ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Март—апрель 2015. Том 22, № 2. С. 63–72

УДК 519.174 DOI: 10.17377/daio.2015.22.454

ОБ ИНТЕРВАЛЬНОЙ (1,1)-РАСКРАСКЕ ИНЦИДЕНТОРОВ ИНТЕРВАЛЬНО РАСКРАШИВАЕМЫХ ГРАФОВ *)

А. В. Пяткин[1,2]
[1]Институт математики им. С. Л. Соболева,
пр. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия
[2]Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, 630090 Новосибирск, Россия
e-mail: artem@math.nsc.ru

Аннотация. Граф назвается *интервально раскрашиваемым*, если существует такая правильная раскраска его рёбер, что для каждой вершины набор цветов, использованных для раскраски рёбер, примыкающих к ней, образует интервал. *Подразбиением* графа называется граф, полученный заменой каждого ребра путём длины 2. П. Петросян и Х. Хачатрян выдвинули гипотезу, что подразбиение любого интервально раскрашиваемого графа интервально раскрашиваемо. В настоящей работе приводится доказательство этой гипотезы. Библиогр. 19.

Ключевые слова: интервальная раскраска, инцидентор, подразбиение графа.

Введение

Под *интервалом* будем понимать подмножество подряд идущих натуральных чисел. Правильная раскраска рёбер графа называется *интервальной*, если для каждой вершины набор цветов, использованных для раскраски рёбер, примыкающих к ней, образует интервал. Графы, у которых такая раскраска рёбер существует, называются *интервально раскрашиваемыми*.

Понятие интервальной раскраски впервые введено А. Асратяном и Р. Камаляном [1, 15] (несколько более общая задача интервальной раскраски гиперграфа ранее в иной терминологии рассмотрена в [19], где

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 12–01–00090, 12–01–00093, 12–01–00184 и 13–07–00070).

показана её NP-полнота). В случае двудольного графа эта задача моделирует составление школьного расписания без окон. Её NP-полнота доказана С. В. Севастьяновым в [14]; там же приведён первый пример двудольного графа, не обладающего интервальной раскраской. В [18] П. Петросяном и Х. Хачатряном приведено описание основных способов построения таких графов. В частности, построен пример интервально не раскрашиваемого двудольного графа с наименьшей известной максимальной степенью 11. В этой же работе высказана гипотеза, что если граф является интервально раскрашиваемым, то его подразбиение (т. е. граф, полученный заменой каждого ребра путём длины 2) также интервально раскрасшиваемо. Для двудольных графов эта гипотеза легко доказывается [18]. Заметим также, что для всех однородных графов подразбиение всегда интервально раскрашиваемо. Это доказано в [16] для графов чётной степени и в [17] — для графов нечётной степени. Отметим, что подразбиение произвольного мультиграфа может не быть интервально раскрашиваемым: если в K_4 выделить одну вершину и заменить все инцидентные ей рёбра пучками из семи мультирёбер, то подразбиение полученного мультиграфа совпадает с вышеупомянутым примером С. В. Севастьянова из [14]. Нетрудно построить по этому примеру и пример обыкновенного графа, для которого подразбиение не будет интервально раскрашиваемым.

Основным результатом настоящей статьи является доказательство гипотезы П. Петросяна и Х. Хачатряна в общем случае.

Теорема 1. *Если мультиграф интервально раскрашиваем, то его подразбиение также интервально раскрашиваемо.*

Главным инструментом доказательства является техника интервальной раскраски инциденторов. Под *инцидентором* в графе понимается пара (u, e), состоящая из вершины u и инцидентного ей ребра e. Таким образом, ребро $e = uv$ содержит два инцидентора: (u, e) и (v, e). Будем говорить, что инцидентор (u, e) *примыкает* к вершине u, а инцидентор (v, e) — к вершине v. Эти инциденторы называются *сопряжёнными* друг к другу. Их удобно трактовать как две половины ребра e. Два различных инцидентора, примыкающих к одной и той же вершине, называются *смежными*. *Раскраской* некоторого множества инциденторов называется его отображение в множество цветов (целых положительных чисел). Раскраска инциденторов является

(i) *правильной*, если все смежные инциденторы окрашены в разные цвета;

(ii) *интервальной*, если она правильна и цвета инциденторов при

каждой вершине образуют интервал;

(iii) *k-раскраской*, если модуль разности цветов любых двух сопряжённых инциденторов не меньше k[1]);

(iv) *(k,l)-раскраской*, если модуль разности цветов любых двух сопряжённых инциденторов лежит в интервале $[k,l]$.

Понятие раскраски инциденторов (для ориентированных мультиграфов) введено в [9]. Правильной k- и (k,l)-раскраске посвящены работы [3, 5–7, 10–13]. В [2] впервые рассмотрена задача об интервальной k-раскраске инциденторов ориентированных мультиграфов. Показано, что такая раскраска всегда существует при $k \in \{0,1\}$ и может не существовать при $k \geqslant 2$. В случае неориентированного графа интервальная k-раскраска всегда существует [4]. Задача об интервальной (k,l)-раскраске инциденторов ранее не рассматривалась (за исключением случая $k=l=0$, который эквивалентен интервальной раскраске рёбер). Наиболее свежий обзор результатов по раскраскам инциденторов можно найти в [8].

Нетрудно убедиться, что в терминах раскраски инциденторов теорема 1 принимает следующий вид.

Теорема 1$'$. *Любой интервально раскрашиваемый мультиграф допускает интервальную $(1,1)$-раскраску инциденторов.*

Именно этот вариант теоремы доказан в разд. 1.

1. Доказательство основного результата

Пусть $G=(V,E)$ — неориентированный мультиграф, допускающий интервальную раскраску рёбер $f : E \to [1,k]$. Можно интерпретировать эту раскраску как интервальную (0,0)-раскраску инциденторов мультиграфа G. Обозначим через F_i подграф G, образованный рёбрами цветов $2i-1$ и $2i$, $i=1,2,\dots,\lceil k/2\rceil$. Ясно, что компонентами связности каждого F_i являются цветочередующиеся пути и чётные циклы. Будем называть эти компоненты *F_i-путями* и *F_i-циклами* соответственно. *Концами* F_i-путей будем называть вершины, имеющие в подграфе F_i степень 1. Построим вспомогательный мультиграф $H=(V;E_1\cup E_2)$ следующим образом. Для каждого $i=1,2,\dots,\lceil k/2\rceil$ отнесём к H ребро $uv\in E_1$, если вершины u и v являются концами F_i-пути нечётной длины, и ребро $uv\in E_2$, если они являются концами F_i-пути чётной длины. Заметим, что H может содержать мультирёбра, например, если какие-то две

[1]) Для ориентированных мультиграфов вместо модуля разности рассматривается разность цветов конечного и начального инциденторов.

вершины являются концами F_i-путей в двух различных подграфах F_i. Ключевую роль в доказательстве играет

Лемма 2. *В мультиграфе H существует $A \subset V$ такое, что*

(i) *для любого ребра из E_1 ровно один его конец лежит в A*;

(ii) *для любого ребра из E_2 либо оба его конца лежат в A, либо ни один из его концов не лежит в A.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную вершину $v \in V$. Ввиду того, что раскраска f интервальная, при v использованы цвета из некоторого интервала $[a, b]$. Поэтому вершина $v \in V$ может быть концом F_i-пути не более чем в двух подграфах F_i (так как в остальных подграфах её степень равна 0 или 2). Таким образом, степень мультиграфа H не превосходит 2. Более того, вершина v имеет в H степень 2 тогда и только тогда, когда a чётно и b нечётно.

Сначала покажем, что каждый цикл в H содержит чётное число рёбер из E_1. Рассмотрим произвольный цикл C в H и выберем в нём ребро $e = uv$. Это ребро соответствует F_i-пути P, соединяющему u и v в некотором подграфе F_i. Назовём инцидентор (u, e) мультиграфа H *чётным*, если ребро, инцидентное вершине u в пути P, раскрашено в чётный цвет, и *нечётным* в противном случае. По определению множеств E_1 и E_2 сопряжённые инциденторы рёбер из E_1 имеют одинаковую чётность, а рёбер из E_2 — разную чётность. Но из замеченного выше свойства вершин степени 2 в H следует, что примыкающие к каждой вершине цикла инциденторы имеют разную чётность. Стало быть, всего цикл C содержит одинаковое число чётных и нечётных инциденторов. Тогда число рёбер в $E_1 \cap C$, оба инцидентора которых нечётны, совпадает с числом рёбер в $E_1 \cap C$, оба инцидентора которых чётны, откуда сразу вытекает чётность $|E_1 \cap C|$.

Для построения множества A применим следующую процедуру. Рассмотрим произвольную компоненту связности (т. е. путь или цикл) графа H. Обозначим через $v_1 v_2 \ldots v_t$ гамильтонов путь в этой компоненте и пометим каждую вершину знаком $+$ или $-$ по следующим правилам: вершина v_1 помечается знаком $+$; для всех $j = 1, 2, \ldots, t-1$ пометка вершины v_{j+1} совпадает с пометкой v_j, если $v_j v_{j+1} \in E_2$, и противоположна ей, если $v_j v_{j+1} \in E_1$. Далее включаем в A все вершины, помеченные знаком $+$. Нетрудно видеть, что поскольку каждый цикл в H содержит чётное число рёбер из E_1, множество A удовлетворяет условиям леммы. Лемма 2 доказана.

Зафиксируем некоторое подмножество $A \subset V$, удовлетворяющее условиям леммы 2, и построим по нему подмножества A_i, $i = 1, 2, \ldots, \lceil k/2 \rceil$,

следующим образом. Рассмотрим некоторую компоненту C двудольного графа F_i. Если C — путь нечётной длины, то ровно один из его концов лежит в A. Тогда включим в A_i все вершины той доли, которая содержит конец из A. Если C — путь чётной длины, то либо оба его конца лежат в A, либо ни один из них в A не лежит. В первом случае включим в A_i все вершины той доли, которая содержит концы C, во втором — все вершины той доли, которая не содержит концов этого пути. Наконец, если C — чётный цикл, то добавим в A_i все вершины любой из долей. Из двудольности F_i и построения A_i вытекает, что для каждого ребра $e \in F_i$ ровно один его конец лежит в A_i; кроме того, конец F_i-пути лежит в A_i тогда и только тогда, когда он лежит в A.

Преобразуем имеющуюся по условию теоремы итервальную (0,0)-раскраску инциденторов $f : E \to [1, k]$ по следующему алгоритму.

Шаг 1. Для каждого $i = 1, 2, \ldots, \lceil k/2 \rceil$ и каждой вершины $v \in A_i$ перекрасим примыкающий к вершине v инцидентор цвета $2i$ (если такой имеется) в цвет $2i - 1$, а примыкающий к вершине v инцидентор цвета $2i - 1$ (если такой имеется) — в цвет $2i$.

Шаг 2. Для каждой вершины $v \in A$ увеличим на 2 цвет каждого примыкающего к v инцидентора, окрашенного в нечётный цвет.

Обозначим полученную раскраску инциденторов через g. Покажем, что g является искомой итервальной (1,1)-раскраской инциденторов графа G.

Сначала убедимся, что g является (1,1)-раскраской инциденторов. Пусть $e \in F_i$. Поскольку ровно один из концов ребра e лежит в A_i, после выполнения шага 1 один из инциденторов ребра e будет раскрашен цветом $2i$, а другой — цветом $2i-1$. После выполнения шага 2 эта раскраска либо останется неизменной, либо инцидентор цвета $2i - 1$ перекрасится в цвет $2i + 1$. В любом случае ребро e будет раскрашено в соответствии с требованиями (1,1)-раскраски.

Осталось доказать, что раскраска g интервальная. Рассмотрим произвольную вершину v. Пусть цвета примыкающих к ней инциденторов в раскраске f образуют интервал $[a, b]$. Предположим, что $v \notin A$. Тогда в раскраске g цвета примыкающих к ней инциденторов по-прежнему образуют интервал $[a, b]$. Действительно, перекраска инциденторов, примыкающих к v, происходит только в том случае, когда $v \in A_i$. Поскольку $v \notin A$, по построению A_i степень вершины v в F_i равна 2 или 0, значит, применение к v на шаге 1 перекраски инциденторов цветов $2i$ и $2i-1$ не изменяет множества использованных при v цветов. Пусть теперь $v \in A$. Рассмотрим четыре случая.

Случай 1. Пусть a нечётно и b чётно. В этом случае степень вершины v чётна во всех F_i, а значит, после шага 1 имеем при v интервал $[a, b]$. Тогда после шага 2 он преобразуется в интервал $[a+1, b+1]$.

Случай 2. Пусть a и b нечётны. Здесь после шага 1 множество использованных при v цветов будет $[a, b-1] \cup \{b+1\}$. Однако после шага 2 оно становится интервалом $[a+1, b+1]$.

Случай 3. Пусть a и b чётны. После шага 1 имеем при v множество цветов $\{a-1\} \cup [a+1, b]$, которое после шага 2 превращается в интервал $[a+1, b+1]$.

Случай 4. Пусть a чётно и b нечётно. После шага 1 множество использованных при v цветов имеет вид $\{a-1\} \cup [a+1, b-1] \cup \{b+1\}$. Снова после шага 2 получаем $[a+1, b+1]$.

Таким образом, g является интервальной (1,1)-раскраской инциденторов, что и требовалось доказать.

В заключение хотелось обсудить вопрос, остающийся открытым: можно ли получить аналогичные результаты для интервальной (k, l)-раскраски инциденторов при $k \geqslant 2$? Для любых k и l нетрудно построить пример мультиграфа, не обладающего интервальной (k, l)-раскраской инциденторов: нужно в K_4 выделить одну вершину и заменить все инцидентные ей рёбра пучками из $k+l+5$ мультирёбер. Доказательство, аналогичное случаю $k = l = 1$, в общем случае не работает, потому что уже при $k = 2$ вспомогательный мультиграф H может иметь максимальную степень 4, и аналог леммы 2 для него не выполняется. Тем не менее, автор высказывает гипотезу, что при любых k и l интервально раскрашиваемый мультиграф обладает интервальной (k, l)-раскраской.

Автор благодарит рецензента за сделанные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Асратян А. С., Камалян Р. Р.** Интервальные раскраски рёбер мультиграфа // Прикладная математика. Вып. 5. Ереван: Изд-во Ереван. ун-та, 1987. С. 25–34.
2. **Визинг В. Г.** Интервальная раскраска инциденторов ориентированного мультиграфа // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2001. Т. 8, № 2. С. 40–51.
3. **Визинг В. Г.** Двудольная интерпретация ориентированного мультиграфа // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2002. Т. 9, № 1. С. 27–41.
4. **Визинг В. Г.** Интервальная раскраска инциденторов неориентированного мультиграфа // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2003. Т. 10, № 1. С. 14–40.

5. **Визинг В. Г.** Жёсткая раскраска инциденторов в неориентированных мультиграфах // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2005. Т. 12, №3. С. 48–53.
6. **Визинг В. Г.** О (p,q)-раскраске инциденторов неориентированного мультиграфа // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2005. Т. 12, №4. С. 23–39.
7. **Визинг В. Г., Мельников Л. С., Пяткин А. В.** О (k,l)-раскраске инциденторов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2000. Т. 7, №4. С. 29–37.
8. **Визинг В. Г., Пяткин А. В.** Раскраска инциденторов мультиграфа // Topics in graph theory. 2013. С. 197–209. http://www.math.uiuc.edu/ kostochk/
9. **Пяткин А. В.** Некоторые задачи оптимизации расписания передачи сообщений в локальной сети связи // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1995. Т. 2, №4. С. 74–79.
   Pyatkin A. V. Some optimization problems of scheduling the transmission of messages in a local communication network // Operations research and discrete analysis. Netherlands: Kluwer Acad. Publ., 1997. P. 227–232.
10. **Пяткин А. В.** (k,l)-Раскраска инциденторов кубических мультиграфов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2002. Т. 9, №1. С. 49–53.
11. **Пяткин А. В.** Некоторые верхние оценки для инциденторного (k,l)-хроматического числа // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2003. Т. 10, №2. С. 66–78.
12. **Пяткин А. В.** Верхние и нижние оценки для инциденторного (k,l)-хроматического числа // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2004. Т. 11, №1. С. 93–102.
13. **Пяткин А. В.** Об $(1,1)$-раскраске инциденторов мультиграфов степени 4 // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2004. Т. 11, №3. С. 59–62.
14. **Севастьянов С. В.** Об интервальной раскрашиваемости рёбер двудольного графа // Методы дискретного анализа в решении экстремальных задач. Вып. 50. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1990. С. 61–72.
15. **Asratian A. S., Kamalian R. R.** Investigation of interval edge-colorings of graphs // J. Comb. Theory. Ser. B. 1964. Vol. 62, No. 1. P. 34–43.
16. **Hansen H. M.** Scheduling with minimum waiting periods: Thes. ... magister sci. Odense, Denmark: Odense Univ., 1992.
17. **Hanson D., Loten C. O. M., Toft B.** On interval colourings of bi-regular bipartite graphs // Ars Comb. 1998. Vol. 50. P. 23–32.
18. **Khachatrian H., Petrosyan P.** Interval non-edge-colorable bipartite graphs and multigraphs // J. Graph Theory, **76**, No. 3, 200–216, 2014.

19. **Lipsky W., Jr.** One more polynomial complete consecutive retrieval problem // Inf. Proc. Lett. 1977. Vol. 6, No. 3. P. 91–93.

Пяткин Артём Валерьевич

Статья поступила
2 июня 2014 г.
Исправленный вариант —
24 ноября 2014 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
March–April 2015. Volume 22, No. 2. P. 63–72

UDC 519.174 DOI: 10.17377/daio.2015.22.454

ON INTERVAL (1,1)-COLORING OF INCIDENTORS OF INTERVAL COLORABLE GRAPHS

A. V. Pyatkin[1,2]
[1]Sobolev Institute of Mathematics,
4 Koptyug Ave., 630090 Novosibirsk, Russia
[2]Novosibirsk State University,
2 Pirogov St., 630090 Novosibirsk, Russia
e-mail: artem@math.nsc.ru

Abstract. A graph is *interval colorable* if it has a proper edge coloring such that for every vertex the colors used for coloring edges adjacent to it form an interval. *A subdivision* of a graph is a graph obtained by substituting a path of length two for each edge. P. Petrosyan and H. Khachatrian posed a conjecture that the subdivision of each interval colorable graph is interval colorable. In this paper, we prove this conjecture. Bibliogr. 19.

Keywords: interval coloring, incidentor, graph subdivision.

REFERENCES

1. **A. S. Asratian** and **R. R. Kamalian,** Interval colorings of edges of a multigraph, *Prikl. Mat., Erevan,* **5**, 25–34, 1987.
2. **V. G. Vizing,** Interval coloring of the incidentors of a directed multigraph, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 1,* **8**, No. 2, 40–51, 2001.
3. **V. G. Vizing,** A bipartite interpretation of a directed multigraph in problems of the coloring of incidentors, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 1,* **9**, No. 1, 27–41, 2002.

4. **V. G. Vizing,** Interval coloring of the incidentors of an undirected multigraph, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 1,* **10**, No. 1, 14–40, 2003.
5. **V. G. Vizing,** Strict coloring of incidentors of undirected multigraphs, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 1,* **12**, No. 3, 48–53, 2005.
6. **V. G. Vizing,** On the (p, q)-coloring of incidentors of an undirected multigraph, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 1,* **12**, No. 4, 23–39, 2005.
7. **V. G. Vizing, L. S. Mel'nikov,** and **A. V. Pyatkin,** On the (k, l)-coloring of incidentors, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 1,* **7**, No. 4, 29–37, 2000.
8. **V. G. Vizing** and **A. V. Pyatkin,** Incidentor coloring of multigraphs, in R. I. Tyshkevich, ed., *Topics in Graph Theory*, pp. 197–209, Urbana–Champaign, USA, 2013. Available at http://www.math.uiuc.edu/~kostochk/. Accessed Mar. 3, 2015.
9. **A. V. Pyatkin,** Some problems for optimizing the routing of messages in a local communication network, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **2**, No. 4, 74–79, 1995. Translated in A. D. Korshunov, ed., *Operations Research and Discrete Analysis,* pp. 227–232, Kluwer Acad. Publ., Netherlands, 1997 (Math. Its Appl., Vol. 391).
10. **A. V. Pyatkin,** (k, l)-Coloring of incidentors of cubic multigraphs, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 1,* **9**, No. 1, 49–53, 2002.
11. **A. V. Pyatkin,** Some upper bounds for the incidentor (k, l)-chromatic number, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 1,* **10**, No. 2, 66–78, 2003.
12. **A. V. Pyatkin,** Upper and lower bounds for the incidentor (k, l)-chromatic number, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 1,* **11**, No. 1, 93–102, 2004.
13. **A. V. Pyatkin,** On $(1, 1)$-coloring of incidentors of multigraphs of degree 4, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 1,* **11**, No. 3, 59–62, 2004.
14. **S. V. Sevastyanov,** On interval colorability of the edges in a bipartite graph, in *Metody diskretnogo analiza v reshenii ekstremal'nykh zadach* (Methods of Discrete Analysis in Solving Extremal Problems), Vol. 50, pp. 61–72, Inst. Mat. SO AN SSSR, Novosibirsk, 1990.
15. **A. S. Asratian** and **R. R. Kamalian,** Investigation of interval edge-colorings of graphs, *J. Comb. Theory, Ser. B,* **62**, No. 1, 34–43, 1994.
16. **H. M. Hansen,** Scheduling with minimum waiting periods, *Master Thesis,* Odense Univ., Odense, Denmark, 1992.
17. **D. Hanson, C. O. M. Loten,** and **B. Toft,** On interval colourings of bi-regular bipartite graphs, *Ars Comb.,* **50**, 23–32, 1998.
18. **P. A. Petrosyan** and **H. H. Khachatrian,** Interval non-edge-colorable bipartite graphs and multigraphs, *J. Graph Theory,* **76**, No. 3, 200–216, 2014.

19. **W. Lipsky, Jr.,** One more polynomial complete consecutive retrieval problem, *Inf. Process. Lett.,* **6**, No. 3, 91–93, 1977.

Artem V. Pyatkin

Received
2 June 2014

Revised
24 November 2014