ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—февраль 2015. Том 22, № 1. С. 19–31

УДК 519.176

ОБ ОДНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ГРАФОВ $^{*)}$

А. Б. Дайняк[1], *А. Д. Курносов*[1]
[1]Московский физико-технический институт,
Институтский пер., 9, 141700 Долгопрудный, Россия
e-mail: dainiak@phystech.edu, kurnosov@phystech.edu

Аннотация. Рассматривается задача построения графа, имеющего заданное количество независимых множеств. Получены оценки на количество вершин в двудольных графах с предписанным числом независимых множеств и числом максимальных по включению независимых множеств. Ил. 3, библиогр. 13.

Ключевые слова: обратная задача, независимое множество, двудольный граф.

Введение

Значительное место в теории графов занимают задачи, связанные с оценкой различных инвариантов графа, например, степени связности, обхвата, хроматического числа, кликового числа, количества независимых множеств и др. Во многих случаях интерес представляет и обратная задача: найти граф (если он существует), заданный инвариант которого принимает заданное значение. Классическим примером является задача определения для заданного набора целых неотрицательных чисел, соответствует ли этот набор степеням вершин некоторого графа [2, 3]. Долгое время оставалась нерешённой задача о конечности множества чисел, не являющихся винеровскими индексами деревьев [5, 6]. Аналогичная задача о числе независимых множеств в деревьях, поставленная в [4], не решена до сих пор, в то время как некоторые другие параметры деревьев успешно изучались с этой точки зрения (см., например, [1]).

Под графами везде далее по умолчанию понимаем неориентированные графы без петель и кратных рёбер.

Приведём общие постановки задач, рассматриваемых в настоящей работе. Пусть $\mathcal{G}$ — класс графов, а $\varphi : \mathcal{G} \to S$ и $\psi : \mathcal{G} \to T$ — заданные

$^{*)}$Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 13–01–00958–а).

на этом классе функционалы. *Обратная задача существования* для пары $(\mathcal{G}, \varphi)$ ставится следующим образом: *для каких $s \in S$ найдётся граф $G \in \mathcal{G}$ такой, что $\varphi(G) = s$?*

Пусть S — множество всех значений, принимаемых некоторым функционалом ψ на произвольных графах. Если $S \subseteq \mathbb{N}$, то будем говорить, что класс графов $\mathcal{G}$ *сильно φ-полный*, если для каждого $s \in S$ найдётся граф $G \in \mathcal{G}$ такой, что $\varphi(G) = s$. Если такой граф $G \in \mathcal{G}$ найдётся для всех достаточно больших $s \in S$, то класс $\mathcal{G}$ назовём *слабо φ-полным*, или просто *φ-полным*. Если $\varphi(G) = s$, то будем говорить, что число s *реализуется* графом G.

Если существование соответствующих графов установлено, то имеет смысл *задача минимизации* для тройки $(\mathcal{G}, \varphi, \psi)$: *для заданного $s \in S$ найти величину $L^{\mathcal{G}}_{\varphi,\psi}(s) = \inf\{\psi(G) \mid G \in \mathcal{G}, \varphi(G) = s\}$.* Нас будет интересовать в первую очередь асимптотика функции $L^{\mathcal{G}}_{\varphi,\psi}(s)$ для φ-полных классов графов. Если $\mathcal{G}$ — класс всех графов, то вместо $L^{\mathcal{G}}_{\varphi,\psi}(s)$ будем писать $L_{\varphi,\psi}(s)$.

Через $\iota(G)$ будем обозначать число независимых множеств (н. м.) в графе G, через $\iota_m(G)$ — количество максимальных по включению независимых множеств (м. н. м.) в G, а через $\iota_M(G)$ — количество максимальных по мощности независимых множеств. Через $\nu(G)$ и $\varepsilon(G)$ обозначим число вершин и рёбер в G соответственно. Класс всех двудольных графов обозначим через $\mathcal{B}$. Через K_r и P_r будем обозначать полные графы и цепи на r вершинах соответственно. Через $K_{r,s}$ обозначим полный двудольный граф с мощностями долей r и s. Через $K'_{r,r}$ обозначается *граф-корона*, получающийся отбрасыванием рёбер совершенного паросочетания из полного двудольного графа $K_{r,r}$. Множества вершин и рёбер произвольного графа G будем обозначать через V_G и E_G соответственно. Ребро графа, соединяющее вершины u и v, будем обозначать через uv. Семейство всех м. н. м. графа G обозначим через $\mathcal{I}_m(G)$.

1. Оценки величины $L^{\mathcal{B}}_{\iota,\nu}(n)$

В [4] доказана сильная ι-полнота класса $\mathcal{B}$. Интерес представляет получение оценки величины $L^{\mathcal{B}}_{\iota,\nu}(n)$. Тривиальная нижняя оценка имеет вид $L^{\mathcal{B}}_{\iota,\nu}(n) \geqslant \log_2 n$ (вытекает из неравенства $\iota(G) \leqslant 2^{\nu(G)}$), при этом в [4] для реализации числа n строятся двудольные графы с максимально возможными мощностями долей: $\lfloor \log_2 n \rfloor$ и $\lfloor \log_2(n - 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor} + 1) \rfloor$. Для реализации чисел вида $n = 2^k - 1$ соответствующий граф будет иметь $2k-2$ вершин, что вдвое больше ожидаемого оптимума. Как показывают следующие два утверждения, числа указанного вида можно реализовать проще.

Утверждение 1. *При $k = 2^t$ имеет место оценка $L^{\mathcal{B}}_{\iota,\nu}(2^k - 1) \sim k$.*

Доказательство. Верхняя оценка очевидна, а для доказательства нижней достаточно заметить, что

$$2^{2^t} - 1 = \prod_{j=0}^{t-1}(2^{2^j} + 1) = \prod_{j=0}^{t-1} \iota(K_{2^j,1}) = \iota\left(\bigsqcup_{j=0}^{t-1} K_{2^j,1}\right),$$

при этом $\nu\left(\bigsqcup_{j=0}^{t-1} K_{2^j,1}\right) = 2^t + t - 1 \lesssim k$. Утверждение 1 доказано.

Утверждение 2. *При $n = 2^k - 1$, где k — произвольное натуральное число, имеет место оценка $L^{\mathcal{B}}_{\iota,\nu}(n) < 3k/2$.*

Доказательство. При $k = 1$ достаточно рассмотреть нуль-граф. Пусть $k > 1$. Рассмотрим отдельно случаи чётного и нечётного k.

Случай 1. Пусть $k = 2t$, причём $t \geqslant 1$. Рассмотрим граф $G = K_{t,1} \sqcup K_{t-1,t-1}$, для него имеем $\iota(G) = \iota(K_{t,1}) \cdot \iota(K_{t-1,t-1}) = (2^t + 1) \cdot (2^t - 1) = 2^{2t} - 1 = 2^k - 1 = n$, при этом $\nu(G) = 3t - 1 < 3t = 3k/2$.

Случай 2. Пусть $k = 2t + 1$, $t \geqslant 1$. Возьмём граф $G = K_{t+1,1} \sqcup K_{t-1,t-1}$. Имеем $\iota(G) = (2^{t+1}+1)\cdot(2^t-1) = 2^{2t+1}-2^t-1$ и $\nu(G) = 3t$. Пусть G_* — граф, полученный добавлением к G новой вершины и соединением её со всеми вершинами большей доли. Получаем $\iota(G_*) = \iota(G) + 2^t = 2^{2t+1} - 1 = 2^k - 1 = n$ и $\nu(G_*) = \nu(G) + 1 = 3t + 1 < 3k/2$. Утверждение 2 доказано.

2. Оценки величины $L^{\mathcal{B}}_{\iota_m,\nu}(n)$

Задача существования для пары $(\mathcal{B}, \iota_m)$ решается тривиально: произвольное натуральное число $n \geqslant 4$ можно реализовать как число м. н. м. в графе-короне $K'_{n-2,n-2}$. Рассматривая в качестве ψ число вершин графа, приходим к задаче минимизации: *для натурального n найти минимальное число $L(n)$ такое, что существует двудольный граф с числом вершин $L(n)$ и количеством м. н. м., равным n.*

Лемма 1. *Пусть G — двудольный граф без изолированных вершин с долями L_G, R_G. Пусть $\widetilde{G}$ — двудольный граф, не пересекающийся с G, в первой и второй долях которого выделены (возможно, пустые) множества U_1 и U_2 соответственно. Пусть G' —граф, полученный соединением всех вершин множества U_1 (U_2) со всеми вершинами L_G (R_G). Тогда*

$$\iota_m(G') = (\iota_m(G) - 2) \cdot \iota_m(\widetilde{G} \setminus (U_1 \cup U_2)) + \iota_m(\widetilde{G} \setminus U_1) + \iota_m(\widetilde{G} \setminus U_2) \\ + \iota_m(\widetilde{G} + U_1 + U_2),$$

где через $\iota_m(\widetilde{G} + U_1 + U_2)$ *обозначено количество тех м. н. м. графа* $\widetilde{G}$, *пересечения которых с множествами* U_1 *и* U_2 *непусты.*

Доказательство. Утверждение леммы проверяется прямым подсчётом. Если в м. н. м. G' не входит ни одна вершина графа G, то должно входить хотя бы по одной вершине из U_1 и U_2, и количество таких множеств равно $\iota_m(\widetilde{G} + U_1 + U_2)$. Если в м. н. м. в G' входят вершины из обеих долей G, то ни одна из вершин множества $U_1 \cup U_2$ туда не войдёт, а подмножества этого м. н. м. в G и $\widetilde{G}$ сами будут максимальными в графах G и $\widetilde{G} \setminus (U_1 \cup U_2)$. Следовательно, количество таких м. н. м. равно $(\iota_m(G) - 2) \cdot \iota_m(\widetilde{G} \setminus (U_1 \cup U_2))$. Если м. н. м. в G содержит все вершины L_G или все вершины R_G, то его часть в графе $\widetilde{G}$ будет совпадать с м. н. м. в $\widetilde{G} \setminus U_1$ или $\widetilde{G} \setminus U_2$ соответственно. Лемма 1 доказана.

Пусть $\widetilde{G}$ — двудольный граф с выделенными подмножествами U_1 и U_2 вершин в долях. Положим

$$h'_{\widetilde{G}} = \iota_m(\widetilde{G} \setminus (U_1 \cup U_2)),$$

$$h''_{\widetilde{G}} = (\iota_m(\widetilde{G} \setminus U_1) + \iota_m(\widetilde{G} \setminus U_2) + \iota_m(\widetilde{G} + U_1 + U_2) - 2\iota_m(\widetilde{G} \setminus (U_1 \cup U_2))).$$

Лемма 2. *Пусть* Γ — *конечное множество двудольных графов с выделенными подмножествами вершин в долях такое, что*

$$\{h'_{\widetilde{G}} k + h''_{\widetilde{G}} \mid k \in \mathbb{N},\, \widetilde{G} \in \Gamma\} \supseteq (\mathbb{N} \setminus [1, n_0])$$

для некоторого n_0, *и пусть*

$$\gamma = \max\bigl\{(\log_2 h'_{\widetilde{G}})^{-1} \nu(\widetilde{G}) \mid \widetilde{G} \in \Gamma\bigr\}.$$

Тогда $L^{\mathcal{B}}_{\iota_m,\,\nu}(n) \leqslant \gamma \cdot \log_2 n + O(1)$.

Доказательство. Докажем лемму индукцией по n с использованием леммы 1. Для корректного применения леммы 1 необходимо, чтобы рассматриваемые графы были без изолированных вершин. Положим $n_1 := \max(\{n_0\} \cup \{h'_{\widetilde{G}} + h''_{\widetilde{G}} \mid \widetilde{G} \in \Gamma\})$. Пусть Γ_0 — произвольное конечное множество двудольных графов такое, что $\{\iota_m(G) \mid G \in \Gamma_0\} \supseteq [1, n_1]$. Например, в качестве Γ_0 можно взять множество $\{K'_{n-2,n-2} \mid n \in [4, n_1]\} \cup \{K_1,\, K_{1,1},\, P_4\}$. Пусть ν_0 — наибольшее число вершин в графах из Γ_0. Докажем, что для любого натурального n выполнено неравенство

$$L^{\mathcal{B}}_{\iota_m,\,\nu}(n) \leqslant \gamma \cdot \log_2 n + \nu_0, \tag{1}$$

откуда следует утверждение леммы.

Неравенство (1), очевидно, выполняется при $n \leqslant n_1$. Рассмотрим произвольное натуральное $n' > n_1$ и предположим, что (1) выполнено для всех n, меньших n'. По условию найдутся граф $\widetilde{G} \in \Gamma$ и натуральное $k \geqslant 2$ такие, что $n' = h'_{\widetilde{G}} k + h''_{\widetilde{G}}$. Из предположения индукции следует, что существует двудольный граф G без изолированных вершин, для которого $\iota_m(G) = k$ и $\nu(G) \leqslant \gamma \cdot \log_2 k + \nu_0$. Из леммы 1 вытекает, что найдётся граф G', для которого $\iota_m(G') = n'$ и

$$\nu(G') \leqslant \nu(G) + \nu(\widetilde{G}) \leqslant \nu(\widetilde{G}) + \gamma \cdot \log_2 k + \nu_0. \tag{2}$$

Неравенство (2) в совокупности с неравенством $k \leqslant \frac{n'}{h'_{\widetilde{G}}}$ даёт

$$\begin{aligned}\nu(G') &\leqslant \nu(\widetilde{G}) + \gamma \cdot \log_2 n' - \gamma \cdot \log_2 h'_{\widetilde{G}} + \nu_0 \\ &= \gamma \cdot \log_2 n' + \nu_0 + ((\log_2 h'_{\widetilde{G}})^{-1}\nu(\widetilde{G}) - \gamma) \cdot \log_2 h'_{\widetilde{G}} \leqslant \gamma \cdot \log_2 n' + \nu_0.\end{aligned}$$

Лемма 2 доказана.

Теорема 1. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнены неравенства*

$$2\log_2 n \leqslant L^{\mathcal{B}}_{\iota_m,\nu}(n) \leqslant 2.69\log_2 n + O(1). \tag{3}$$

Доказательство. Нижняя оценка в (3) следует из того, что число м. н. м. в двудольном графе не превосходит числа подмножеств каждой из его долей.

Для получения верхней оценки воспользуемся леммой 2, в качестве Γ рассмотрев множество графов, указанное на рис. 1. Нетрудно проверить, что такое множество Γ удовлетворяет условию леммы 2 и для него величина γ из условия леммы равна $17(\log_2 80)^{-1} < 2.69$. Отсюда вытекает верхняя оценка в (3). Верхняя оценка (3) допускает прямое улучшение за счёт более аккуратного подбора множества Γ; для поиска Γ можно применять компьютерный перебор. Теорема 1 доказана.

Нам кажется правдоподобной

Гипотеза. *При $n \to \infty$ имеет место асимптотическое соотношение $L^{\mathcal{B}}_{\iota_m,\nu}(n) \sim 2\log_2 n$.*

Доказательством его мы не располагаем, однако приводимая ниже теорема 2 подтверждает его для специального класса натуральных чисел. Доказательству теоремы 2 и посвящена оставшаяся часть статьи.

Лемма 3. *Для любого двудольного графа G без изолированных вершин существует двудольный граф, имеющий $\nu(G) + 4$ вершин, без изолированных вершин с числом м. н. м. $2\iota_m(G) + 1$.*

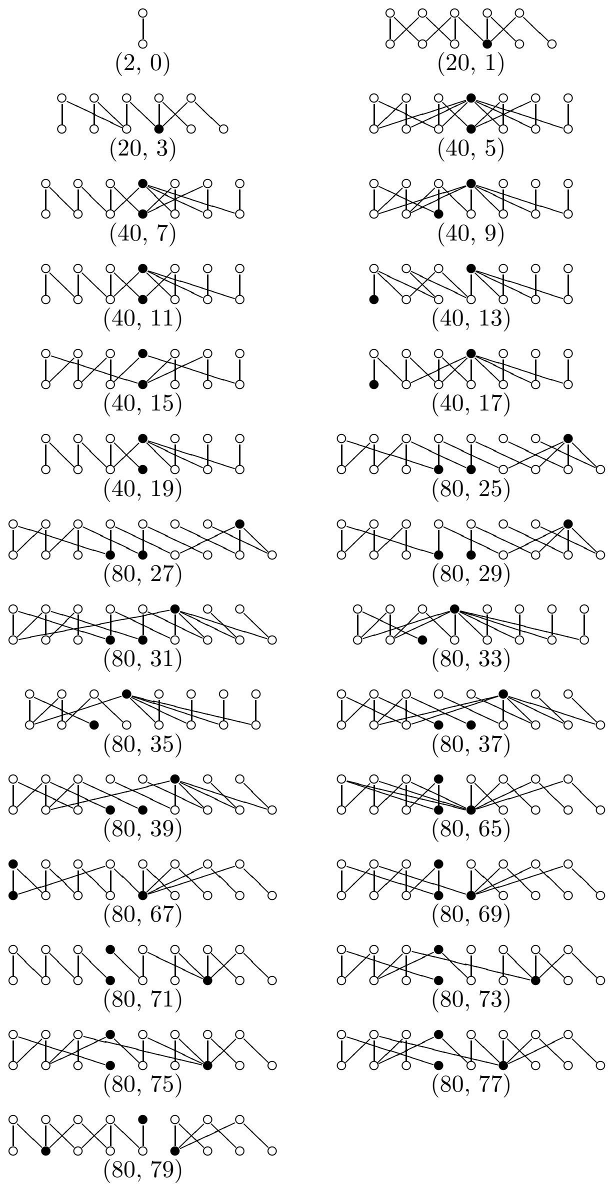

Рис. 1. Множество графов Γ (жирным выделены подмножества U_1, U_2, пары $(h'_{\widetilde{G}}, h''_{\widetilde{G}})$ подписаны снизу)

Доказательство. Воспользуемся леммой 1, в качестве $\widetilde{G}$ взяв P_4, а в качестве множеств U_1 и U_2 — одну из неконцевых вершин $\widetilde{G}$ и пустое множество соответственно. Получим искомый граф. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Для любого двудольного графа G без изолированных вер-*

шин существует двудольный граф без изолированных вершин с числом м. н. м. $\iota_m(G)+2$ на $\nu(G)+4$ вершинах.

Доказательство. Воспользуемся леммой 1, в качестве $\widetilde{G}$ взяв граф P_4, а в качестве множеств U_1 и U_2 — пару несмежных вершин $\widetilde{G}$ и пустое множество соответственно. Получим искомый граф. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Для любых двудольных графов G и $\widetilde{G}$ без изолированных вершин существует двудольный граф без изолированных вершин на $\nu(G)+\nu(\widetilde{G})+4$ вершинах с числом м. н. м. $\iota_m(G)+\iota_m(\widetilde{G})$.*

Доказательство. Применим лемму 1, выбрав в графе $\widetilde{G}$ в качестве множеств U_1 и U_2 все вершины каждой из долей. Получим граф G' на $\nu(G)+\nu(\widetilde{G})$ вершинах с числом м. н. м. $(\iota_m(G)+\iota_m(\widetilde{G})-2)$. Осталось применить к графу G' лемму 4. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Пусть G и $\widetilde{G}$ — двудольные графы без изолированных вершин, и пусть $s,t\in\mathbb{N}$. Тогда найдётся двудольный граф без изолированных вершин с числом м. н. м. $2^{st}\cdot\iota_m(G)+\frac{2^{st}-1}{2^t-1}\cdot\iota_m(\widetilde{G})$ и числом вершин, не превосходящим $\nu(G)+\nu(\widetilde{G})+2s(t+1)+3$.*

Доказательство. При $s=1$ доказываемое утверждение следует из леммы 5 (если предварительно к графу G добавить паросочетание на $2t$ вершинах). Далее считаем, что $s\geqslant 2$ и $V_G\cap V_{\widetilde{G}}=\varnothing$. Доли графов G и $\widetilde{G}$ обозначим через L_G, R_G и $L_{\widetilde{G}}$, $R_{\widetilde{G}}$. Построим граф G' следующим образом:

$$\begin{aligned} V_{G'} = V_G \cup V_{\widetilde{G}} \cup \{w\} \cup \{\widetilde{u}_i \mid 1\leqslant i\leqslant t\} \cup \{\widetilde{v}_i \mid 1\leqslant i\leqslant t\} \\ \cup \{u_{i,j} \mid 1\leqslant i\leqslant s-1,\ 1\leqslant j\leqslant t+1\} \\ \cup \{v_{i,j} \mid 1\leqslant i\leqslant s-1,\ 1\leqslant j\leqslant t+1\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{G'} = E_G \cup E_{\widetilde{G}} \cup \{\widetilde{u}_i\widetilde{v}_i \mid 1\leqslant i\leqslant t\} \\ \cup \{u_{i,j}v_{i,j} \mid 1\leqslant i\leqslant s-1,\ 1\leqslant j\leqslant t\} \cup \{uv \mid u\in L_G,\ v\in R_{\widetilde{G}}\} \\ \cup \{uv \mid u\in R_G,\ v\in L_{\widetilde{G}}\} \cup \{wv \mid v\in R_G\cup R_{\widetilde{G}}\} \\ \cup \{\widetilde{u}_iv \mid 1\leqslant i\leqslant t,\ v\in R_{\widetilde{G}}\} \cup \{u\widetilde{v}_i \mid 1\leqslant i\leqslant t,\ u\in L_{\widetilde{G}}\} \\ \cup \{u_{i,t+1}v \mid 1\leqslant i\leqslant s-1,\ v\in R_G\} \cup \{uv_{i,t+1} \mid 1\leqslant i\leqslant s-1,\ u\in L_G\} \\ \cup \{u_{i,j}v_{k,t+1} \mid 1\leqslant i\leqslant k\leqslant s-1,\ 1\leqslant j\leqslant t+1\}. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что граф G' двудольный, одной из долей является множество

$$L_{G'} = L_G \cup L_{\widetilde{G}} \cup \{w\} \cup \{\widetilde{u}_i \mid 1\leqslant i\leqslant t\} \cup \{u_{i,j} \mid 1\leqslant i\leqslant s-1,\ 1\leqslant j\leqslant t+1\}.$$

Подсчитаем количество м. н. м. в G'. Разобьём все м. н. м. в G' на семь типов.

Тип 1. Положим $\mathcal{I}_1 = \{I \in \mathcal{I}_m(G') \mid I \cap L_G \neq \varnothing,\, I \cap R_G \neq \varnothing\}$. Заметим, что для каждого множества $I \in \mathcal{I}_1$ подмножество $I \cap V_G$ является м. н. м. в G, а из множества $V_{G'} \setminus V_G$ в I могут входить только вершины $\widetilde{u}_i$, $\widetilde{v}_i$, $u_{i,j}$ и $v_{i,j}$ при $j \neq t+1$. Подграф, порождённый этими вершинами, является паросочетанием, откуда следует равенство

$$|\mathcal{I}_1| = (\iota_m(G) - 2) \cdot 2^{st}. \tag{4}$$

Тип 2. Положим $\mathcal{I}_2 = \{I \in \mathcal{I}_m(G') \mid I \cap L_G \neq \varnothing, I \cap R_G = \varnothing\}$. Можно проверить, что в каждое множество $I \in \mathcal{I}_2$ обязательно войдут все вершины L_G, а также вершины w и $u_{i,t+1}$ при всех i. Заведомо не войдут в I вершины из $R_{\widetilde{G}}$. Оставшиеся вершины I будут образовывать м. н. м. в подграфе, порождённом множеством

$$L_{\widetilde{G}} \cup \{\widetilde{u}_i \mid i \leqslant t\} \cup \{\widetilde{v}_i \mid i \leqslant t\} \cup \{u_{i,j} \mid i \leqslant s-1,\, j \leqslant t\} \\ \cup \{v_{i,j} \mid i \leqslant s-1,\, j \leqslant t\}.$$

Число последних равно 2^{st}, т. е.

$$|\mathcal{I}_2| = 2^{st}. \tag{5}$$

Тип 3. Обозначив $\mathcal{I}_3 = \{I \in \mathcal{I}_m(G') \mid I \cap L_G = \varnothing,\, I \cap R_G \neq \varnothing\}$, как и в предыдущем случае, получаем $|\mathcal{I}_3| = 2^{st}$. В совокупности с (4) и (5) это даёт

$$|\mathcal{I}_1| + |\mathcal{I}_2| + |\mathcal{I}_3| = \iota_m(G) \cdot 2^{st}. \tag{6}$$

Осталось рассмотреть м. н. м. графа G', в которые не входят вершины из V_G. Введём обозначение $\mathcal{I}_{\overline{G}} = \{I \in \mathcal{I}_m(G') \mid I \cap V_G = \varnothing\}$.

Обозначим через $\widehat{G}$ подграф графа G, порождённый вершинами $u_{i,j}$ и $v_{i,j}$, $1 \leqslant i \leqslant s-1$, $1 \leqslant j \leqslant t+1$. Для дальнейшего нам потребуется оценить величину $\iota_m(\widehat{G})$. Число $\widehat{\iota}_0$ м. н. м. графа $\widehat{G}$, не содержащих вершины вида $v_{i,t+1}$, равно $2^{(s-1)t}$ (количество м. н. м. в паросочетании с $(s-1)t$ рёбрами). Рассмотрим теперь произвольное k, $1 \leqslant k \leqslant s-1$. Оценим количество $\widehat{\iota}_k$ тех м. н. м. $\widehat{I}$ графа $\widehat{G}$, которые не содержат вершины вида $v_{i,t+1}$ при $i > k$ и содержат вершину $v_{k,t+1}$. Для таких $\widehat{I}$ имеем $\widehat{I} \not\ni u_{i,j}$ и $\widehat{I} \ni v_{i,j}$ при всех $i < k$ и всех j. Кроме того, в этом случае $\widehat{I} \ni u_{i,t+1}$ при $i > k$, а оставшиеся вершины $\widehat{I}$ образуют м. н. м. в совершенном паросочетании $\{u_{i,j}v_{i,j} \mid k < i \leqslant s-1,\, 1 \leqslant j \leqslant t\}$. Следовательно $\widehat{\iota}_k = 2^{(s-1-k)t}$.

В итоге получаем

$$\iota_m(\widehat{G}) = \sum_{k=0}^{s-1} \widehat{\iota}_k = \sum_{k=0}^{s-1} 2^{(s-1-k)t} = \frac{2^{st}-1}{2^t-1}. \tag{7}$$

Тип 4. Обозначим $\mathcal{I}_4 = \{I \in \mathcal{I}_{\overline{G}} \mid I \cap L_{\widetilde{G}} \neq \varnothing,\, I \cap R_{\widetilde{G}} \neq \varnothing\}$. Для $I \in \mathcal{I}_4$ подмножество $I \cap V_{\widetilde{G}}$ является м. н. м. в $\widetilde{G}$, а множество $I \cap (V_G \setminus V_{\widetilde{G}})$ является м. н. м. в графе $\widehat{G}$. Таким образом,

$$|\mathcal{I}_4| = (\iota_m(\widetilde{G}) - 2) \cdot \iota_m(\widehat{G}). \tag{8}$$

Тип 5. Обозначим $\mathcal{I}_5 = \{I \in \mathcal{I}_{\overline{G}} \mid I \cap L_{\widetilde{G}} \neq \varnothing,\, I \cap R_{\widetilde{G}} = \varnothing\}$. В каждое м. н. м. $I \in \mathcal{I}_5$ войдут все вершины $L_{\widetilde{G}}$. Кроме того, в такие I не войдут вершины $\widetilde{v}_i$, войдут все вершины $\widetilde{u}_i$ и войдёт w. Заметим, что множество $I \cap V_{\widehat{G}}$ является м. н. м. в $I \cap V_{\widehat{G}}$ и должно содержать хотя бы одну из вершин вида $v_{i,t+1}$. Отсюда следует равенство

$$|\mathcal{I}_5| = \iota_m(\widehat{G}) - 2^{(s-1)t}. \tag{9}$$

Тип 6. Обозначим $\mathcal{I}_6 = \{I \in \mathcal{I}_{\overline{G}} \mid I \cap L_{\widetilde{G}} = \varnothing,\, I \cap R_{\widetilde{G}} \neq \varnothing\}$. Аналогично предыдущему пункту получаем, что подмножество $I \cap V_{\widehat{G}}$ каждого м. н. м. $I \in \mathcal{I}_6$ является м. н. м. в $I \cap V_{\widehat{G}}$ и должно содержать хотя бы одну из вершин вида $u_{i,t+1}$. Стало быть,

$$|\mathcal{I}_6| = \iota_m(\widehat{G}) - 1. \tag{10}$$

Тип 7. Наконец, оценим мощность множества $\mathcal{I}_7 = \{I \in \mathcal{I}_{\overline{G}} \mid I \cap V_{\widetilde{G}} = \varnothing\}$. Для множеств I указанного вида имеем $w \in I$. Множество $\widetilde{I} = I \cap (\{\widetilde{u}_i \mid i \leqslant t\} \cup \{\widetilde{v}_i \mid i \leqslant t\})$ должно содержать хотя бы одну вершину вида $\widetilde{v}_i$ и являться м. н. м. в соответствующем подграфе. Количество таких множеств $\widetilde{I}$ равно $2^t - 1$. Множество $\widehat{I} = I \setminus (\{w\} \cup \widetilde{I})$ должно быть м. н. м. в $\widehat{G}$ и содержать хотя бы одну из вершин вида $v_{i,t+1}$. Количество способов выбрать такое $\widehat{I}$ равно $\iota_m(\widehat{G}) - 2^{(s-1)t}$. В итоге имеем

$$|\mathcal{I}_7| = (2^t - 1)(\iota_m(\widehat{G}) - 2^{(s-1)t}). \tag{11}$$

Учитывая соотношения (6)–(11), после арифметических преобразований получаем

$$\iota_m(G') = \sum_{k=1}^{7} |\mathcal{I}_k| = 2^{st} \cdot \iota_m(G) + \frac{2^{st}-1}{2^t-1} \cdot \iota_m(\widetilde{G}) - 2.$$

Осталось применить к графу G' лемму 4. Лемма 6 доказана.

Обозначим через $\overline{n}$ двоичную запись числа n, а через $w^{(k)}$ — двоичное слово, получающееся k-кратным повторением слова w.

Лемма 7. *Пусть $n, p, q \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Пусть n' — натуральное число, двоичная запись которого имеет вид $\overline{n}w^{(q)}$, где w — двоичное слово длины p. Пусть G — двудольный граф без изолированных вершин, у которого $\iota_m(G) = n$. Тогда существует двудольный граф без изолированных вершин с числом м. н. м., равным n', и числом вершин не более $\nu(G) + 2pq + 10(p + \sqrt{pq}) + O(1)$.*

Доказательство. Если слово w состоит из одних нулей, то искомый граф получается добавлением к G паросочетания на $2pq$ вершинах. Далее считаем, что w содержит хотя бы одну единицу. Рассмотрим случай $q = 1$. Если $w = 0\dots01$, то искомый граф получается добавлением к G паросочетания на $2(p-1)$ вершинах и последующим применением леммы 3. В противном случае число $\widetilde{n}$, двоичной записью которого является w, больше единицы. Тогда для этого числа по теореме 1 существует граф без изолированных вершин $\widetilde{G}$, для которого $\iota_m(\widetilde{G}) = \widetilde{n}$ и $\nu(\widetilde{G}) < 3p + O(1)$. Применяя к G и $\widetilde{G}$ лемму 6 с $t = p$ и $s = 1$, получим искомый граф.

Далее считаем, что $q \geqslant 2$ и w содержит хотя бы одну единицу. Положим $k = \max\{\lceil\sqrt{q/p}\rceil, 2\}$, а остаток от деления q на k обозначим через r. Из теоремы 1 следует, что существует граф $\widetilde{G}$ такой, что $\nu(\widetilde{G}) < 3pk + O(1)$ и двоичная запись числа $\iota_m(\widetilde{G})$ совпадает со словом $w^{(k)}$ с точностью до незначащих нулей слева. Применяя к графам G и $\widetilde{G}$ лемму 6 с $t = pk$ и $s = \lfloor q/k \rfloor$, получим граф G'', для которого двоичная запись числа $\iota_m(G'')$ имеет вид $\overline{n}w^{(q-r)}$ и при этом

$$\begin{aligned}\nu(G'') &\leqslant \nu(G) + 3pk + 2(q/k)(pk+1) + O(1)\\ &= \nu(G) + 2pq + 3pk + 2q/k + O(1). \qquad (12)\end{aligned}$$

В совокупности с неравенствами $2q/k \leqslant 2\sqrt{pq}$ и $k \leqslant 2 + \sqrt{q/p}$ соотношение (12) даёт

$$\nu(G'') \leqslant \nu(G) + 2pq + 6p + 5\sqrt{pq} + O(1).$$

Если $r = 0$, то граф G'' искомый. Если $r > 0$, то, воспользовавшись теоремой 1, рассмотрим граф $\widetilde{G}_r$, для которого $\nu(\widetilde{G}_r) \leqslant 3r + O(1)$ и двоичная запись числа $\iota_m(\widetilde{G}_r)$ совпадает со словом $w^{(r)}$ с точностью до незначащих нулей слева. Далее по лемме 6 (применяемой с G'' и $\widetilde{G}_r$ в качестве графов G и $\widetilde{G}$ соответственно, $s = 1$ и $t = pr$), существует граф G', для которого $\overline{\iota_m(G')} = \overline{\iota_m(G'')} w^{(r)} = \overline{n'}$ и

$$\begin{aligned}\nu(G') &\leqslant \nu(G'') + 3r + 2pr + O(1) \\ &\leqslant \nu(G) + 2pq + 6p + 5\sqrt{pq} + 3r + 2pr + O(1).\end{aligned}$$

Пользуясь неравенствами $r < k \leqslant 2 + \sqrt{q/p}$, получаем

$$\begin{aligned}\nu(G') &\leqslant \nu(G) + 2pq + 10p + 7\sqrt{pq} + 3\sqrt{q/p} + O(1) \\ &< \nu(G) + 2pq + 10(p + \sqrt{pq}) + O(1),\end{aligned}$$

что и требовалось. Лемма 7 доказана.

Теорема 2. *Пусть n — натуральное число, имеющее двоичную запись $w_1^{(q_1)} \dots w_k^{(q_k)}$ для некоторых непустых слов $w_1, \dots, w_k$ и натуральных чисел $q_1, \dots, q_k$. Пусть p_i — длина w_i. Тогда при $\sum_{i=1}^{k} p_i = o(\log n)$ справедлива асимптотика*

$$L^{\mathcal{B}}_{\iota_m, \nu}(n) \sim 2\log_2 n \tag{13}$$

(вне зависимости от величин q_i).

Доказательство. Нижняя оценка обоснована в теореме 1. Непосредственно из леммы 7 следует, что существует граф G, для которого $\iota_m(G) = n$ и

$$\nu(G) \leqslant 2\log_2 n + O\left(\sum_{i=1}^{k} p_i + \sum_{i=1}^{k} \sqrt{p_i q_i}\right). \tag{14}$$

Далее, из неравенства $\sum_{i=1}^{k} p_i q_i < 2\log_2 n$ и неравенства Коши — Буняковского получаем оценку

$$\sum_{i=1}^{k} \sqrt{p_i q_i} \leqslant \sqrt{2k \log_2 n} = o(\log n). \tag{15}$$

Из (14) и (15) вытекает (13). Теорема 2 доказана.

Авторы выражают благодарность рецензенту, замечания и советы которого способствовали улучшению текста работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Czabarka É., Székely L., Wagner S.** The inverse problem for certain tree parameters // Discrete Appl. Math. 2009. Vol. 157, No. 15. P. 3314–3319.
2. **Erdös P., Gallai T.** Gráfok előírt fokú pontokkal // Mat. Lapok. 1960. Vol. 11. P. 264–274.
3. **Havel V.** Poznámka o existenci konečných grafů // Časopis pro pěstování matematiky. 1955. Vol. 80, No. 4. P. 477–480.
4. **Linek V.** Bipartite graphs can have any number of independent sets // Discrete Math. 1989. Vol. 76, No. 2. P. 131–136.
5. **Wagner S.** A class of trees and its Wiener index // Acta Appl. Math. 2006. Vol. 91, No. 2. P. 119–132.
6. **Wang H., Yu G.** All but 49 numbers are Wiener indices of trees // Acta Appl. Math. 2006. Vol. 92, No. 1. P. 15–20.

Александр Борисович Дайняк,
Артём Дмитриевич Курносов

Статья поступила
11 марта 2014 г.

Исправленный вариант —
12 сентября 2014 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
January–February 2015. Volume 22, No. 1. P. 19–31

UDC 519.176

ON AN EXTREMAL INVERSE PROBLEM IN GRAPH THEORY

A. B. Dainiak[1], *A. D. Kurnosov*[1]
[1]Moscow Institute of Physics and Technology,
9 Institutskii per., 141700 Dolgoprudnyi, Russia
e-mail: dainiak@phystech.edu, kurnosov@phystech.edu

Abstract. Upper bounds are obtained for minimal number of vertices in graphs having prescribed number of maximal independent sets. Ill. 1, bibliogr. 6.

Keywords: inverse problem, independent set, bipartite graph.

REFERENCES

1. **É. Czabarka, L. Székely**, and **S. Wagner**, The inverse problem for certain tree parameters, *Discrete Appl. Math.,* **157**, No. 15, 3314–3319, 2009.

2. **P. Erdös** and **T. Gallai**, Graphs with prescribed degrees of vertices, *Mat. Lapok.,* **11**, 264–274, 1960.
3. **V. Havel**, A remark on the existence of finite graphs, *Čas. Pěstování Mat.,* **80**, No. 4, 477–480, 1955.
4. **V. Linek**, Bipartite graphs can have any number of independent sets, *Discrete Math.,* **76**, No. 2, 131–136, 1989.
5. **S. Wagner**, A class of trees and its Wiener index, *Acta Appl. Math.,* **91**, No. 2, 119–132, 2006.
6. **H. Wang** and **G. Yu**, All but 49 numbers are Wiener indices of trees, *Acta Appl. Math.,* **92**, No. 1, 15–20, 2006.

Alexander B. Dainiak,
Artem D. Kurnosov

Received
11 March 2014

Revised
12 September 2014