

ЦИКЛИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРАФОВ
ШЕСТИУГОЛЬНОЙ РЕШЁТКИ *)

П. А. Иржавский¹

¹Белорусский гос. университет,
пр. Независимости, 4, 220030 Минск, Беларусь
e-mail: irzhavski@bsu.by

Аннотация. Исследованы циклические свойства топологических графов шестиугольной решётки. Получено достаточное условие гамильтоновости таких графов. Найден наименьший 2-связный негамильтонов топологический граф шестиугольной решётки. Установлена верхняя оценка коэффициента сжатости изучаемого класса графов. Ил. 17, библиогр. 18.

Ключевые слова: плоский граф, шестиугольная решётка, гамильтонов цикл, коэффициент сжатости.

Введение

Граф называется *гамильтоновым*, если в нём имеется *гамильтонов цикл*, т. е. простой цикл, содержащий все вершины этого графа. К проблеме гамильтоновости графов, а также к её взвешенному аналогу — задаче о коммивояжёре — проявляется устойчивый интерес в течение многих лет, а исследование этих задач представляет собой одно из магистральных направлений теории графов и комбинаторной оптимизации [14].

Известно, что задача распознавания гамильтоновости графа является NP-полной в общем случае [13] и остаётся таковой даже для графов из многих узких классов. В частности, эта задача NP-полна для графов квадратной [12], треугольной [10] или шестиугольной [7] решётки, для планарных кубических 3-связных графов [9], для планарных кубических циклически 4-связных графов [1], а также для двудольных планарных 2-связных графов с максимальной степенью 3 [6]. В то же время известны классы графов, для которых задача о гамильтоновом цикле разрешима за полиномиальное время. Например, такими классами являются сплошные графы квадратной решётки [17], локально связанные графы

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф13К-078).

треугольной решётки [3, 10] и 3-связные топологические графы квадратной решётки [18]. Исследование полиномиальной разрешимости задачи о гамильтоновом цикле для многих классов графов имеет не только теоретический, но и практический интерес.

Все рассматриваемые нами графы являются неориентированными графами без петель и, если не оговорено обратное, считаются связными. В случае, когда в графе допускаются кратные рёбра, используется термин *мультиграф*. Под цепью далее понимается простая цепь, под циклом — простой цикл. Стандартные понятия теории графов, не определяемые в статье, можно найти в [2].

Плоским графом называем граф, вершины и рёбра которого уложены на плоскости таким образом, что никакие два ребра не имеют общих точек кроме, возможно, концевых вершин. Граф *планарен*, если он изоморфен некоторому плоскому графу. *Гранью* плоского графа называется максимальное по включению множество точек плоскости, каждая пара которых может быть соединена жордановой кривой, не пересекающей рёбра графа. Через $f(G)$ обозначим множество всех граней плоского графа G . *Граница грани* — множество вершин и рёбер, принадлежащих этой грани. Напомним, что вершины и рёбра границы всякой грани конечного плоского 2-связного графа образуют цикл. Единственная неограниченная грань конечного плоского графа называется *внешней*, остальные грани — *внутренними*. *Контур* $C(G)$ конечного плоского графа G — граница внешней грани этого графа. Две вершины, инцидентные ребру контура, называются *соседними по контуру*. Для подмножества X вершин графа G обозначим через $G(X)$ подграф графа G , порождённый множеством X .

Для плоского рёберно 2-связного графа G *геометрически двойственный* к G мультиграф G^* определяется следующим образом. Внутри каждой грани $F_i \in f(G)$ выберем по одной точке v_i^* . Эти точки будут вершинами мультиграфа G^* . Каждому ребру e графа G поставим в соответствие жорданову кривую e^* , которая соединяет вершины v_i^* , лежащие в гранях, границы которых содержат ребро e , и из всех рёбер графа G пересекает только e . Кривые e^* образуют множество рёбер мультиграфа G^* .

Дальнейшее изложение будет связано с прямоугольной декартовой системой координат, ось абсцисс которой направлена слева направо, а ось ординат — снизу вверх. Отрезок в \mathbb{R}^2 будем называть *вертикальным* (соответственно *горизонтальным*), если содержащая его прямая параллельна оси ординат (соответственно оси абсцисс). Два отрезка называ-

ются *параллельными*, если они лежат на параллельных прямых.

Обозначим через H^∞ бесконечный плоский граф, соответствующий регулярному замощению плоскости \mathbb{R}^2 конгруэнтными правильными шестиугольниками. Вершины графа H^∞ — точки с декартовыми координатами $(x\sqrt{3}/2, x/2 + y)$, где x и y — целые числа, $x \not\equiv y \pmod{3}$. Две вершины смежны в H^∞ тогда и только тогда, когда евклидово расстояние между соответствующими точками равно 1. Аналогично через T^∞ обозначим бесконечный плоский граф, соответствующий регулярному замощению плоскости \mathbb{R}^2 конгруэнтными правильными треугольниками. Вершинами графа T^∞ являются точки плоскости с декартовыми координатами $(\sqrt{3}(x + y/2), 3y/2)$, где x и y — целые числа. Две вершины смежны в T^∞ тогда и только тогда, когда евклидово расстояние между соответствующими точками равно $\sqrt{3}$. Будем также считать, что H^∞ и T^∞ — геометрические графы, т. е. графы, уложенные на плоскости так, что их рёбра представляют собой замкнутые прямолинейные отрезки.

Произвольный конечный порождённый подграф графа H^∞ называется *графом шестиугольной решётки*. Будем рассматривать такой граф одновременно как граф и геометрическую фигуру (*геометрическую форму* графа), образованную всеми точками, принадлежащими рёбрам этого графа, и внутренними точками всех внутренних граней, границы которых являются правильными шестиугольниками. Аналогично определяются граф треугольной решётки и его геометрическая форма. Всюду далее предполагаем, что граф шестиугольной (соответственно треугольной) решётки плоский и его плоская укладка наследует расположение вершин и рёбер в \mathbb{R}^2 от графа H^∞ (соответственно T^∞). Контур графа G треугольной решётки также будем рассматривать одновременно как контур $C(G)$ плоского графа G и как множество всех точек, принадлежащих рёбрам $C(G)$.

Конечный связный подграф G графа H^∞ (не обязательно порождённый) называется *сплошным*, если в нём нет дыр (*дыра* — внутренняя грань графа G , содержащая строго внутри себя хотя бы одну внутреннюю точку ребра графа H^∞). Граф шестиугольной решётки называется *линейно выпуклым*, если пересечение геометрической формы этого графа с любой прямой ℓ , содержащей ребро графа H^∞ , либо пусто, либо является отрезком (точкой) прямой ℓ . Аналогично определяются сплошной подграф графа T^∞ и линейно выпуклый граф треугольной решётки. *Топологическим графом* шестиугольной решётки будем называть кубический (3-регулярный) граф, гомеоморфный сплошному подграфу графа H^∞ . *Топологическим графом линейно выпуклого графа* шестиуголь-

ной решётки будем называть топологический граф шестиугольной решётки, гомеоморфный линейно выпуклому графу шестиугольной решётки.

Графы шестиугольной и треугольной решёток являются основным объектом нашего исследования. Добавим несколько слов о графах квадратной решётки. *Граф квадратной решётки* — это конечный порождённый подграф бесконечного плоского графа S^∞ , ассоциированного с целочисленной решёткой \mathbb{Z}^2 . *Топологический граф* квадратной решётки — граф минимальной степени 3, гомеоморфный сплошному подграфу графа S^∞ . Остальные понятия, связанные с графами решёток, переносятся на графы квадратной решётки без существенных изменений.

Целью настоящей статьи является исследование циклических свойств топологических графов шестиугольной решётки, в частности, гамильтоновости этих графов. В разд. 1 формулируются основные результаты проведённого исследования и излагаются общие идеи доказательств, разд. 2 содержит доказательства утверждений.

1. Основные результаты

В [7] высказана следующая гипотеза о сложности задачи распознавания гамильтоновости сплошного порождённого подграфа графа H^∞ , называемого в [7] *сплошным графом шестиугольной решётки*.

Гипотеза 1 [7]. *Задача распознавания гамильтоновости сплошного графа шестиугольной решётки разрешима за полиномиальное время.*

Ясно, что связный линейно выпуклый граф шестиугольной решётки является сплошным. Следующая теорема подтверждает гипотезу 1 для линейно выпуклых графов шестиугольной решётки.

Теорема 1. *Связный линейно выпуклый граф G шестиугольной решётки гамильтонов тогда и только тогда, когда все вершины графа G принадлежат его контуру и имеют степени не меньше 2.*

В [18] впервые исследованы гамильтоновы свойства топологических графов квадратной решётки и доказана

Теорема 2. *Всякий 3-связный топологический граф квадратной решётки гамильтонов.*

Пусть G — граф из формулировки теоремы 2. Доказательство этой теоремы, приведённое в [18], использует тот простой факт, что граф G^+ , который получается из G добавлением новой вершины и рёбер, соединяющих эту вершину со всеми вершинами контура $C(G)$, является планар-

ным и 4-связным. Остаётся напомнить, что граф, получающийся из планарного 4-связного графа удалением любой вершины, гамильтонов [16].

Основным результатом нашей статьи является

Теорема 3. *Всякий топологический граф линейно выпуклого графа шестиугольной решётки гамильтонов.*

Пусть G — граф из формулировки теоремы 3. Заметим, что приём, использованный в [18] при доказательстве теоремы 2, не применим для доказательства теоремы 3, поскольку граф G^+ не является 4-связным. Наше доказательство теоремы 3 опирается на связь гамильтоновых циклов в графе G с деревьями в графе, геометрически двойственном к G (см., например, [5]). Похожая двойственная формулировка задачи о гамильтоновом цикле для плоского 3-связного графа предложена в [4].

Теорема 4 [5, разд. III.9]. *Для плоского кубического графа G следующие утверждения эквивалентны:*

- (i) G гамильтонов;
- (ii) $V(G^*)$ имеет разбиение $\{V_1, V_2\}$, при котором и $G^*(V_1)$, и $G^*(V_2)$ являются деревьями.

Кроме того, если задано разбиение, описанное в (ii), и $F' := \{F_v \in f(G) \mid v \in V_1\}$, то рёбра графа G , принадлежащие границе точно одного элемента из F' , определяют гамильтонов цикл графа G .

Доказательство теоремы 3 носит конструктивный характер, что на основе теоремы 1 даёт линейный алгоритм построения гамильтонова цикла в графе из рассматриваемого класса.

Нетрудно показать, что топологический граф линейно выпуклого графа шестиугольной решётки является 3-связным. Предполагается, что теорему 3 можно обобщить на случай 3-связного топологического графа шестиугольной решётки, поскольку каждый такой граф удовлетворяет условиям известной гипотезы Барнетта [8].

Гипотеза 2. *Всякий планарный кубический 3-связный граф, каждая внутренняя грань которого содержит не более шести вершин, гамильтонов.*

Однако в теореме 3 условие линейной выпуклости графа шестиугольной решётки нельзя заменить условием 2-связности его топологического графа, поскольку существует бесконечно много негамильтоновых 2-связных топологических графов шестиугольной решётки. Нами найден наименьший из них.

Теорема 5. *Наименьший негамильтонов 2-связный топологический граф шестиугольной решётки имеет 16 вершин и единствен с точностью до изоморфизма (рис. 1).*

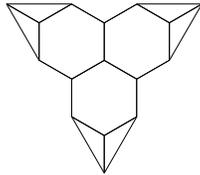


Рис. 1. Наименьший негамильтонов 2-связный топологический граф шестиугольной решётки

Обозначим через $|G|$ порядок конечного графа G , а через $h(G)$ — наибольшую из длин простых циклов в графе G . Коэффициентом сжатости [18] бесконечного семейства \mathcal{G} графов называется величина $\liminf_{G_n \in \mathcal{G}} \frac{h(G_n)}{|G_n|}$, где точная нижняя грань берётся по всем последовательностям, состоящим из различных графов из \mathcal{G} (см. также [11]).

Серия результатов, касающихся коэффициента сжатости для класса графов квадратной решётки и класса топологических графов этой решётки, получена в [18], в том числе

Теорема 6. *Коэффициент сжатости для класса 2-связных топологических графов квадратной решётки не превосходит $16/17$.*

Для класса 2-связных топологических графов шестиугольной решётки нами установлена более сильная оценка на коэффициент сжатости.

Теорема 7. *Коэффициент сжатости для класса 2-связных топологических графов шестиугольной решётки не превосходит $8/9$.*

2. Доказательства

Для обоснования теоремы 1 нам потребуется

Лемма 1. *Пусть G — линейно выпуклый граф шестиугольной решётки, степени всех вершин которого равны 2 или 3, и e — произвольное ребро графа G . Тогда все вершины и рёбра хотя бы одной из двух шестиугольных граней графа H^∞ , содержащих ребро e , принадлежат графу G и никакие две соседние вершины контура графа G не имеют одновременно степень 3.*

Доказательство. Здесь и далее будем говорить, что *грань графа H^∞ принадлежит графу G* , если граф G содержит все вершины и рёбра этой грани. Предположим, что существуют линейно выпуклый граф G шестиугольной решётки, степени всех вершин которого равны 2 или 3, и $e \in E(G)$, при этом обе шестиугольные грани графа H^∞ , содержащие ребро e , не принадлежат графу G и его геометрической форме.

Пусть ребро e смежно в графе G двум непараллельным рёбрам, которые, в свою очередь, не смежны друг с другом. Тогда G содержит две вершины, лежащие на прямой ℓ , параллельной ребру e и проходящей через рёбра графа H^∞ , а отрезок прямой ℓ между этими вершинами не принадлежит геометрической форме графа G (рис. 2). Это противоречит условию линейной выпуклости графа G . Значит, в графе G ребро e смежно только двум параллельным рёбрам и обе вершины, инцидентные e , имеют степень 2.

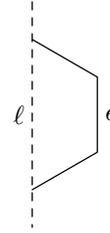


Рис. 2. Иллюстрация к доказательству леммы 1

Рассмотрим в графе G ребро e' , смежное с e . Одна из граней графа H^∞ , содержащих это ребро, содержит также и ребро e , а значит, не принадлежит графу G . Другая грань графа H^∞ , содержащая e' , также не принадлежит графу G , поскольку $E(G)$ не содержит ребра, смежного рёбрам e и e' . Следовательно, ребро e' так же, как и ребро e , смежно ровно двум рёбрам, лежащим на параллельных прямых. Продолжая рассуждение по индукции, получаем противоречие с тем, что граф G конечный, откуда следует, что хотя бы одна из двух шестиугольных граней графа H^∞ , содержащих ребро e , принадлежит графу G .

Осталось заметить, что если оба конца ребра e имеют степень 3, то обе шестиугольные грани графа H^∞ , содержащие ребро e , принадлежат графу G , т. е. концы ребра e не являются соседними по контуру графа G . Лемма 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. ДОСТАТОЧНОСТЬ очевидна — контур графа является гамильтоновым циклом.

НЕОБХОДИМОСТЬ. Если все вершины графа G имеют степень 2, то G изоморфен циклу длины 6, и утверждение теоремы очевидно. Предположим, что граф G содержит гамильтонов цикл и хотя бы одну вершину степени 3. Рассмотрим максимальные по включению цепи длины 2 и больше, все промежуточные вершины которых имеют степень 2. Все такие цепи являются подцепями гамильтонова цикла. С другой стороны, конец каждой из этих цепей имеет степень 3. Тогда по лемме 1 конец каждой такой цепи, состоящей из вершин и рёбер контура, является концом ещё одной такой цепи, также состоящей из вершин и рёбер контура. Значит, весь цикл, состоящий из вершин и рёбер контура, является подцепью гамильтонова цикла. Теорема 1 доказана.

Для доказательства теоремы 3 нам потребуются леммы 2–4.

Лемма 2. В каждом выпуклом шестиугольнике с углами, равными $2\pi/3$, существует пара параллельных сторон, для которых найдётся перпендикулярный им отрезок, оба конца которого лежат на этих сторонах.

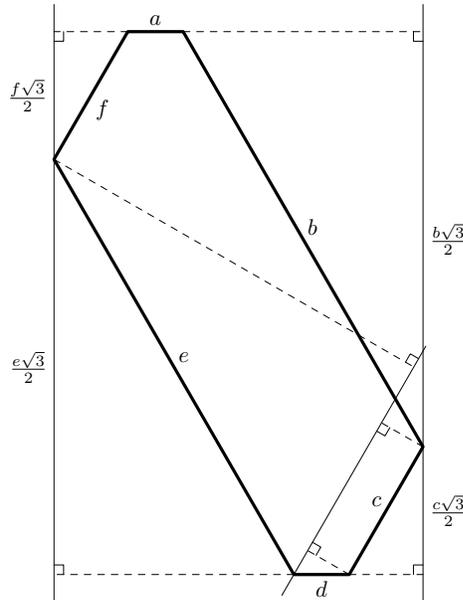


Рис. 3. Иллюстрация к доказательству леммы 2

Доказательство. Обозначим стороны выпуклого шестиугольника в порядке обхода буквами a, b, c, d, e и f и будем считать, что эти же буквы означают также длины соответствующих сторон. Рассмотрев проекции всех сторон на прямую, перпендикулярную стороне d (рис. 3), получим $b\sqrt{3}/2 + c\sqrt{3}/2 = e\sqrt{3}/2 + f\sqrt{3}/2$, или $b + c = e + f$.

Теперь предположим, что утверждение леммы не выполняется. Тогда любая прямая, пересекающая одну из сторон под прямым углом, пересекает сторону, не параллельную первой. Очевидно, что такая прямая не может пересекать сторону, смежную данной, во внутренней точке.

Если среди прямых, перпендикулярных стороне c и проходящих через неё, одна пересекает сторону e , а другая — сторону a , то обязательно найдётся прямая, пересекающая сторону f . Значит, все такие прямые пересекают одну и ту же сторону шестиугольника, отличную от c , во внутренних точках. Не нарушая общности, будем считать, что это сторона e . Тогда рассматривая перпендикуляр к стороне c , проходящий через общую со стороной b вершину, и проекции сторон c, d и e на прямую, параллельную стороне c , получаем $c + d/2 < e/2$ (см. рис. 3).

Если перпендикуляры к стороне b пересекают сторону f во внутренних точках, то аналогично получаем $b + a/2 < f/2$. Тогда

$$e/2 + f/2 > b + c + a/2 + d/2 = e + f + a/2 + d/2,$$

что невозможно, поскольку длины сторон положительны.

Следовательно, перпендикуляры к стороне b пересекают сторону d во внутренних точках и $b + c/2 < d/2$. Тогда $b + 3c/2 + d/2 < e/2 + d/2$, т. е. $e/2 > b + 3c/2 = e + f + c/2$, что также невозможно. Из полученного противоречия следует утверждение леммы. Лемма 2 доказана.

Назовём *обобщённым шестиугольником* точку, отрезок или выпуклый многоугольник, имеющий не более шести сторон. Будем считать, что у обобщённого шестиугольника ровно шесть сторон (некоторые из них имеют нулевую длину) и шесть углов между ними.

Замечание. Рассмотрим последовательность выпуклых шестиугольников с углами, равными $2\pi/3$, и сторонами длины $a, b, \varepsilon_n, d, e, f + \varepsilon_n$. Устремляя ε_n к нулю, лемму 2 можно обобщить на случай, когда допускается одна сторона нулевой длины (или две параллельные стороны нулевой длины, если $f = 0$). Совершая до трёх таких предельных переходов, расширяем лемму на случай обобщённого шестиугольника с любым числом сторон нулевой длины.

Лемма 3. Пусть G — связный линейно выпуклый граф шестиугольной решётки и F — граф, полученный из мультиграфа G^* удалением вершины, соответствующей внешней грани графа G . Тогда F является линейно выпуклым графом треугольной решётки. При этом контур графа F представляет собой обобщённый шестиугольник со сторонами, параллельными рёбрам графа T^∞ .

Доказательство. Если вершины графа F расположить в центрах внутренних граней графа G , а рёбра графа F сделать прямолинейными отрезками, то легко видеть, что F будет графом треугольной решётки. Из условия линейной выпуклости графа G и леммы 1 следует, что если вершины v_1 и v_2 в изображённом на рис. 4 фрагменте принадлежат графу F , то вершины u_1 и u_2 также принадлежат графу F . Кроме того, очевидно, что граф F связан.

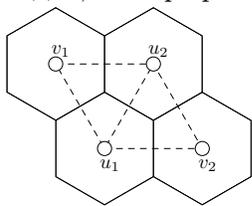


Рис. 4. Иллюстрация к доказательству леммы 3

Теперь с помощью индукции докажем следующее утверждение. Пусть S — множество вершин графа F , порождающее связный подграф $F(S)$. Тогда S является подмножеством множества \tilde{S} вершин графа F , для которого подграф $F(\tilde{S})$ является сплошным подграфом графа T^∞ , а контур этого подграфа представляет собой обобщённый шестиугольник.

База индукции состоит в том, что для любого одновершинного множества S множество \tilde{S} совпадает с S . Допустим, что утверждение доказа-

но для всех S мощности $|S| < |F|$. Рассмотрим множество $S' = S \cup \{v\}$, также порождающее связный подграф $F(S')$. Если $S' \subseteq \tilde{S}$, то $\tilde{S}' = \tilde{S}$. В противном случае вершина v смежна хотя бы с одной вершиной, лежащей на контуре подграфа $F(\tilde{S})$. Тогда, исходя из наблюдения, сделанного выше, в \tilde{S}' можно включить все вершины из \tilde{S} , вершину v , а также все вершины графа T^∞ , смежные двум вершинам той же стороны контура подграфа $F(\tilde{S})$, с вершиной которой смежна v (или любой из двух таких сторон, если v смежна углу контура). На рис. 5 приведён пример, где чёрным цветом закрашены вершины из множества S' , серым — вершины из $\tilde{S}' \setminus S'$, кружком обведены вершины из $\tilde{S}' \setminus \tilde{S}$, жирной линией выделены рёбра контура $C(F(\tilde{S}))$, а пунктирной жирной — рёбра контура $C(F(\tilde{S}'))$, не принадлежащие $C(F(\tilde{S}))$.

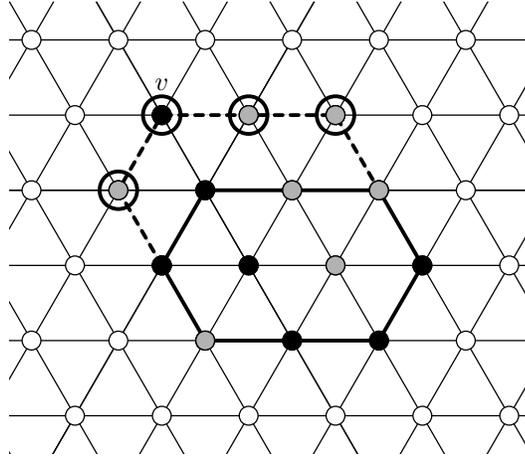


Рис. 5. Иллюстрация к доказательству леммы 3

Легко видеть, что полученное множество \tilde{S}' порождает граф, контур которого является обобщённым шестиугольником. Значит, множество $\tilde{V}(F)$ также обладает этим свойством, а поскольку $V(F) \subseteq \tilde{V}(F) \subseteq V(F)$, то $\tilde{V}(F) = V(F)$. Следовательно, контур графа F является обобщённым шестиугольником, откуда и следует линейная выпуклость графа F . Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Пусть G — граф треугольной решётки, контур которого представляет собой обобщённый шестиугольник со сторонами, параллельными рёбрам решётки. Тогда множество вершин $V(G)$ графа G может быть разбито на два подмножества V_1 и V_2 , для которых $G(V_1)$ является деревом, а $G(V_2)$ — лесом, при этом каждое дерево леса $G(V_2)$ содержит ровно одну вершину контура $C(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим вершины обобщённого шестиугольника, являющегося контуром графа G , и соответствующие им вершины графа G буквами A, B, C, D, E и F в порядке обхода по часовой стрелке, начиная с самой левой вершины. Также для удобства будем обозначать через v^+ и v^- следующую за вершиной v и предшествующую вершине v вершины контура соответственно (при обходе контура по часовой стрелке).

Согласно замечанию к лемме 2 без ограничения общности будем считать, что горизонтальные стороны BC и EF контура графа G можно соединить вертикальным отрезком, а также что вершина B расположена не левее вершины F . Из этого следует, что вершина E расположена не левее вершины B .

Вертикальным разрезом с координатой x_h для $x_h = (k + 1/2)\sqrt{3}/2$ и целого k будем называть цепь, порождённую всеми вершинами графа G , x -координаты которых лежат в интервале $[x_h - \sqrt{3}/4, x_h + \sqrt{3}/4]$, т. е. ближайшими к прямой $x = x_h$ вершинами графа G . Легко видеть, что вершины этой цепи имеют попарно различные y -координаты. *Левым вертикальным разрезом* относительно вершины v будем называть вертикальный разрез с координатой, на $\sqrt{3}/4$ меньшей x -координаты вершины v , а *правым* — с координатой, на $\sqrt{3}/4$ большей x -координаты вершины v .

Пусть H_ℓ — левый вертикальный разрез относительно вершины B . Точка E расположена не левее, а точка F — не правее точки B . Если цепь H_ℓ содержит нечётное число рёбер, то на стороне EF не существует вершины графа с x -координатой, равной x -координате точки B . Значит, цепь H_ℓ всегда содержит вершину I , лежащую на стороне EF . *Высотой* графа G назовём число рёбер цепи H_ℓ .

Подходящим разбиением будем называть разбиение множества вершин всего графа G или части этого графа, ограниченной с одной или двух сторон вертикальными разрезами, на два подмножества U_1 и U_2 , первое из которых содержит вершины ограничивающих разрезов и порождает дерево, а второе порождает лес, каждое дерево которого содержит ровно одну вершину контура графа G .

Граф, который получается из любого графа G' , удовлетворяющего условиям леммы и отвечающего введённым предположениям, удалением вершин, лежащих правее соответствующей цепи H_ℓ^I , назовём *малой каплей*. Аналогично *большой каплей* назовём часть графа G' , расположенную не правее левого вертикального разреза относительно вершины B'^+ . Другими словами, большая капля получается из малой добавлением для

каждой вершины правого соседа в треугольной решётке, если этот сосед является вершиной графа G' . Высотой большой и малой капли будем называть высоту графа G' .

Покажем, как построить подходящее разбиение множества вершин малой капли. Сначала включим в U_1 все вершины цепи H_ℓ . Далее, пока ни одна из вершин F и F^- не принадлежит U_1 , будем выбирать из самых левых вершин U_1 вторую сверху и включать в U_1 её левого соседа v , принадлежащего контуру графа G , а также вершины левого разреза относительно v^- . Когда одна из вершин F и F^- будет включена в U_1 , для самых левых вершин из U_1 включим в U_1 также вершины, имеющие те же y -координаты и меньшие x -координаты. Из всех вершин капли, не включённых в U_1 , составим подмножество U_2 , порождающее лес. На рис. 6 приведён пример, иллюстрирующий все шаги. Чёрным цветом закрашены вершины из U_1 , белым — вершины из U_2 , жирной линией выделены рёбра из $E(G(U_1))$, пунктирной — рёбра из $E(G(U_2))$. (Эти обозначения будут использованы далее на всех рисунках, иллюстрирующих подходящее разбиение.)

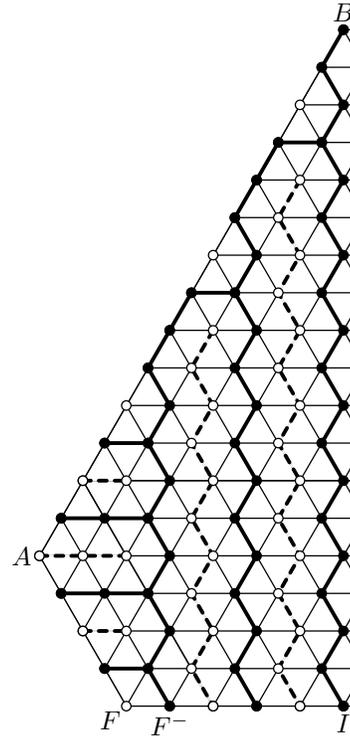


Рис. 6. Пример подходящего разбиения множества вершин малой капли

Теперь заметим, что всякую большую каплю можно получить из малой капли на 2 большей высоты удалением двух верхних вершин. При этом подходящее разбиение множества вершин малой капли останется подходящим разбиением для вершин большой капли.

Часть графа, лежащую между двумя левыми вертикальными разрезами (включая вершины разрезов) относительно двух вершин u и v стороны BC , для которых нижние вершины соответствующих разрезов лежат на стороне EF , назовём *ровным фрагментом*. Шириной ровного фрагмента будем считать расстояние (в рёбрах) между вершинами u и v , а высотой — высоту графа. Рис. 7 показывает, как получить подходящее разбиение множества вершин ровного фрагмента ширины $3k$ и нечётной высоты.

Пусть вершины u и v лежат на стороне BC , причём u расположена

левее v . Пусть нижние вершины левого вертикального разреза относительно вершины u и правого вертикального разреза относительно вершины v лежат на стороне EF . Тогда часть графа, лежащую между ними (включая вершины разрезов), назовём *неровным фрагментом*. Шириной неровного фрагмента будем считать расстояние (в рёбрах) между вершинами u и v , а высотой — высоту графа. На рис. 8 и 9 показано, как построить подходящее разбиение множества вершин для неровных фрагментов ширины $3\ell + 4$ и высоты $4k + 1$ и ширины $3\ell + 3$ и высоты $4k + 3$ соответственно. (Здесь и далее числа ℓ и k неотрицательные целые.)

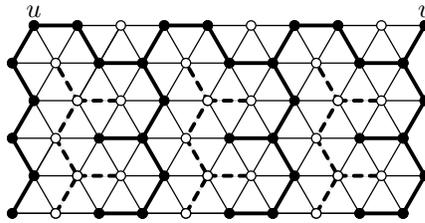


Рис. 7. Подходящее разбиение множества вершин ровного фрагмента ширины $3k$ и нечётной высоты

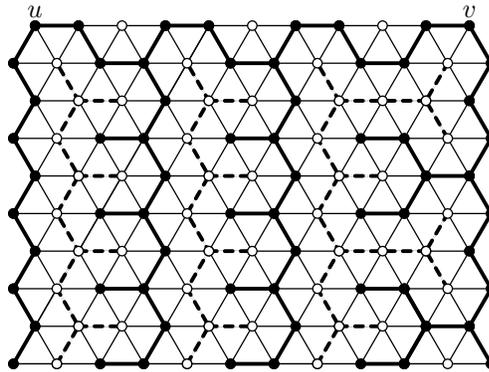


Рис. 8. Подходящее разбиение множества вершин неровного фрагмента ширины $3\ell + 4$ и высоты $4k + 1$

Рассмотрим несколько случаев, которыми покрываются все возможности для графа G . В каждом из этих случаев покажем, как построить подходящее разбиение множества вершин графа G .

1. Если высота графа G чётная, то построим подходящее разбиение множества вершин его малой капли, включим в V_1 все вершины капли, порождающие дерево, а также для самых правых вершин капли все вершины графа G , имеющие такие же y -координаты и большие x -координаты. Остальные вершины из $V(G)$ отнесём к V_2 (рис. 10).

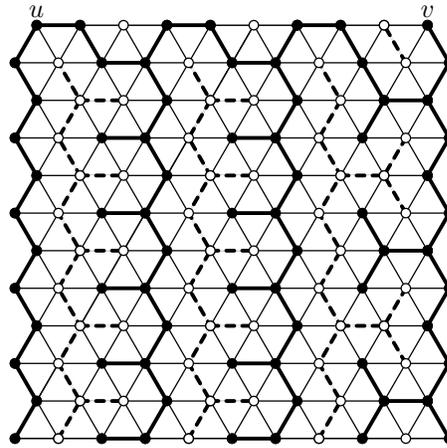


Рис. 9. Разбиение множества вершин неровного фрагмента ширины $3\ell + 3$ и высоты $4k + 3$

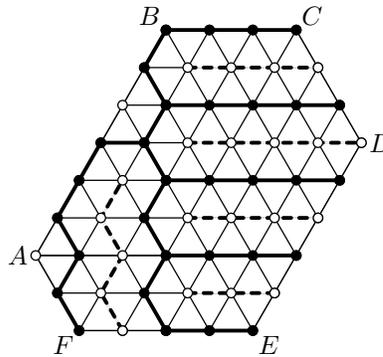


Рис. 10. Пример подходящего разбиения множества вершин графа чётной высоты

2. Если высота графа G нечётная, то рассмотрим два варианта.

2.1. Вершина C расположена правее вершины E . В этом случае часть графа, лежащая не левее правого вертикального разреза относительно вершины E , представляет собой малую каплю, повёрнутую на π , а часть графа между левым вертикальным разрезом относительно вершины B и правым вертикальным разрезом относительно вершины E — ровный фрагмент. При этом ширину фрагмента можно уменьшить на 1, используя вместо левой малой капли большую каплю, или на 2, проводя аналогичную замену с обеих сторон. Таким образом, ширину ровного фрагмента можно сделать кратной 3, в результате чего можно будет построить подходящие разбиения в каждой из трёх частей. Все вершины разрезов,

принадлежащие двум частям одновременно, в обоих разбиениях будут отнесены к дереву. Поэтому объединение трёх разбиений даст требуемое разбиение вершин всего графа (рис. 11).

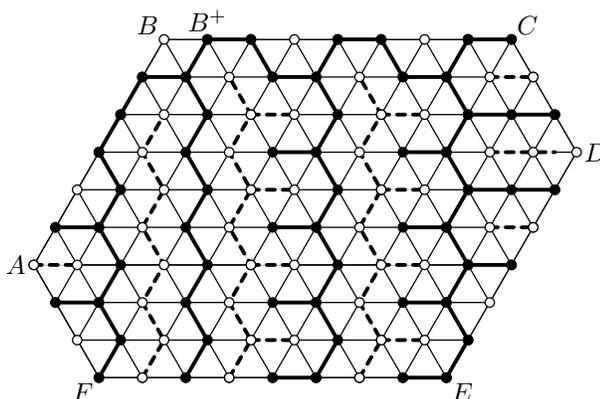


Рис. 11. Пример подходящего разбиения множества вершин графа нечётной высоты в случае, когда вершина C расположена правее вершины E

2.2. Вершина C расположена левее вершины E . В зависимости от расстояния $d(B, C)$ между вершинами B и C в графе G возможны следующие подслучаи.

2.2.1. Расстояние между B и C равно 0. В этом случае можно удалить вершину B и перейти к графу с чётной высотой, построить для него подходящее разбиение и включить вершину B в множество V_2 .

Тогда вершина B будет смежна двум вершинам из множества V_1 и будет составлять в графе $G(V_2)$ одновершинное дерево.

2.2.2. Расстояние между B и C равно 1. Добавим к графу G вершину треугольной решётки B' , смежную с вершинами B и C , но не принадлежащую графу G . Контур полученного графа G' будет вырожденным шестиугольником $AB'DEF$, а сам граф будет иметь чётную высоту. Построим подходящее разбиение множества вершин $V(G')$ на подмножества V'_1 и V'_2 . Легко видеть, что вершина B' попадёт в множество V'_1 и будет висячей в дереве $G'(V'_1)$, поэтому множества $V_1 = V'_1 \setminus \{B'\}$ и $V_2 = V'_2$ образуют подходящее разбиение множества вершин графа G .

2.2.3. Расстояние между B и C равно 2. Проведём левый вертикальный разрез относительно вершины B^- . Часть графа G не правее этого разреза является малой каплей, для множества вершин которой можно построить подходящее разбиение. Добавив к множеству U_1 вершину B , все вершины правого вертикального разреза относительно вершины B^+ , а также для более правых вершин этого разреза все вершины графа G , имеющие такие же y -координаты и большие x -координаты, получим множество V_1 подходящего разбиения всех вершин графа G (рис. 12).

2.2.4. Расстояние между B и C не меньше 3.

2.2.4.1. Высота графа имеет вид $4k + 1$.

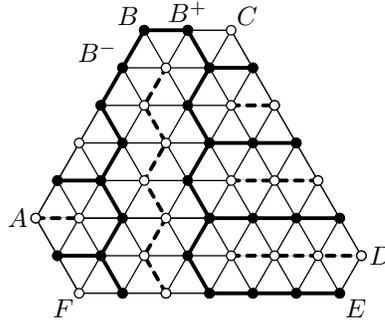


Рис. 12. Пример подходящего разбиения множества вершин графа нечётной высоты в случае, когда вершина C расположена левее вершины E и $d(B, C) = 2$

2.2.4.1.1. Если $d(B, C) = 3$, то проведём левый вертикальный разрез относительно вершины B^- и правый вертикальный разрез относительно вершины C^+ . Часть графа не правее первого из них будет малой каплей, а часть графа не левее второго будет симметрична другой малой капле относительно вертикальной прямой. Поэтому задача разбиения всех вершин графа на искомые подмножества сводится к задаче построения подходящего разбиения множества вершин, лежащих между этими разрезами (включая вершины разрезов). Рис. 13 наглядно демонстрирует, как построить такое разбиение для графа высоты 5 (верхние 6 рядов вершин) и как поступить при увеличении высоты графа на 4 (нижние 4 ряда), а на рис. 14 изображено разбиение в частном случае, когда высота графа равна 1.

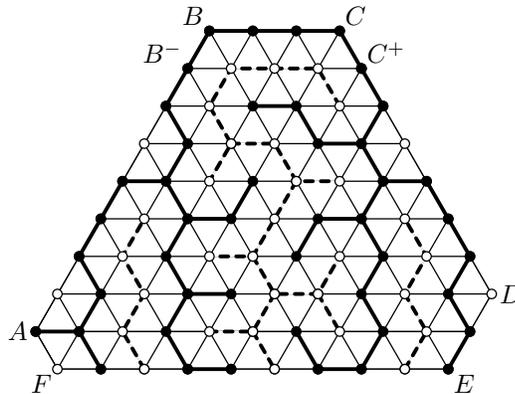


Рис. 13. Пример подходящего разбиения множества вершин графа высоты $4k + 5$ при $d(B, C) = 3$

2.2.4.1.2. Рассмотрим случай $d(B, C) \geq 4$. Часть графа, расположен-

ная не левее правого вертикального разреза относительно вершины C , симметрична некоторой малой капле. Таким образом, проведя левый вертикальный разрез относительно вершины B и правый вертикальный разрез относительно вершины C , можно разделить граф на две малые капли и неровный фрагмент. Ширину неровного фрагмента, как и в случае 2.1, можно уменьшить на 1, заменив слева малую каплю большой, или на 2, осуществив такую замену с обеих сторон. Значит, можно сделать ширину фрагмента числом вида $3\ell + 4$ и построить подходящее разбиение указанным ранее способом. Тогда, объединив подходящие разбиения для всех трёх частей графа, получим искомое разбиение (рис. 15).

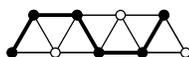


Рис. 14. Пример подходящего разбиения множества вершин графа высоты 1 при $d(B, C) = 3$

2.2.4.2. Высота графа имеет вид $4k + 3$. В этом случае снова разделим граф на две капли и неровный фрагмент ширины $3\ell + 3$ и высоты $4k + 3$, разобьём вершины каждой части на два подмножества и объединим соответствующие подмножества (рис. 16). Лемма 4 доказана.

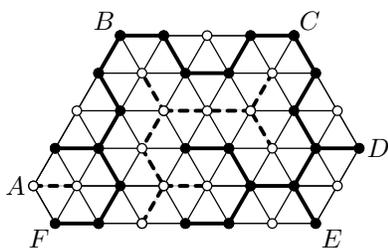


Рис. 15. Пример подходящего разбиения множества вершин графа высоты $4k + 1$ при $d(B, C) \geq 4$

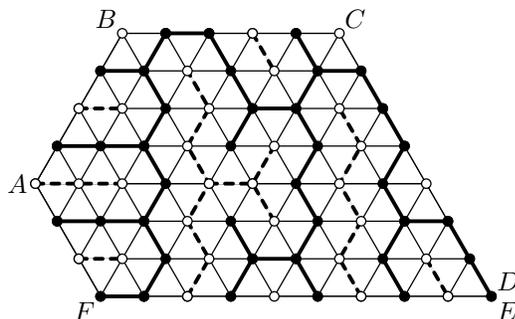


Рис. 16. Пример подходящего разбиения множества вершин графа высоты $4k + 3$ при $d(B, C) \geq 3$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Пусть G — топологический граф линейно выпуклого графа H шестиугольной решётки. Легко видеть, что все вершины степени 2 в графе H лежат на его контуре, т. е. принадлежат внешней грани. Значит, при построении геометрически двойственного графа и удалении вершины, соответствующей внешней грани, из графов G и H будут получены изоморфные графы треугольной решётки. По лемме 3 контур этого графа представляет собой обобщённый шестиугольник со сторонами, параллельными рёбрам решётки, а по лем-

ме 4 его вершины могут быть разбиты на два множества, одно из которых порождает дерево T , а другое — лес F . При этом легко видеть, что в графе G^* дерево T остаётся деревом, а граф, порождённый $V(F)$ и вершиной, соответствующей внешней грани графа G , также будет деревом, поскольку по лемме 4 каждое дерево леса F содержит ровно одну вершину контура графа G^* и эти вершины попарно не смежны. Значит, по теореме 4 граф G гамильтонов. Теорема 3 доказана.

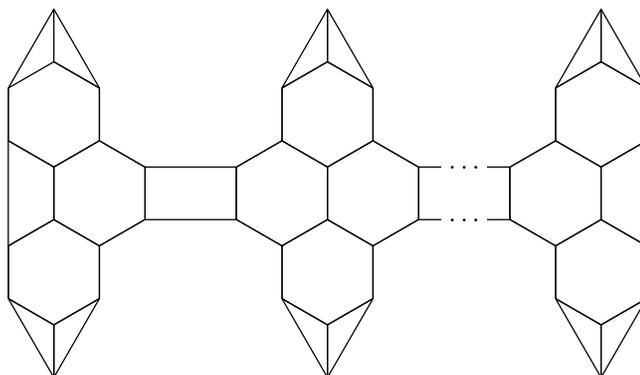


Рис. 17. Граф H_k

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. В справедливости этого утверждения несложно убедиться, рассмотрев все кубические графы порядка не выше 16, среди которых 4060 графов имеют порядок 16 и 621 — меньший порядок [15]. Среди этих графов планарны, 2-связны и негамильтоновы пять графов порядка 16 и один граф порядка 14, в чём несложно убедиться, используя известные (не обязательно эффективные, ввиду малого порядка графа) алгоритмы проверки на планарность, 2-связность и гамильтоновость. Тем не менее граф порядка 14 и четыре графа порядка 16 не изоморфны ни одному топологическому графу шестиугольной решётки, поскольку каждый из них содержит более одной грани, содержащей более шести вершин. Таким образом, граф, изображённый на рис. 1, является единственным негамильтоновым 2-связным топологическим графом шестиугольной решётки порядка не выше 16. Теорема 5 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7. На рис. 17 изображена бесконечная серия графов H_k (центральный фрагмент продублирован k раз), для каждого из которых длина наибольшего простого цикла равна $8(n+4)/9$, где n — порядок графа. Действительно, крайние фрагменты содержат по 16 вершин, которые могут быть полностью покрыты циклом, а из

18 вершин центрального фрагмента в цикл можно включить не более 16. Таким образом, если центральный фрагмент продублирован k раз, то $n = 18k + 32$, а любой простой цикл содержит не более

$$16k + 32 = n - 2k = n - \frac{n - 32}{9} = \frac{8(n + 4)}{9}$$

вершин. Тогда

$$\lim_{G_n \in \mathcal{G}} \frac{h(G_n)}{|G_n|} \leq \lim_{k \in \mathbb{N}} \frac{h(H_k)}{|H_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{16k + 32}{18k + 32} = \frac{8}{9},$$

т. е. коэффициент сжатости не превосходит $8/9$. Теорема 7 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бенедиктович В. И., Сарванов В. И.** О гамильтоновости кубических планарных графов // Докл. АН Беларуси. 1997. Т. 41, № 1. С. 34–37.
2. **Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.** Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990. 384 с.
3. **Пронин Ф. В.** Линейный алгоритм построения гамильтонова цикла в локально связном графе треугольной решетки // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2011. № 1. С. 90–96.
4. **Сарванов В. И.** Об одном классе гамильтоновых плоских графов // Докл. АН БССР. 1980. Т. 24, № 9. С. 792–794.
5. **Фляйшнер Г.** Эйлеровы графы и смежные вопросы. М.: Мир, 2002. 335 с.
6. **Akiyama T., Nishizeki T., Saito N.** NP-completeness of the Hamiltonian cycle problem for bipartite graphs // J. Inf. Process. 1980. Vol. 3. P. 73–76.
7. **Arkin E. M.** Not being (super)thin or solid is hard. A study of grid Hamiltonicity // Comput. Geom. 2009. Vol. 42. P. 582–605.
8. **Barnette D.** Conjecture 5 // Recent progress in combinatorics. New York: Acad. Press, 1969. P. 343.
9. **Garey M. R., Johnson D. S., Tarjan R. E.** The planar Hamiltonian circuit problem is NP-complete // SIAM J. Comput. 1976. Vol. 5. P. 704–714.
10. **Gordon V. S., Orlovich Y. L., Werner F.** Hamiltonian properties of triangular grid graphs // Discrete Math. 2008. Vol. 308. P. 6166–6188.
11. **Grünbaum B., Walther H.** Shortness exponents of families of graphs // J. Comb. Theory. Ser. A. 1973. Vol. 14. P. 364–385.
12. **Itai A., Papadimitriou C. H., Szwarcfiter J. L.** Hamilton paths in grid graphs // SIAM J. Comput. 1982. Vol. 11. P. 676–686.
13. **Karp R. M.** Reducibility among combinatorial problems // Complexity of computer computations. IBM Res. Symp. Ser. New York: Plenum Press, 1972. P. 85–103.

14. Lawler E. L., Lenstra J. K., Rinnooy Kan A. H. G., Shmoys D. B. The traveling salesman problem. A guided tour of combinatorial optimization. Wiley: Chichester, 1985. 465 p.
15. Read R. C., Wilson R. J. An atlas of graphs. Oxford: Oxford Univ. Press, 1998. 472 p.
16. Thomas R., Yu X. 4-Connected projective-planar graphs are Hamiltonian // J. Comb. Theory. Ser. B. 1994. Vol. 62. P. 114–132.
17. Umans C., Lenhart W. Hamiltonian cycles in solid grid graphs // Proc. 38th IEEE Symp. Foundations of Computer Science (Miami Beach, FL, USA, October 19–22, 1997). P. 496–507.
18. Zamfirescu C., Zamfirescu T. Hamiltonicity of topological grid graphs // J. UCS. 2007. Vol. 13, No. 11. P. 1791–1800.

Иржавский Павел Александрович

Статья поступила
16 февраля 2014 г.

Исправленный вариант —
5 августа 2014 г.

DISKRETNYYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
March–April 2015. Volume 22, No. 2. P. 27–48

UDC 519.17

DOI: 10.17377/daio.2015.22.440

CYCLIC PROPERTIES OF TOPOLOGICAL GRAPHS OF
A HEXAGONAL GRID

*P. A. Irzhavski*¹

¹Belarusian State University,
4 Nezavisimosti Ave., 220030 Minsk, Belarus
e-mail: irzhavski@bsu.by

Abstract. We study cyclic properties of topological graphs of a hexagonal grid. A sufficient condition for Hamiltonicity of such graphs is obtained. We find the smallest 2-connected non-Hamiltonian topological graph of a hexagonal grid. An upper bound for the shortness coefficient of this class of graphs is established. Ill. 17, bibliogr. 18.

Keywords: plane graph, hexagonal grid, Hamilton cycle, shortness coefficient.

REFERENCES

1. **V. I. Benediktovich** and **V. I. Sarvanov**, On Hamiltonicity of cubic planar graphs, *Dokl. Akad. Nauk Belarusi*, **41**, No. 1, 34–37, 1997.
2. **V. A. Emelichev**, **O. I. Melnikov**, **V. I. Sarvanov**, and **R. I. Tyshkevich**, *Lektsii po teorii grafov*, Nauka, Moscow, 1990. Translated under the title *Lectures on Graph Theory*, B. I. Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1994.
3. **F. V. Pronin**, A linear algorithm for constructing a Hamiltonian cycle in a locally connected graph of a triangular lattice, *Vestn. Beloruss. Gos. Univ., Ser. 1*, No. 1, 90–96, 2011.
4. **V. I. Sarvanov**, On a class of Hamiltonian planar graphs, *Dokl. Akad. Nauk BSSR*, **24**, No. 9, 792–794, 1980.
5. **H. Fleischner**, *Eulerian Graphs and Related Topics*, Part 1, Vol. 1, North-Holland, Amsterdam, 1990 (Ann. Discrete Math., Vol. 45). Translated under the title *Eulerovy grafy i smezhnye voprosy*, Mir, Moscow, 2002.
6. **T. Akiyama**, **T. Nishizeki**, and **N. Saito**, NP-completeness of the Hamiltonian cycle problem for bipartite graphs, *J. Inf. Process.*, **3**, 73–76, 1980.
7. **E. M. Arkin**, **S. P. Fekete**, **K. Islam [et al.]**, Not being (super)thin or solid is hard: A study of grid Hamiltonicity, *Comput. Geom.*, **42**, No. 6–7, 582–605, 2009.
8. **D. Barnette**, Conjecture 5, in W. T. Tutte, ed., *Recent Progress in Combinatorics (Proc. 3rd Waterloo Conf. Combinatorics, May 1968)*, p. 343, Acad. Press, New York, 1969.
9. **M. R. Garey**, **D. S. Johnson**, and **R. E. Tarjan**, The planar Hamiltonian circuit problem is NP-complete, *SIAM J. Comput.*, **5**, 704–714, 1976.
10. **V. S. Gordon**, **Yu. L. Orlovich**, and **F. Werner**, Hamiltonian properties of triangular grid graphs, *Discrete Math.*, **308**, 6166–6188, 2008.
11. **B. Grünbaum** and **H. Walther**, Shortness exponents of families of graphs, *J. Comb. Theory, Ser. A*, **14**, 364–385, 1973.
12. **A. Itai**, **C. H. Papadimitriou**, and **J. L. Szwarcfiter**, Hamilton paths in grid graphs, *SIAM J. Comput.*, **11**, 676–686, 1982.
13. **R. M. Karp**, Reducibility among combinatorial problems, in R. E. Miller and J. W. Thatcher, eds., *Complexity of Computer Computations (Proc. Symp. Complex. Comput. Comput., New York, USA, Mar. 20–22, 1972)*, pp. 85–103, Plenum Press, New York, 1972 (IBM Res. Symp. Ser.).
14. **E. L. Lawler**, **J. K. Lenstra**, **A. H. G. Rinnooy Kan**, and **D. B. Shmoys**, *The Travelling Salesman Problem: A Guided Tour of Combinatorial Optimization*, Wiley, New York, 1985.
15. **R. C. Read** and **R. J. Wilson**, *An Atlas of Graphs*, Oxford Univ. Press, Oxford, England, 1998.
16. **R. Thomas** and **X. Yu**, 4-connected projective-planar graphs are Hamiltonian, *J. Comb. Theory, Ser. B*, **62**, 114–132, 1994.

17. **C. Umans** and **W. Lenhart**, Hamiltonian cycles in solid grid graphs, in *Proc. 38th IEEE Symp. Foundations Comput. Sci., Miami Beach, FL, USA, Oct. 20–22, 1997*, pp. 496–507, IEEE Comput. Soc., Los Alamitos, USA, 1997.
18. **C. Zamfirescu** and **T. Zamfirescu**, Hamiltonicity of topological grid graphs, *J. UCS*, **13**, No. 11, 1791–1800, 2007.

Pavel A. Irzhavski

Received
16 February 2014

Revised
5 August 2014