G equals 1. Ill. 3, bibliogr. 13.

Keywords: unreliable functional element, circuit asymptotically optimal with respect to reliability, inverse failure on outputs of elements, synthesis of circuits composed of unreliable elements.

REFERENCES

1. **S. I. Aksenov**, On reliability of circuits over an arbitrary complete system of functions under inverse failures at the element outputs, *Izv. VUZ. Povolzh. Reg., Ser. Estestv. Nauki,* No. 6, 42–55, 2005.

2. **V. B. Alekseev**, *Lektsii po diskretnoi matematike* (Lectures on Discrete Mathematics), Izdatel'skii Otd. Fak. VMiK MGU, Moscow, 2004.
3. **M. A. Alekhina**, *Sintez asimptoticheski optimal'nykh po nadezhnosti skhem iz nenadezhnykh elementov* (Synthesis of Asymptotically Optimal Reliable Circuits from Unreliable Elements), Inf.-Izdatel'skii Tsentr PGU, Penza, 2006.
4. **M. A. Alekhina, S. I. Aksenov**, and **A. V. Vasin**, On functions and circuits used to improve reliability of circuits, *Izv. VUZ. Povolzh. Reg., Ser. Fiz.-Mat. Nauki,* No. 3, 30–38, 2008.
5. **M. A. Alekhina** and **A. V. Vasin**, On reliability of combinatorial circuits in bases containing functions with at most three variables, *Uch. Zap. Kazan. Gos. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki,* **151**, No. 2, 25–35, 2009.
6. **A. V. Vasin**, On functions of a special form, in *Trudy VIII Mezhdunarodnoi konf. "Diskretnye modeli v teorii upravlyayushchikh sistem"* (Proc. VIII Int. Conferentsii "Discrete Models in the Theory of Control Systems"), *Lesnoi gorodok, Moscow Reg., Russia, Apr. 6–9, 2009,* pp. 43–46, MAKS Press, Moscow, 2009.
7. **A. V. Vasin**, On asymptotically optimal circuits in the base $\{\&, \neg\}$ under inverse failures at the element outputs, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **16**, No. 6, 12–22, 2009.
8. **O. B. Lupanov**, *Asimptoticheskie otsenki slozhnosti upravlyayushchikh sistem* (Asymptotic Bounds on Complexity of Control Systems), Izdatel'stvo MGU, Moscow, 1984.
9. **J. von Neumann**, Probabilistic logics and the synthesis of reliable organisms from unreliable components, in C. E. Shannon and J. McCarthy, eds., *Automata Studies,* pp. 43–98, Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1956. Translated in *Avtomaty,* pp. 68–139, Izdatel'stvo Inostrannoy Literatury, Moscow, 1956.
10. **S. I. Ortyukov**, On redundancy of Boolean function realization with circuits of unreliable elements, in *Trudy seminara po diskretnoi matematike i ee prilozheniyam* (Proc. Seminar on Discrete Mathematics and its Applications.) *Moscow, Russia, Jan. 27–29, 1987,* pp. 166–168, Izdatel'stvo MGU, Moscow, 1989.
11. **V. V. Chugunova**, Synthesis of asymptotically optimal reliable circuits under inverse failures at the element outputs, *Cand. Sci. Dissertation,* Penz. Gos. Univ., Penza, 2007.
12. **S. V. Yablonskii**, Asymptotically best method for synthesis of reliable circuits from unreliable elements, in J. L. Kulikowski, M. Michalewicz, S. V. Yablonskii, and Yu. I. Zhuravlev, eds., *Discrete Mathematics,* pp. 11–19, Instytut Matematyczny PAN, Warsaw, 1982 (Banach Cent. Publ., Vol. 7).

13. **D. Uhlig**, Reliable networks from unreliable gates with almost minimal complexity, *Fundamentals of Computation Theory (Proc. Int. Conf. FCT'*87*, Kazan, USSR, June* 22–26, 1987*),* 462–469, Springer-Verl., Berlin, 1987 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 278).

Alexey V. Vasin

Received
27 December 2013
Revised
24 April 2014