ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—февраль 2015. Том 22, № 1. С. 64–85

УДК 519.853.4

ЧИСЛЕННЫЙ ПОИСК ГЛОБАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧАХ НЕСИММЕТРИЧНОЙ БИЛИНЕЙНОЙ ОТДЕЛИМОСТИ *)

А. В. Орлов[1]
[1]Институт динамики систем и теории управления СО РАН,
ул. Лермонтова, 134, 664033 Иркутск, Россия
e-mail: anor@icc.ru

Аннотация. Исследуется задача билинейной отделимости двух множеств (несимметричный случай). Для её решения применяется оптимизационный подход, базирующийся на редукции к эквивалентной задаче билинейной оптимизации с несвязанными переменными. В соответствии с теорией глобального поиска, разработанной А. С. Стрекаловским, построены специальные методы локального и глобального поисков в исследуемой задаче. Представлены результаты вычислительного эксперимента по решению сгенерированных тестовых задач билинейной отделимости. Ил. 5, табл. 3, библиогр. 29.

Ключевые слова: задача классификации, билинейная отделимость, оптимизационный подход, локальный поиск, глобальный поиск, генерация тестовых задач, вычислительный эксперимент.

Введение

Как известно, процедура отделения множеств возникает при решении задач кластерного анализа и классификации объектов во многих прикладных областях (экономике, медицине и др.) [1, 2, 22, 23, 28]. Целью классификации является отнесение объектов исследования по имеющимся статистическим данным (характеристика ситуации на рынке, информация о фирме или клиенте, данные медицинской карты и осмотра и т. д.) к определённым классам (чаще всего, к одному из двух заданных). С математической точки зрения задача классификации состоит

*)Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ (НШ–5007.2014.9).

в нахождении дискриминантной функции $F(\cdot)$ (классификатора), с помощью которой можно определить, к какому классу необходимо отнести вектор x, предъявляемый для распознавания [2, 4, 7].

Спектр существующих подходов к решению задач классификации достаточно разнообразен ввиду большой популярности этой тематики. Например, широко известен алгебраический подход к решению подобного сорта задач, базирующийся на теоретических результатах Ю. И. Журавлёва [4, 12, 13]. С этим подходом также тесно связан подход, основанный на комитетной отделимости [7, 8]. Некоторые задачи кластерного анализа исследуются также с помощью аппарата дискретной оптимизации [5, 6]. За рубежом наиболее популярными инструментами в данной области можно считать подход, основанный на применении нейронных сетей (см. обзор [29], а также [23, 28]), и так называемый оптимизационный (вариационный) подход, развиваемый в настоящей работе, когда исследуемая задача сводится к некоторой непрерывной задаче на поиск экстремума.

При использовании оптимизационного подхода обычно предполагается, что функция $F(\cdot)$ выбирается из класса функций наиболее простого вида: аффинных, кусочно-линейных или квадратичных [18, 19, 22–24]. Таким образом, задача классификации может быть проинтерпретирована как задача отделимости двух конечных множеств точек $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ пространства $\mathbb{R}^n$ аффинными, кусочно-линейными или квадратичными функциями. Пионерами в области применения методов оптимизации к задачам классификации можно назвать Дж. Б. Розена и О. Л. Мангасарьяна, которые практически одновременно в 1965 г. предложили эквивалентные формулировки задач отделимости множеств в виде задач выпуклого программирования [22, 27].

Известно, что если выпуклые оболочки множеств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ не пересекаются, то они могут быть отделены аффинной отделяющей функцией [3, 22]. В этом случае возникает задача линейной отделимости множеств (построение одной отделяющей гиперплоскости), которая, как известно, эквивалентна одной задаче линейного программирования (ЛП), и её решение не представляет вычислительных трудностей. Намного больший интерес представляет собой задача отделения множеств, выпуклые оболочки которых имеют непустое пересечение. Для её решения требуются более общие, чем линейная отделимость, понятия отделимости множеств.

Одним из обобщений понятия линейной отделимости является понятие билинейной отделимости, когда ставится задача отделения задан-

ных множеств двумя гиперплоскостями [21, 22]. Отметим, что эта задача является намного более сложной, чем задача линейной отделимости, поскольку она оказывается эквивалентной невыпуклой задаче математического программирования специального вида с билинейной целевой функцией [21]. Как известно [14], в невыпуклых задачах может существовать много локальных решений, далёких от глобального оптимума даже по значению целевой функции, что затрудняет применение для решения этих задач классических методов оптимизации [3]. Кроме того, в [26] доказана NP-полнота задач билинейной и кусочно-линейной отделимости. Поэтому проблема исследования подобного сорта задач с точки зрения построения новых приближённых методов решения в настоящее время остаётся актуальной. Обзор современных результатов по теме обобщённой отделимости с использованием оптимизационного подхода может быть найден в [20].

Целью настоящей статьи является развитие построенного ранее на основе теории глобального поиска А. С. Стрекаловского [14] аппарата решения задач оптимизации с билинейной структурой [9, 15] на задачу билинейной отделимости, которая представлена в виде невыпуклой задачи билинейного программирования [21]. Численная эффективность предложенного подхода демонстрируется вычислительным экспериментом.

1. Постановка задачи билинейной отделимости и её редукция

Пусть множество $\mathcal{A}$ состоит из m элементов, а $\mathcal{B}$ — из l элементов. Каждый элемент обладает n характеристиками. Представив элементы множеств как точки из пространства $\mathbb{R}^n$, множества $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ можно описать с помощью матриц $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $B \in \mathbb{R}^{l\times n}$, компоненты строк которых являются координатами точек из множеств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ соответственно. При этом возможны различные варианты расположения множеств по отношению к отделяющим гиперплоскостям. Три варианта на плоскости показаны на рис. 1.

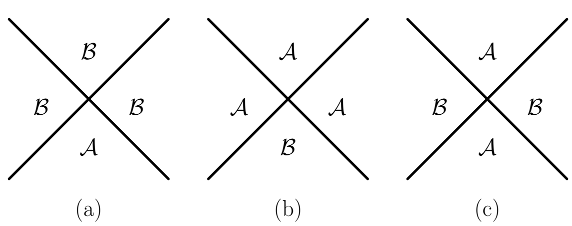

Рис. 1. Билинейная отделимость двух множеств в $\mathbb{R}^2$

Первые два случая будем называть несимметричной, а третий — симметричной билинейной отделимостью. В статье исследуется несиммет-

ричный вариант билинейной отделимости. Дадим формальное определение этого понятия.

Определение 1 [21]. Множества $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ называются *несимметрично билинейно отделимыми* гиперплоскостями

$$H_1(w^1, \gamma^1) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle w^1, x\rangle = \gamma^1,\ w^1 \in \mathbb{R}^n,\ \gamma^1 \in \mathbb{R}\},$$

$$H_2(w^2, \gamma^2) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle w^2, x\rangle = \gamma^2,\ w^2 \in \mathbb{R}^n,\ \gamma^2 \in \mathbb{R}\},$$

если для любых точек A^i, $i = \overline{1,m}$, из $\mathcal{A}$ и B^j, $j = \overline{1,l}$, из $\mathcal{B}$ выполняется одна из следующих систем неравенств:

$$\langle A^i, w^1\rangle > \gamma^1,\ \langle A^i, w^2\rangle > \gamma^2,\ \langle B^j, w^1\rangle < \gamma^1 \text{ или } \langle B^j, w^2\rangle < \gamma^2, \quad (1)$$

$$\langle B^j, w^1\rangle > \gamma^1,\ \langle B^j, w^2\rangle > \gamma^2,\ \langle A^i, w^1\rangle < \gamma^1 \text{ или } \langle A^i, w^2\rangle < \gamma^2. \quad (2)$$

Заметим, что случаи билинейной отделимости, определяемые условиями (1) и (2), совпадают с точностью до обозначений множеств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Поэтому далее без ограничения общности все определения и результаты будут приведены только для первого случая.

Для описания оптимизационного подхода к поставленной задаче удобно использовать другую, «нормированную» форму определения 1.

Введём обозначения: $e_m \triangleq (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^m$, $e_l \triangleq (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^l$, и для вектора $x \in \mathbb{R}^l$ определим вектор x_+ с компонентами $(x_+)_j \triangleq \max\{x_j, 0\}$, $j = \overline{1,l}$.

Определение 2 [21]. Множества $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ называются *несимметрично билинейно отделимыми* гиперплоскостями H_1 и H_2, если следующая система разрешима относительно $(w^1, w^2, \gamma^1, \gamma^2)$:

$$\begin{gathered} -Aw^1 + \gamma^1 e_m + e_m \leqslant 0, \quad -Aw^2 + \gamma^2 e_m + e_m \leqslant 0, \\ \langle (Bw^1 - \gamma^1 e_l + e_l)_+, (Bw^2 - \gamma^2 e_l + e_l)_+\rangle = 0. \end{gathered} \quad (3)$$

От системы (3) нетрудно перейти к оптимизационной задаче [21], вводя вспомогательные переменные z^1 и z^2, компоненты которых представляют собой меры нарушения ограничений для всех точек множества $\mathcal{B}$:

$$z_j^1 = \max\{0, \langle w^1, B^j\rangle - \gamma^1\}, \quad z_j^2 = \max\{0, \langle w^2, B^j\rangle - \gamma^2\},\ j = \overline{1,l},$$

$$F(z^1, z^2) = \langle z^1, z^2\rangle \to \min_{(z^1,\, w^1,\, \gamma^1;\, z^2,\, w^2,\, \gamma^2)}, \quad (\mathcal{BLP})$$

$$(z^1, w^1, \gamma^1) \in Z_1 \triangleq \{(z^1, w^1, \gamma^1) \in \mathbb{R}^K \mid -Aw^1 + \gamma^1 e_m + e_m \leqslant 0,$$
$$Bw^1 - \gamma^1 e_l + e_l \leqslant z^1,\ z^1 \geqslant 0\},$$

$$(z^2, w^2, \gamma^2) \in Z_2 \triangleq \{(z^2, w^2, \gamma^2) \in \mathbb{R}^K \mid -Aw^2 + \gamma^2 e_m + e_m \leqslant 0,$$
$$Bw^2 - \gamma^2 e_l + e_l \leqslant z^2,\ z^2 \geqslant 0\},$$

где $K = l + n + 1$.

Теорема 1 [21]. *Множества $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ несимметрично билинейно отделимы в пространстве $\mathbb{R}^n$ в том и только том случае, когда оптимальное значение задачи ($\mathcal{BLP}$) $F(z^1_*, z^2_*) = 0$. Компоненты $(w^1_*, w^2_*, \gamma^1_*, \gamma^2_*)$ точки глобального минимума определяют отделяющие гиперплоскости $\langle w^1_*, x\rangle = \gamma^1_*$ и $\langle w^2_*, x\rangle = \gamma^2_*$.*

Можно заметить, что задача ($\mathcal{BLP}$) является задачей билинейного программирования с несвязанными переменными [9, 15]. Известно, что такие задачи весьма сложны для исследования с точки зрения построения численных методов вследствие невыпуклости целевой функции [9, 15, 21]. В [9, 15] предложен и апробирован подход к билинейным задачам, использующий теорию глобального поиска [14]. Проведённый вычислительный эксперимент на большом спектре тестовых задач билинейного программирования [9, 15] продемонстрировал эффективность этого подхода, применяемого в настоящей статье для решения задач несимметричной билинейной отделимости. Отметим также, что известно оптимальное значение задачи ($\mathcal{BLP}$). Этот факт будет использован ниже.

Согласно теории глобального поиска [14] прежде всего необходимо разработать метод локального поиска в исследуемой задаче с учетом её специфики, чему и посвящён разд. 2.

2. Локальный поиск

В соответствии с [9, 15, 21] для осуществления локального поиска в задаче ($\mathcal{BLP}$) наиболее естественной является идея последовательного решения частичных задач линейного программирования, следующих из исходной постановки. В терминах задачи ($\mathcal{BLP}$) один из вариантов метода локального поиска (z^1-процедура), для начала работы которой требуется только компонента z^1_0 стартовой точки, записывается следующим образом.

Пусть задана некоторая стартовая точка $\left(z^1_0, w^1_0, \gamma^1_0\right)$, которая не является, вообще говоря, допустимой.

Шаг 0. Положить $s := 0,\ z_s^1 := z_0^1$.

Шаг 1. Найти $\rho_s/2$-решение $\big(z_{s+1}^2, w_{s+1}^2, \gamma_{s+1}^2\big)$ задачи линейного программирования (ЛП)

$$\big\langle z_s^1, z^2\big\rangle \to \min_{(z^2,\, w^2,\, \gamma^2)}, \quad (z^2, w^2, \gamma^2) \in Z_2. \qquad \big(\mathcal{LP}_2\big(z_s^1\big)\big)$$

Шаг 2. Найти $\rho_s/2$-решение $\big(z_{s+1}^1, w_{s+1}^1, \gamma_{s+1}^1\big)$ задачи ЛП по другой переменной:

$$\big\langle z^1, z_{s+1}^2\big\rangle \to \min_{(z^1,\, w^1,\, \gamma^1)}, \quad (z^1, w^1, \gamma^1) \in Z_1. \qquad \big(\mathcal{LP}_1\big(z_{s+1}^2\big)\big)$$

Шаг 3. Положить $s := s+1$ и перейти на шаг 1.

Разрешимость задач ЛП $\big(\mathcal{LP}_1\big(z_{s+1}^2\big)\big)$ и $\big(\mathcal{LP}_2\big(z_s^1\big)\big)$, строящихся на шагах описанного алгоритма, следует из теоремы 1 (ограниченности снизу на допустимом множестве целевой функции задачи $(\mathcal{BLP})$) и условий неотрицательности вспомогательных переменных z^1 и z^2. Чтобы гарантировать разрешимость задачи ЛП и на шаге 1 первой итерации z^1-процедуры, достаточно выбирать $z_0^1 > 0$.

Отметим также, что вследствие специфики исследуемой задачи множества Z_1 и Z_2 не являются, вообще говоря, ограниченными. Поэтому справедлива следующая теорема сходимости для этого варианта метода.

Теорема 2 [10, 16]. (i) *При условии* $\rho_s > 0,\ s = 1, 2, \ldots,\ \sum\limits_{s=1}^{\infty} \rho_s < +\infty$ *числовая последовательность значений функции* $F_s \triangleq F\big(z_s^1, z_s^2\big)$, *генерируемая* z^1*-процедурой, сходится.*

(ii) *В случае, когда* $\big(z_s^1, w_s^1, \gamma_s^1; z_s^2, w_s^2, \gamma_s^2\big) \to (\widehat{z}^1, \widehat{w}^1, \widehat{\gamma}^1; \widehat{z}^2, \widehat{w}^2, \widehat{\gamma}^2)$, *пара* $(\widehat{z}^1, \widehat{z}^2)$ *удовлетворяет неравенствам*

$$F(\widehat{z}^1, \widehat{z}^2) \leqslant F\big(\widehat{z}^1, z^2\big), \\ z^2 \in Pr(Z^2) \triangleq \{z^2 \in \mathbb{R}^l \mid \exists (w^2, \gamma^2) :\ (z^2, w^2, \gamma^2) \in Z_2\}, \quad (4)$$

$$F(\widehat{z}^1, \widehat{z}^2) \leqslant F\big(z^1, \widehat{z}^2\big), \\ z^1 \in Pr(Z^1) \triangleq \{z^1 \in \mathbb{R}^l \mid \exists (w^1, \gamma^1) :\ (z^1, w^1, \gamma^1) \in Z_1\}. \quad (5)$$

Определение 2. Точку $(\widehat{z}^1, \widehat{w}^1, \widehat{\gamma}^1; \widehat{z}^2, \widehat{w}^2, \widehat{\gamma}^2)$, для компонент которой справедливы неравенства (4) и (5), будем называть *критической* в задаче $(\mathcal{BLP})$. Если для некоторой точки неравенства (4) и (5) выполняются с определённой точностью, будем называть её *приближённо критической.*

Что касается практической реализации локального поиска, нетрудно показать, в частности, что при выполнении на итерации s z^1-процедуры неравенства

$$F\big(z_s^1, z_{s+1}^2\big) - F\big(z_{s+1}^1, z_{s+1}^2\big) \leqslant \tau \tag{6}$$

точка $\big(z_s^1, w_s^1, \gamma_s^1; z_{s+1}^2, w_{s+1}^2, \gamma_{s+1}^2\big)$ является приближённо критической в задаче $(\mathcal{BLP})$ с точностью $\tau + \rho_s$ [10, 16]. Поэтому условие (6) может быть использовано в качестве критерия останова z^1-процедуры. Отметим, что здесь возможны и другие критерии останова, дающие другую точность критичности получаемой точки [9, 10, 15, 16].

Кроме того, отметим, что можно предложить «симметричный» вариант реализации метода локального поиска (z^2-процедуру), в котором вспомогательные задачи ЛП решаются в другом порядке (см. также [9, 10, 15, 16]).

3. Метод глобального поиска

Как известно, локальный поиск не обеспечивает, вообще говоря, достижения глобального решения в задачах с билинейной структурой [9, 10, 15, 16], поэтому далее предлагается использовать алгоритм глобального поиска в таких задачах [9, 15], базирующийся на теории d. c. минимизации [14]. С этой целью запишем целевую функцию задачи $(\mathcal{BLP})$ в виде разности двух выпуклых функций

$$F(z^1, z^2) = g(z^1, z^2) - f(z^1, z^2), \tag{7}$$

где $f(z^1, z^2) = \frac{1}{4}\|z^1 - z^2\|^2$, $g(z^1, z^2) = \frac{1}{4}\|z^1 + z^2\|^2$.

Обратим внимание на то, что функция $f(\cdot)$, задающая так называемую *базовую невыпуклость* в задаче $(\mathcal{BLP})$ (т. е. если $f \equiv 0$, то задача становится выпуклой), как и сама целевая функция $F(\cdot)$, зависит только от переменных z_1 и z_2. Можно сказать, что задача $(\mathcal{BLP})$ обладает свойством неполной (неполноразмерной) невыпуклости. Процесс глобального поиска в подобного сорта задачах несколько упрощается по сравнению с задачами с полной невыпуклостью (см., например, [10]).

В терминах исследуемой задачи теорема, характеризующая её глобальное решение (условия глобальной оптимальности), запишется следующим образом.

Теорема 3 [14]. *Если допустимая точка* $(\overline{z}^1, \overline{w}^1, \overline{\gamma}^1; \overline{z}^2, \overline{w}^2, \overline{\gamma}^2) \in D \triangleq Z_1 \times Z_2$ *является глобальным решением задачи* $(\mathcal{BLP})$, *то*

$$\begin{gathered} \forall(\widetilde{z}^1, \widetilde{z}^2, \beta) : (\widetilde{z}^1, \widetilde{z}^2) \in Pr_z(D) \\ \triangleq \{(z^1, z^2) \mid \exists(w^1, \gamma^1; w^2, \gamma^2) : (z^1, w^1, \gamma^1; z^2, w^2, \gamma^2) \in D\}, \\ \beta - f(\widetilde{z}^1, \widetilde{z}^2) = \zeta \triangleq F(\overline{z}^1, \overline{z}^2), \\ g(\widetilde{z}^1, \widetilde{z}^2) \leqslant \beta \leqslant \sup(g, D), \\ g(z^1, z^2) - \beta \geqslant \langle \nabla f(\widetilde{z}^1, \widetilde{z}^2), (z^1, z^2) - (\widetilde{z}^1, \widetilde{z}^2) \rangle \\ \qquad\qquad \forall \left(z^1, z^2\right) \in Pr_z(D). \end{gathered} \tag{8}$$

Если, кроме того,

$$\exists(u, v) \in Pr_z(D) : F\,(u, v) > F\left(\overline{z}^1, \overline{z}^2\right) \triangleq \zeta,$$

то условия (8) *достаточны для того, чтобы допустимая точка* $(\overline{z}^1, \overline{w}^1, \overline{\gamma}^1;$ $\overline{z}^2, \overline{w}^2, \overline{\gamma}^2)$ *была глобальным решением задачи* $(\mathcal{BLP})$.

Далее с использованием d. c. разложения (7), базируясь на условиях глобальной оптимальности (УГО) (8), запишем алгоритм глобального поиска в задаче $(\mathcal{BLP})$ с учётом её специфики. Согласно общей схеме глобального поиска [14, 15] помимо осуществления локального спуска алгоритм включает в себя такие этапы, как построение аппроксимации поверхности уровня выпуклой функции $f(\cdot)$, проверку точек аппроксимации на пригодность к дальнейшим исследованиям с помощью неравенства, следующего из УГО, дополнительного локального поиска и сравнения по целевой функции полученных точек с текущей критической.

Пусть заданы некоторая точка $\left(z_0^1, z_0^2\right) \in \mathbb{R}_+^l \backslash \{0\} \times \mathbb{R}_+^l \backslash \{0\}$, числовые последовательности $\{\tau_k\}$, $\{\delta_k\}$, $\tau_k, \delta_k > 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $\tau_k \downarrow 0$, $\delta_k \downarrow 0$, $k \to \infty$, числа $\beta_- \triangleq \inf\,(g, D)$ и $\beta_+ \triangleq \sup\,(g, D)$, точность решения задачи ε, множество направлений $\mathrm{Dir} = \{(r^i, h^i) \in \mathbb{R}^{2l} \mid (r^i, h^i) \neq 0,\ i = 1, \ldots, N\}$ и параметры алгоритма $M \in \mathbb{N}$ и $\nu \in \mathbb{R}$.

Шаг 0. Положить $k := 1$, $\left(\overline{z}_k^1, \overline{z}_k^2\right) := \left(z_0^1, z_0^2\right)$, $i := 1$, $\beta := \beta_-$, $\Delta\beta = \left(\beta_+ - \beta_-\right)/M$.

Шаг 1. Взяв точку $\left(\overline{z}_k^1, \overline{z}_k^2\right)$, с помощью z^1- или z^2-процедуры построить τ_k-критическую точку $\left(z_k^1, w_k^1, \gamma_k^1; z_k^2, w_k^2, \gamma_k^2\right) \in D$ в задаче $(\mathcal{BLP})$. Положить $\zeta_k := F\left(z_k^1, z_k^2\right)$.

Шаг 2. Если $\zeta_k < \varepsilon$, то стоп; $\left(z_k^1, w_k^1, \gamma_k^1; z_k^2, w_k^2, \gamma_k^2\right)$ — приближённое глобальное решение задачи.

Шаг 3. По точке $(r^i, h^i) \in \mathrm{Dir}$ построить точку (u^i, v^i) аппроксимации поверхности уровня $\mathcal{A}_k$ функции $f(\cdot)$ такую, что $f(u^i, v^i) = \beta - \zeta_k$.

Шаг 4. Если $g(u^i, v^i) > \beta+\nu\beta$, $i < N$ и $\beta < \beta_+$, то $i := i+1$ и перейти на шаг 3.

Шаг 5. Если $g(u^i, v^i) > \beta+\nu\beta$, $i = N$ и $\beta < \beta_+$, то $i := 1$, $\beta := \beta+\Delta\beta$ и перейти на шаг 3.

Шаг 6. Если $g(u^i, v^i) > \beta+\nu\beta$, $i = N$ и $\beta = \beta_+$, то стоп; $\left(z_k^1, w_k^1, \gamma_k^1; z_k^2, w_k^2, \gamma_k^2\right)$ — полученное решение задачи.

Шаг 7. Начиная с точки (u^i, v^i), специальным методом локального поиска построить δ_k-критическую точку $\left(\widehat{z}_i^1, \widehat{w}_i^1, \widehat{\gamma}_i^1; \widehat{z}_i^2, \widehat{w}_i^2, \widehat{\gamma}_i^2\right) \in D$ в задаче $(\mathcal{BLP})$.

Шаг 8. Если $F\left(\widehat{z}_i^1, \widehat{z}_i^2\right) < \varepsilon$, то стоп; $\left(\widehat{z}_i^1, \widehat{w}_i^1, \widehat{\gamma}_i^1; \widehat{z}_i^2, \widehat{w}_i^2, \widehat{\gamma}_i^2\right)$ — приближённое глобальное решение задачи.

Шаг 9. Если $F\left(\widehat{z}_i^1, \widehat{z}_i^2\right) \geqslant F\left(z_k^1, z_k^2\right)$, $i < N$, то положить $i := i + 1$ и вернуться на шаг 3.

Шаг 10. Если $F\left(\widehat{z}_i^1, \widehat{z}_i^2\right) \geqslant F\left(z_k^1, z_k^2\right)$, $i = N$ и $\beta < \beta_+$, то положить $\beta := \beta + \Delta\beta$, $i := 1$ и вернуться на шаг 3.

Шаг 11. Если $F\left(\widehat{z}_i^1, \widehat{z}_i^2\right) < F\left(z_k^1, z_k^2\right)$, то положить $\left(\overline{z}_{k+1}^1, \overline{w}_{k+1}^1, \overline{\gamma}_{k+1}^1; \overline{z}_{k+1}^2, \overline{w}_{k+1}^2, \overline{\gamma}_{k+1}^2\right) := \left(\widehat{z}_i^1, \widehat{w}_i^1, \widehat{\gamma}_i^1; \widehat{z}_i^2, \widehat{w}_i^2, \widehat{\gamma}_i^2\right)$, $k := k + 1$, $i := 1$, $\beta := \beta_-$ и перейти на шаг 1.

Шаг 12. Если $F\left(\widehat{z}_i^1, \widehat{z}_i^2\right) \geqslant F\left(z_k^1, z_k^2\right)$, $i = N$ и $\beta = \beta_+$, то стоп; $\left(z_k^1, w_k^1, \gamma_k^1; z_k^2, w_k^2, \gamma_k^2\right)$ — решение задачи.

Замечание 1. Отметим, что шаги 2 и 8 (дополнительные критерии останова) появились в алгоритме, поскольку в точке глобального минимума задачи $(\mathcal{BLP})$ целевая функция равна нулю. Нетрудно видеть, что в случае приближённого выполнения этого равенства после останова (см. теорему 1) получим приближённое решение задачи билинейной отделимости с точностью ε.

Как и ранее, при описании алгоритмов, основанных на теории глобального поиска (см., например, [9, 11, 14, 15, 17]) необходимо конкретизировать следующие моменты: выбор параметров алгоритма ν и M, влияющих на скорость и точность работы алгоритма, поиск чисел β_- и β_+, выбор множества направлений Dir и построение точек аппроксимации поверхности уровня на основе этого множества (на шаге 2 алгоритма). Поскольку задача $(\mathcal{BLP})$ по структуре является задачей билинейного программирования с несвязанными переменными, решение большинства этих вопросов проводится в соответствии с полученными ранее результатами [9, 15]. При этом конкретные значения всех параметров алгоритма, необходимых для его численной реализации, будут указаны ниже.

4. Генерация тестовых задач

При разработке новых методов решения задач всегда возникает вопрос о подборе тестовых примеров для апробации построенных алгоритмов. При этом для задач несимметричной билинейной отделимости в доступной литературе достаточного количества репрезентативных тестов обнаружить не удалось. В то же время, в отличие, скажем, от биматричных игр [11, 15], нельзя гарантировать существования решения исследуемой задачи билинейной отделимости для произвольных данных.

Поэтому для построения тестовых задач в работе предлагается следующая достаточно простая схема, основанная на определении 1 несимметричной билинейной отделимости.

Прежде всего построим матрицы A и B, строки которых будут координатами точек множеств $\mathcal{A}_2 \subset \mathbb{R}^2$ и $\mathcal{B}_2 \subset \mathbb{R}^2$, отделимых заданными прямыми $S_1^*(w_*^1, \gamma_*^1) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle w_*^1, x\rangle = \gamma_*^1,\ w_*^1 \in \mathbb{R}^2,\ \gamma_*^1 \in \mathbb{R}\}$ и $S_2^*(w_*^2, \gamma_*^2) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle w_*^2, x\rangle = \gamma_*^2,\ w_*^2 \in \mathbb{R}^2,\ \gamma_*^2 \in \mathbb{R}\}$. Для того чтобы задача изначально имела смысл, прямые не должны быть параллельны, т. е. компоненты вектора w_*^1 не должны быть соответственно пропорциональны компонентам вектора w_*^2.

Для построения матриц зададим числа m и l, определяющие количество точек в множествах $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{B}_2$ соответственно, и построим точки, формирующие эти множества $A^i = \left(\widetilde{a}_1^i, \widetilde{a}_2^i\right)$, $i = \overline{1, m}$, и $B^j = \left(\widetilde{b}_1^j, \widetilde{b}_2^j\right)$, $j = \overline{1, l}$, такие, что

$$\left.\begin{array}{l} -\langle A^i, w_*^1\rangle + \gamma_*^1 + \sigma \leqslant 0, \quad -\langle A^i, w_*^2\rangle + \gamma_*^2 + \sigma \leqslant 0, \quad i = \overline{1, m}, \\ \langle B^j, w_*^1\rangle - \gamma_*^1 + \sigma \leqslant 0 \ \text{ или } \ \langle B^j, w_*^2\rangle - \gamma_*^2 + \sigma \leqslant 0, \ \ j = \overline{1, l}, \end{array}\right\} \tag{9}$$

где σ — заданное число из полуинтервала $(0, 1]$, влияющее на близость точек множеств $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{B}_2$. Чем меньше значение этого параметра, тем ближе друг к другу находятся точки разных множеств. Нетрудно видеть, что при введении σ в систему (1) множества остаются билинейно отделимыми. В дальнейшем параметр σ будем называть *коэффициентом близости.* О его выборе подробнее будет сказано ниже.

Построение m точек множества $\mathcal{A}_2$, удовлетворяющих первым двум неравенствам системы (9), может быть осуществлено, например, следующим образом. Для каждого $i = \overline{1, m}$ первые два неравенства системы (9) преобразуем в равенства, вводя в неё произвольные числа $\alpha_1^i > 0$ и $\alpha_2^i > 0$:

$$-\langle A^i, w_*^1\rangle + \gamma_*^1 + \sigma + \alpha_1^i = 0, \quad -\langle A^i, w_*^2\rangle + \gamma_*^2 + \sigma + \alpha_2^i = 0.$$

Таким образом для каждого i получаем систему из двух линейных уравнений с двумя неизвестными $\widetilde{a}_1^i$ и $\widetilde{a}_2^i$, решение которой единственно вследствие непропорциональности компонент векторов w_*^1 и w_*^2.

Рассмотрим один из вариантов построения l точек множества $\mathcal{B}_2$. Для всех $j = \overline{1,l}$ третье и четвёртое неравенства системы (9) преобразуем в равенства, как и выше, и запишем совокупность

$$\langle B^j, w_*^1\rangle - \gamma_*^1 + \sigma + \beta_1^j = 0 \quad \text{или} \quad \langle B^j, w_*^2\rangle - \gamma_*^2 + \sigma + \beta_2^j = 0,$$

где $\beta_1^j > 0$ и $\beta_2^j > 0$. Введём в рассмотрение булеву переменную p, которая будет определяться случайным образом. Если $p = 0$, то будем считать, что должно выполняться первое равенство, если $p = 1$, то второе. Предположим, что $p = 0$, и рассмотрим уравнение

$$\widetilde{b}_1^j (w_*^1)_1 + \widetilde{b}_2^j (w_*^1)_2 - \gamma_*^1 + \sigma + \beta_1^j = 0.$$

Выбираем произвольное положительное β_1^j и фиксируем одну из переменных $\widetilde{b}_1^j$ или $\widetilde{b}_2^j$. Решая уравнение относительно другой переменной, получаем точку $B^j = \big(\widetilde{b}_1^j, \widetilde{b}_2^j\big)$. Аналогично действуем, если $p = 1$. Таким образом построены множества точек $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{B}_2$, для которых справедливо определение 1 билинейной отделимости, значит, задача $(\mathcal{BLP})$ в соответствии с теоремой 1 имеет хотя бы одно глобальное решение $(z_*^1, w_*^1, \gamma_*^1; z_*^2, w_*^2, \gamma_*^2)$, в котором значение целевой функции равно нулю.

На заключительном этапе генерации необходимо увеличить размерность точек множеств $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{B}_2$ из пространства $\mathbb{R}^2$ до $n > 2$. Это можно сделать, например, следующим образом: первые две координаты каждой из точек остаются неизменными, а остальные $n-2$ координат выбираются произвольно:

$$\begin{aligned} \widetilde{A}^i &= \big(\widetilde{a}_1^i, \widetilde{a}_2^i, a_3^i, \dots a_n^i\big), \quad \text{где } a_{i_1}^i \in \mathbb{R},\ i_1 = \overline{3,n},\ i = \overline{1,m}, \\ \widetilde{B}^j &= \big(\widetilde{b}_1^j, \widetilde{b}_2^j, b_3^j, \dots b_n^j\big), \quad \text{где } b_{j_1}^j \in \mathbb{R},\ j_1 = \overline{3,n},\ j = \overline{1,l}. \end{aligned} \tag{10}$$

Покажем, что при таком выборе координат точек свойство билинейной отделимости множеств в $\mathbb{R}^n$ сохраняется.

Утверждение 1. *Пусть множества $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$, состоящее из точек $A^i = \big(\widetilde{a}_1^i, \widetilde{a}_2^i\big)$, $i = \overline{1,m}$, и $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^2$, состоящее из точек $B^j = \big(\widetilde{b}_1^i, \widetilde{b}_2^i\big)$, $j = \overline{1,l}$, несимметрично билинейно отделимы прямыми $S_1^*(w_*^1, \gamma_*^1)$ и $S_2^*(w_*^2, \gamma_*^2)$. Тогда множества $\mathcal{A}_n \subset \mathbb{R}^n$ и $\mathcal{B}_n \subset \mathbb{R}^n$, состоящие из точек $\widetilde{A}^i$, $i = \overline{1,m}$, и $\widetilde{B}^j$, $j = \overline{1,l}$, построенных по правилам* (10), *билинейно отделимы парой гиперплоскостей*

$$H_1^* = H_1^*(\widetilde{w}^1, \widetilde{\gamma}^1) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle \widetilde{w}^1, x\rangle = \widetilde{\gamma}^1,\ \ \widetilde{w}^1 \in \mathbb{R}^n,\ \ \widetilde{\gamma}^1 \in \mathbb{R}\},$$

$$H_2^* = H_2^*(\widetilde{w}^2, \widetilde{\gamma}^2) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle \widetilde{w}^2, x \rangle = \widetilde{\gamma}^2,\ \ \widetilde{w}^2 \in \mathbb{R}^n,\ \ \widetilde{\gamma}^2 \in \mathbb{R}\},$$

где $\widetilde{w}^1 = (w_*^1, \underbrace{0, \ldots 0}_{n-2}),\ \ \widetilde{w}^2 = (w_*^2, \underbrace{0, \ldots 0}_{n-2}),\ \ \widetilde{\gamma}^1 = \gamma_*^1,\ \ \widetilde{\gamma}^2 = \gamma_*^2.$

Доказательство. Пусть множества $\mathcal{A}_2 \subset \mathbb{R}^2$ и $\mathcal{B}_2 \subset \mathbb{R}^2$ несимметрично билинейно отделимы в пространстве $\mathbb{R}^2$. Тогда для матриц A и B, построенных по этим множествам, выполняется система неравенств (1). Рассмотрим множества $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ и $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$, построенные по правилам (10). Нетрудно видеть, что, подставив $\widetilde{w}^1, \widetilde{\gamma}^1, \widetilde{w}^2, \widetilde{\gamma}^2$ в систему (1), получаем справедливые неравенства

$$\left.\begin{aligned} &-\langle \widetilde{A}^i, \widetilde{w}^1 \rangle + \widetilde{\gamma}^1 < 0, \quad -\langle \widetilde{A}^i, \widetilde{w}^2 \rangle + \widetilde{\gamma}^2 < 0,\ i = \overline{1, m}, \\ &\langle \widetilde{B}^j, \widetilde{w}^1 \rangle - \widetilde{\gamma}^1 < 0 \ \text{ или } \langle \widetilde{B}^j, \widetilde{w}^2 \rangle - \widetilde{\gamma}^2 < 0,\ j = \overline{1, l}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Система (11) представляет собой определение 1 билинейной отделимости множеств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, так что они являются несимметрично билинейно отделимыми гиперплоскостями H_1^* и H_2^*. Утверждение 1 доказано.

Итак, используя предложенную схему генерации тестовых примеров, можно построить задачу билинейной отделимости множеств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ с любым количеством точек в пространстве произвольной размерности.

5. Вычислительный эксперимент

Тестирование построенных алгоритмов проводилось на компьютере Intel Core 2 Duo P8400 с частотой ядер процессора 2.26 Ггц, 2 Гб оперативной памяти, программы были реализованы совместно с С. Ю. Пинигиным в системе MATLAB версии 7.11 (R2010b). Для решения вспомогательных задач линейного программирования использована встроенная в MATLAB функция linprog с установками по умолчанию [25]. В результате предварительных экспериментов в качестве алгоритма локального поиска выбрана z^1-процедура с критерием останова (6), где $\tau = 10^{-6}$. Все указанные параметры не изменялись на протяжении всего вычислительного эксперимента.

На первом этапе вычислительного эксперимента проводилось тестирование алгоритма локального поиска на задачах билинейной отделимости, сгенерированных с помощью схемы, которая описана в разд. 4. Для реализации этой схемы необходимо конкретизировать ряд параметров. Прямые для построения точек на плоскости выбираются следующим образом: $w_*^1,\ w_*^2$ — произвольные векторы, каждая компонента которых лежит в отрезке $[-10, 10]$, $\gamma_*^1,\ \gamma_*^2$ — произвольные числа из отрезка $[-5, 5]$. Параметры $\alpha_1^i,\ \alpha_2^i,\ i = \overline{1, m}$, и $\beta_1^j,\ \beta_2^j,\ j = \overline{1, l}$, выбираются

случайным образом из отрезка $[0,10]$. Фиксируемые координаты точек множества $\mathcal{B}$ на плоскости случайно выбираются из отрезков

$$\widetilde{b}_1^j \in \big[\min_{i=\overline{1,m}}\big(\widetilde{a}_1^i\big)-5, \max_{i=\overline{1,m}}\big(\widetilde{a}_1^i\big)+5\big], \quad \widetilde{b}_2^j \in \big[\min_{i=\overline{1,m}}\big(\widetilde{a}_2^i\big)-5, \max_{i=\overline{1,m}}\big(\widetilde{a}_2^i\big)+5\big].$$

Координаты $a_{i_1}^i \in \mathbb{R},\ i_1 = \overline{3,n},\ i = \overline{1,m},\ b_{j_1}^j \in \mathbb{R},\ j_1 = \overline{3,n},\ j = \overline{1,l}$, используемые для увеличения размерности точек множеств, выбираются случайно из отрезка $[-20,20]$. Для выбора всех произвольных значений использовался генератор псевдослучайных чисел, встроенный в систему MATLAB. Коэффициент близости σ принимал значения из конечного множества $\{0.1, 0.3, 0.7, 1.0\}$.

Таблица 1

Тестирование локального поиска

σ	$m=l$	n	N_S	*SolvLoc*	*LP*	T	T_A
1	50	2	1000	873	4480	2:12.37	0:00.13
1	50	10	1000	976	3745	2:29.75	0:00.15
1	200	30	100	83	41	9:21.64	0:05.62
1	200	50	100	79	34	9:48.27	0:05.88
1	500	100	10	7	43	16:36.33	1:39.63
1	800	200	10	7	45	38:07.71	3:48.77
0.7	50	2	1000	805	4328	2:20.93	0:00.14
0.7	50	10	1000	786	6234	3:12.58	0:00.19
0.7	200	30	100	61	405	9:47.66	0:05.88
0.7	200	50	100	69	601	11:24.38	0:06.84
0.7	500	100	10	6	23	13:21.22	1:20.12
0.7	800	200	10	5	43	41:31.09	4:09.11
0.3	50	2	1000	802	4431	2:25.76	0:00.15
0.3	50	10	1000	814	3876	2:13.82	0:00.13
0.3	200	30	100	59	44	9:58.44	0:05.98
0.3	200	50	100	62	632	11:32.45	0:06.92
0.3	500	100	10	3	22	13:01.83	1:18.18
0.3	800	200	10	2	43	42:01.10	4:12.11
0.1	50	2	1000	550	4431	3:03.43	0:00.18
0.1	50	10	1000	743	8371	5:11.12	0:00.31
0.1	200	30	100	35	412	10:34.12	0:06.34
0.1	200	50	100	47	611	12:12.78	0:07.33
0.1	500	100	10	1	24	11:36.41	1:09.64
0.1	800	200	10	1	43	42:59.32	4:17.93

Было проведено обширное тестирование алгоритма локального поиска на нескольких сериях сгенерированных задач с количеством точек в множествах $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ от 50 до 800 и размерностью этих точек от 2

до 200. Таким образом, суммарная размерность переменных в эквивалентной задаче билинейного программирования варьировалась от 106 до 2002. Наиболее интересные результаты проведённого тестирования представлены в табл. 1. В таблице использованы обозначения: N_S — количество задач в серии, $SolvLoc$ — количество задач, решённых только процедурой локального поиска, LP — общее число решённых вспомогательных задач ЛП, T — суммарное время работы программы ((часы:)мин:сек(.доли)), потраченное на все задачи серии, T_A — среднее время работы программы ((часы:)мин:сек(.доли)).

По результатам тестирования локального поиска можно заметить, что больше половины задач при значении коэффициента $\sigma = 1$ решаются одним лишь локальным поиском. При уменьшении коэффициента количество решённых локальным поиском задач падает, поэтому можно сделать предположение, что уменьшение коэффициента σ увеличивает сложность задачи. Кроме того, при увеличении количества точек множеств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ количество нерешённых локальным поиском задач также уменьшается, в то время как увеличение размерности пространства на долю решённых задач влияет незначительно.

Наконец, увеличение количества и размерности точек множеств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ ощутимо увеличивает время работы алгоритма, поскольку при этом приходится решать много задач ЛП большой размерности, время решения которых составляет значительную часть времени работы алгоритма.

На втором этапе вычислительного эксперимента проводилось тестирование алгоритма глобального поиска на сгенерированных задачах с большим количеством точек в множествах $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ в $\mathbb{R}^2$ (т. е. без этапа увеличения размерности точек отделяемых множеств), чтобы была возможность графической иллюстрации результатов работы алгоритма, за исключением самых простых задач при $\sigma = 1$. Все значения случайных параметров схемы генерации тестовых задач выбирались аналогично тестированию локального поиска.

Значениями параметров алгоритма глобального поиска были выбраны $\nu = 0.0$, $M = 10$. В качестве интервала одномерного поиска $[\beta_-, \beta_+]$ берём сравнительно грубые оценки $\beta_- = -100$, $\beta_+ = 100$. Этих значений оказалось достаточно для положительного, в целом, исхода глобального поиска. Локальный поиск, как уже говорилось ранее, проводился при помощи z^1-процедуры, которая, как показали предварительные вычислительные эксперименты, оказалась для построенных задач более эффективной.

В процессе предварительных вычислительных экспериментов уста-

новлено, что множества направлений Dir, предложенные для билинейных задач общего вида в [9, 15], оказались неэффективными при работе с задачами билинейной отделимости. Поэтому, принимая во внимание данные начальной постановки задачи билинейной отделимости с учётом информации из [9, 15], в качестве множества направлений использовано следующее множество, состоящее из $N = l^2/2$ векторов:

$$\mathrm{Dir} = \left\{ \left(z_k^1 + e^i + e^j, z_k^2 - e^i - e^j \right),\ i = 1, 2, \ldots, l,\ j = i, \ldots, l \right\},$$

где z_k^1 и z_k^2 — компоненты текущей критической точки, построенной на шаге 1 алгоритма глобального поиска, e^i, e^j — стандартные базисные орты в пространстве $\mathbb{R}^l$. Отметим, что это множество отличается от используемого при решении билинейных задач общего вида множеств направлений [9, 15] тем, что в нём у каждого вектора изменяется на единицу сразу две координаты текущей критической точки, а не одна.

Наиболее интересные результаты этого этапа вычислительного эксперимента приведены в табл. 2 с обозначениями: Loc_A — среднее количество запусков процедуры локального поиска для одной задачи серии, Uns — количество нерешённых с заданной точностью $\varepsilon = 10^{-5}$ задач.

Таблица 2

Глобальный поиск в задачах на плоскости

σ	$m = l$	N_S	$SolvLoc$	Loc_A	Uns	T	T_A
0.7	50	1000	883	1,46	0	0:26:54.77	0:01.61
0.7	100	1000	791	2,68	1	1:37:48.25	0:05.87
0.7	200	100	71	4,84	0	1:10:55.92	0:42.56
0.7	500	10	6	6,2	0	1:46:32.82	10:39.28
0.7	800	1	0	2	0	0:07:21.11	7:21.11
0.3	50	1000	798	1,92	0	0:38:43.32	0:02.32
0.3	100	1000	712	3,60	0	2:03:17.48	0:07.40
0.3	200	100	61	8,63	1	2:01:13.14	1:12.73
0.3	500	10	4	7,1	0	1:03:14.09	6:19.41
0.3	800	1	0	4	0	0:08:14.00	8:14.00
0.1	50	1000	512	3,11	0	1:13:39.67	0:04.42
0.1	100	1000	499	4,68	3	2:22:52.56	0:08.57
0.1	200	100	41	10,91	1	1:47:45.22	1:04.65
0.1	500	10	2	7,6	0	1:16:32.71	7:39.27
0.1	800	1	0	9	0	0:09:53.20	9:53.20

Из представленных в табл. 2 результатов можно видеть, что доля решённых задач с любым количеством точек в множествах $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ превышает 99%, что говорит об эффективности предлагаемого алгоритма

решения задач билинейной отделимости. Среднее количество запусков процедуры локального поиска невелико, что может быть связано с достаточно высокой репрезентативностью аппроксимации поверхности уровня на основе предложенного множества направлений. При этом с уменьшением коэффициента σ при сохранении остальных параметров значение Loc_A в целом увеличивается, что, в свою очередь, повышает время работы алгоритма, так что гипотеза об увеличении сложности задач при уменьшении значения σ подтверждается. Так, среднее время отыскания решения в задачах с коэффициентом близости 0.7 и с количеством точек 50 в каждом множестве равно примерно 1.5 с, а с коэффициентом 0.1 при этом же количестве точек — примерно 4.5 с. С увеличением числа точек в множествах $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ время, затраченное на отыскание глобального решения в каждой задаче, также растёт, что может быть связано с достаточно большим числом точек в аппроксимации поверхности уровня, точнее, с нелинейной зависимостью от размерности количества точек в множестве Dir.

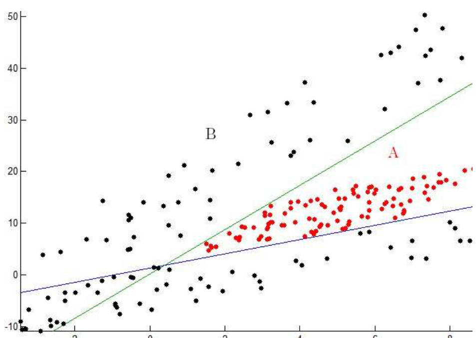

Рис. 2. $m = l = 100$, $\sigma = 0.7$

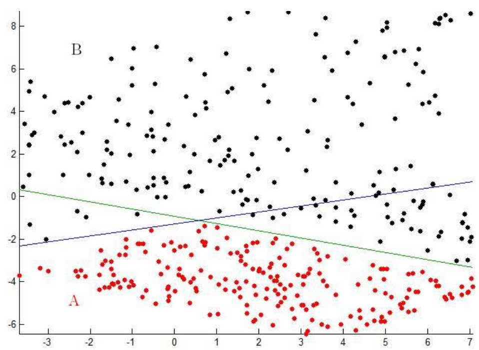

Рис. 3. $m = l = 200$, $\sigma = 0.7$

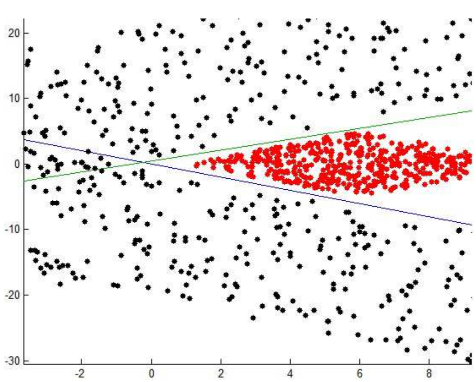

Рис. 4. $m = l = 500$, $\sigma = 0.3$

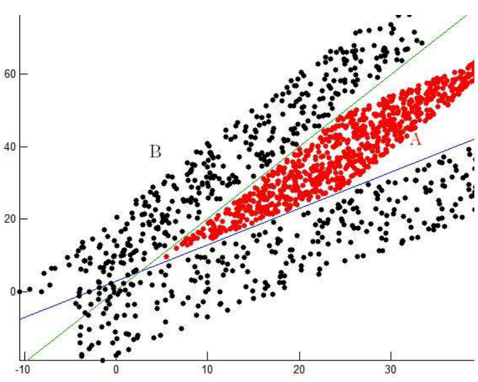

Рис. 5. $m = l = 800$, $\sigma = 0.1$

В целом можно сказать, что хотя решение было найдено не во всех сгенерированных задачах, эффективность работы глобального поиска в задачах на плоскости достаточно высока. Результаты решения некоторых задач на плоскости проиллюстрированы на рис. 2–5.

На третьем этапе вычислительного эксперимента проводилось исследование работы алгоритма глобального поиска на задачах, построенных в пространстве размерности больше чем 2. В табл. 3 приведены наиболее показательные результаты эксперимента.

Таблица 3

Глобальный поиск в задачах высокой размерности

σ	$m = l$	n	N_S	$SolvLoc$	Loc_A	Uns	T	T_A
0.7	50	5	1000	876	6.30	0	0:55:22	0:00:03
0.7	100	10	1000	902	16.89	0	3:13:28	0:00:12
0.7	100	30	1000	914	22.45	0	7:55:43	0:00:29
0.7	200	30	100	79	26.59	0	2:15:38	0:01:21
0.7	200	50	100	8	27.82	0	4:33:23	0:02:44
0.7	500	100	10	8	25.3	0	10:54:09	1:05:25
0.7	800	200	1	1	1	0	2:22:50	2:22:50
0.3	50	5	1000	812	15.52	0	0:48:50	0:00:03
0.3	100	10	1000	808	2.97	1	3:00:45	0:00:11
0.3	100	30	1000	812	10.08	0	6:59:41	0:00:25
0.3	200	30	100	73	2.29	0	1:56:40	0:01:10
0.3	200	50	100	74	6.07	0	5:24:29	0:03:15
0.3	500	100	10	5	15.9	0	13:06:39	1:18:40
0.3	800	200	1	0	16	0	9:04:53	9:04:53
0.1	50	5	1000	801	10.96	0	1:08:21	0:00:04
0.1	100	10	1000	704	6.76	1	4:05:01	0:00:15
0.1	100	30	1000	716	16.91	1	8:41:22	0:00:31
0.1	200	30	100	66	3.31	0	2:28:17	0:01:29
0.1	200	50	100	65	16.49	0	6:05:43	0:03:40
0.1	500	100	10	5	18.6	0	13:30:54	1:21:05
0.1	800	200	1	0	16	0	9:48:57	9:48:57

Анализируя данные таблицы можно видеть, что, как и прежде, увеличение числа точек и уменьшение коэффициента σ увеличивают сложность генерируемых задач, что отражает уменьшение количества задач, решённых только локальным поиском. По результатам эксперимента также можно подтвердить наблюдение, сделанное выше, что повышение размерности точек множеств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ практически не увеличивает сложности задачи. Доля всех задач с любым коэффициентом, решённых одним лишь локальным поиском, оказалась не ниже 50%. Время работы алгоритма значительно возрастает с увеличением размерности точек

и, например, время решения задачи с $n = 200,\ m = l = 800$ и $\sigma = 0.1$ составило почти 10 часов.

Однако, учитывая тот факт, что предложенные методы не используют напрямую информацию о структуре построенных задач билинейной отделимости, можно говорить о высокой эффективности алгоритма глобального поиска для решения таких задач большой размерности, поскольку доля решённых задач из всех сгенерированных составляет более 99.9 %, и о возможности применения разработанного подхода для решения содержательных задач классификации.

В заключение отметим, что проведённый вычислительный эксперимент подтвердил также эффективность решения тестовых задач несимметричной билинейной отделимости с помощью теории глобального поиска по сравнению с подходом из [21], где решались задачи в пространстве до размерности 100. При этом в [21] численные исследования ограничивались применением только локальных методов, что приводило к успеху в гораздо меньшем числе случаев.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Вапник В. Н.** Восстановление зависимостей по эмпирическим данным. М.: Наука, 1979. 449 с.
2. **Вапник В. Н., Червоненкис А. Я.** Теория распознавания образов. М.: Наука, 1974. 416 с.
3. **Васильев Ф. П.** Методы оптимизации. М.: Факториал-пресс, 2002. 824 с.
4. **Журавлёв Ю. И.** Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания или классификации // Пробл. кибернетики. 1978. Вып. 33. С. 5–68.
5. **Кельманов А. В., Пяткин А. В.** О сложности некоторых задач кластерного анализа векторных последовательностей // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2013. Т. 20, № 2. С. 47–57.
6. **Кельманов А. В., Хандеев В. И.** Полиномиальный алгоритм с оценкой точности 2 для решения одной задачи кластерного анализа // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2013. Т. 20, № 4. С. 36–45.
7. **Мазуров В. Д.** Метод комитетов в задачах оптимизации и классификации. М.: Наука, 1990. 246 с.
8. **Мазуров В. Д., Хачай М. Ю., Рыбин А. И.** Комитетные конструкции для решения задач выбора, диагностики и прогнозирования // Тр. ИММ УрО РАН. 2002. Т. 8, № 1. С. 66–102.
9. **Орлов А. В.** Численное решение задач билинейного программирования // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2008. Т. 48, № 2. С. 237–254.
10. **Орлов А. В.** Глобальный поиск оптимистических решений в двухуровневой задаче оптимального выбора тарифов телекоммуникационным опе-

ратором // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. «Математика». 2013. Т. 6, № 1. С. 57–71.

11. **Орлов А. В., Стрекаловский А. С.** О численном поиске ситуации равновесия в биматричных играх // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2005. Т. 45, № 6. С. 983–997.
12. **Рудаков К. В.** О некоторых классах алгоритмов распознавания (общие результаты). М.: ВЦ РАН СССР, 1980. 66 с.
13. **Рязанов В. В.** Комитетный синтез алгоритмов распознавания и классификации // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1981. Т. 21, № 6. С. 1533–1543.
14. **Стрекаловский А. С.** Элементы невыпуклой оптимизации. Новосибирск: Наука, 2003. 356 с.
15. **Стрекаловский А. С., Орлов А. В.** Биматричные игры и билинейное программирование. М.: Физматлит, 2007. 224 с.
16. **Стрекаловский А. С., Орлов А. В., Малышев А. В.** Локальный поиск в квадратично-линейной задаче двухуровневого программирования // Сиб. журн. вычисл. математики. 2010. Т. 13, № 1. С. 75–88.
17. **Стрекаловский А. С., Орлов А. В., Малышев А. В.** Численное решение одного класса задач двухуровневого программирования // Сиб. журн. вычисл. математики. 2010. Т. 13, № 2. С. 201–212.
18. **Astorino A., Gaudioso M.** Polyhedral separability through successive LP // J. Optim. Theory Appl. 2002. Vol. 112, No. 2. P. 265–293.
19. **Astorino A., Gaudioso M.** A fixed-center spherical separation algorithm with kernel transformations for classification problems // Comput. Manage. Sci. 2009. Vol. 6, No. 3. P. 357–372.
20. **Bagirov A. M., Rubinov A. M., Soukhoroukova N. V., Yearwood J.** Unsupervised and supervised data classification via nonsmooth and global optimization // Top. 2003. Vol. 11, No. 1. P. 1–75.
21. **Bennett K. P., Mangasarian O. L.** Bilinear separation of two sets in n-space // Comput. Optim. Appl. 1993. Vol. 2, No. 3. P. 207–227.
22. **Mangasarian O. L.** Linear and nonlinear separation of patterns by linear programming // Oper. Res. 1965. Vol. 13, No. 3. P. 444–452.
23. **Mangasarian O. L.** Mathematical programming in neural networks // ORSA J. Computing. 1993. Vol. 5, No. 4. P. 349–360.
24. **Mangasarian O. L.** Misclassification minimization // J. Global Optim. 1994. Vol. 5, No. 4. P. 309–323.
25. MATLAB — The language of technical computing. URL: http://www.mathworks.com/products/matlab/ (дата обращения: 25.03.2014)
26. **Megiddo N.** On the complexity of polyhedral separability // Discrete Comput. Geom. 1988. Vol. 3, No. 4. P. 325–337.
27. **Rosen J. B.** Pattern separation by convex programming // J. Math. Anal. Appl. 1965. Vol. 10. P. 123–134.

28. **Shavlik J. W., Mooney R. J., Towell G. G.** Symbolic and neural network learning algorithms: An experimental comparison // Machine Learning. 1991. Vol. 6, No. 2. P. 111–143.
29. **Zhang G. P.** Neural networks for classification: a survey // IEEE Trans. Systems, Man and Cybernetics. Part C: Applications and reviews. 2000. Vol. 30, No. 4. P. 451–462.

Андрей Васильевич Орлов

Статья поступила
25 марта 2014 г.

Исправленный вариант —
26 августа 2014 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
January–February 2015. Volume 22, No. 1. P. 64–85

UDC 519.853.4

NUMERICAL SEARCH FOR GLOBAL SOLUTIONS IN PROBLEMS OF NON-SYMMETRIC BILINEAR SEPARABILITY

A. V. Orlov[1]

[1]Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS,
134 Lermontov St., 664033 Irkutsk, Russia
e-mail: anor@icc.ru

Abstract. The paper is devoted to the bilinear separability problem of two sets (the non-symmetrical case). The optimization approach to the problem is applied. This approach is based on the reduction of the bilinear separability problem to an equivalent nonconvex bilinear optimization problem with disjoint constraints. The latter problem is solved by Global Search Theory developed by A. S. Strekalovsky. According to that theory, the local and global search methods for the problem under scrutiny were elaborated. Computational testing of the developed methods has shown the competitive efficiency of the approach on a rather large number of test problems of bilinear separability. Ill. 5, tab. 3, bibliogr. 29.

Keywords: classification problem, bilinear separability, optimization approach, local search, global search, test problem generation, numerical experiment.

REFERENCES

1. **V. N. Vapnik**, *Vosstanovlenie zavisimostei po empiricheskim dannym* (Restoring Dependencies from Empirical Data), Nauka, Moscow, 1979.
2. **V. N. Vapnik** and **A. Ya. Chervonenkis**, *Teoriya raspoznavaniya obrazov* (The Theory of Pattern Recognition), Nauka, Moscow, 1974.
3. **F. P. Vasiliev**, *Metody optimizatsii* (Optimization Methods), Faktorial-Press, Moscow, 2002.
4. **Yu. I. Zhuravlev**, On an algebraic approach to solving problems of recognition or classification, in S. V. Yablonskii, ed., *Problemy kibernetiki* (Problems of Cybernetics), Vol. 33, pp. 5–68, Nauka, Moscow, 1978.
5. **A. V. Kel'manov** and **A. V. Pyatkin**, On complexity of some problems of cluster analysis of vector sequences, *J. Appl. Ind. Math.,* **7**, No. 3, 363–369, 2013.
6. **A. V. Kel'manov** and **V. I. Khandeev**, A 2-approximation polynomial algorithm for a clustering problem, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **20**, No. 4, 36–45, 2013. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **7**, No. 4, 515–521, 2013.
7. **V. D. Mazurov**, *Metod komitetov v zadachakh optimizatsii i klassifikatsii* (The Committee Method in Problems of Optimization and Classification), Nauka, Moscow, 1990.
8. **V. D. Mazurov, M. Yu. Khachai**, and **A. I. Rybin**, Committee constructions for solving problems of selection, diagnostics, and prediction, *Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN,* **8**, No. 1, 66–102, 2002. Translated in *Proc. Steklov Inst. Math.,* Supplement Issue 1, S67–S101, 2002.
9. **A. V. Orlov**, Numerical solution of bilinear programming problems, *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.,* **48**, No. 2, 237–254, 2008. Translated in *Comput. Math. Math. Phys.,* **48**, No. 2, 225–241, 2008.
10. **A. V. Orlov**, Global search for optimistic solutions in a bilevel problem of optimal tariff choice by a telecommunication company, *Izv. Irkutsk. Gos. Univ., Ser. Mat.,* **6**, No. 1, 57–71, 2013.
11. **A. V. Orlov** and **A. S. Strekalovsky**, On numerical search for the equilibria in bimatrix games, *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.,* **45**, No. 6, 983–997, 2005. Translated in *Comput. Math. Math. Phys.,* **45**, No. 6, 947–960, 2005.
12. **K. V. Rudakov**, *O nekotorykh klassakh algoritmov raspoznavaniya: obshchie rezul'taty* (On Some Classes of Pattern Recognition Algorithms: General Results), VTs AN SSSR, Moscow, 1980.
13. **V. V. Ryazanov**, Committee synthesis of recognition and classification algorithms, *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.,* **21**, No. 6, 1533–1543, 1981. Translated in *USSR Comput. Math. Math. Phys.,* **21**, No. 6, 172–182, 1981.
14. **A. S. Strekalovsky**, *Elementy nevypukloi optimizatsii* (The Elements of Non-convex Optimization), Nauka, Novosibirsk, 2003.
15. **A. S. Strekalovsky** and **A. V. Orlov**, *Bimatrichnye igry i bilineinoe programmirovanie* (Bimatrix Games and Bilinear Programming), Fizmatlit, Moscow, 2007.

16. **A. S. Strekalovsky, A. V. Orlov**, and **A. V. Malyshev**, Local search in a quadratic-linear bilevel programming problem, *Sib. Zh. Vychisl. Mat.,* **13**, No. 1, 75–88, 2010. Translated in *Numer. Anal. Appl.,* **3**, No. 1, 59–70, 2010.
17. **A. S. Strekalovsky, A. V. Orlov**, and **A. V. Malyshev**, Numerical solution of a class of bilevel programming problems, *Sib. Zh. Vychisl. Mat.,* **13**, No. 2, 201–212, 2010. Translated in *Numer. Anal. Appl.,* **3**, No. 2, 165–173, 2010.
18. **A. Astorino** and **M. Gaudioso**, Polyhedral separability through successive LP, *J. Optim. Theory Appl.,* **112**, No. 2, 265–293, 2002.
19. **A. Astorino** and **M. Gaudioso**, A fixed-center spherical separation algorithm with kernel transformations for classification problems, *Comput. Manag. Sci.,* **6**, No. 3, 357–372, 2009.
20. **A. M. Bagirov, A. M. Rubinov, N. V. Soukhoroukova**, and **J. Yearwood**, Unsupervised and supervised data classification via nonsmooth and global optimization, *Top,* **11**, No. 1, 1–75, 2003.
21. **K. P. Bennett** and **O. L. Mangasarian**, Bilinear separation of two sets in n-space, *Comput. Optim. Appl.,* **2**, No. 3, 207–227, 1993.
22. **O. L. Mangasarian**, Linear and nonlinear separation of patterns by linear programming, *Oper. Res.,* **13**, No. 3, 444–452, 1965.
23. **O. L. Mangasarian**, Mathematical programming in neural networks, *ORSA J. Comput.,* **5**, No. 4, 349–360, 1993.
24. **O. L. Mangasarian**, Misclassification minimization, *J. Glob. Optim.,* **5**, No. 4, 309–323, 1994.
25. MATLAB — The Language of Technical Computing. Available at http://www.mathworks.com/ products/matlab/. Accessed Mar. 25, 2014.
26. **N. Megiddo**, On the complexity of polyhedral separability, *Discrete Comput. Geom.,* **3**, No. 4, 325–337, 1988.
27. **J. B. Rosen**, Pattern separation by convex programming, *J. Math. Anal. Appl.,* **10**, 123–134, 1965.
28. **J. W. Shavlik, R. J. Mooney**, and **G. G. Towell**, Symbolic and neural network learning algorithms: An experimental comparison, *Machine Learning,* **6**, No. 2, 111–143, 1991.
29. **G. P. Zhang**, Neural networks for classification: A survey, *IEEE Trans. Syst. Man Cybern., Part C: Appl. Rev.,* **30**, No. 4, 451–462, 2000.

Andrei V. Orlov

Received
25 March 2014
Revised
26 August 2014