ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Март—апрель 2015. Том 22, № 2. С. 49–62

УДК 519.716 DOI: 10.17377/daio.2015.22.460

О СЛОЖНОСТИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СЧЁТНОЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ *)

С. С. Марченков[1]
[1]Московский гос. университет,
Ленинские горы, 1, 119991 Москва, Россия
e-mail: ssmarchen@yandex.ru

Аннотация. Предложена процедура построения всех решений произвольной системы функциональных уравнений счётнозначной логики. На основе этой процедуры для систем уравнений, содержащих только тернарный дискриминатор p, указаны решения, принадлежащие классу Σ_2 арифметической иерархии Клини — Мостовского. Доказано, что для данных систем уравнений компоненты решения могут быть произвольными функциями из класса Σ_1^1 аналитической иерархии Клини.

Ключевые слова: система функциональных уравнений, функция счётнозначной логики.

Функциональные уравнения широко применяются практически во всех разделах математики. Отличительная особенность функциональных уравнений состоит в том, что в качестве решений данных уравнений рассматриваются функции, в то время как предметные переменные находятся под кванторами общности и по существу лишь «очерчивают» основную предметную область. Выразительные возможности языка функциональных уравнений значительно превосходят выразительные возможности языка уравнений, не содержащих функциональных переменных.

В дискретной математике систематические исследования по функциональным уравнениям начались сравнительно недавно. В области функциональных булевых уравнений и функциональных уравнений многозначной логики отметим работы [2–4, 7–9]. В них, в частности, полностью решён вопрос об определимости множеств функций системами функциональных уравнений над произвольными множествами функциональных констант.

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 13–01–00958).

При переходе от функциональных уравнений многозначной логики к функциональным уравнениям счётнозначной логики происходит качественный скачок: большая часть рассматриваемых проблем далеко выходит за рамки алгоритмической эффективности [5, 6].

В данной работе мы хотим найти границы «эффективности» для решений систем функциональных уравнений. Сначала в самом общем случае предложим процедуру построения «всех» решений рассматриваемой системы уравнений. Процедура неэффективна, использует понятие дерева решений, но позволяет в дальнейшем в некоторых случаях определять «эффективные» решения. В теореме 1 рассматривается как раз такой случай, когда из функциональных констант используется только тернарный дискриминатор p. Выясняется, что в этом случае всегда можно найти достаточно простое решение, принадлежащее классу Σ_2 иерархии Клини — Мостовского [10] (при этом исследуемая система может иметь, вообще говоря, континуальное множество решений). В теореме 2, напротив, мы постарались при использовании только функциональной константы p указать решение с «максимально возможной» сложностью. В данном случае эта сложность определяется классом Σ_1^1 аналитической иерархии Клини [10].

Введём необходимые понятия. Пусть $N = \{0, 1, \ldots\}$, P_N — множество всех (всюду определённых) функций на N. Функции из P_N называем *функциями счётнозначной логики.* Для любого $n \geqslant 1$ и любого множества $Q \subseteq P_N$ через $Q^{(n)}$ обозначаем множество всех n-местных функций из Q.

Определим язык $\mathcal{L}_N$ функциональных уравнений. Предполагаем, что каждая функция из P_N имеет индивидуальное обозначение. Для обозначения n-местных функций из P_N используем символы $f_\nu^{(n)}$, которые называем *функциональными константами.* Наряду с функциональными константами рассматриваем *функциональные переменные.* Для обозначения n-местных функциональных переменных используем символы $\varphi_i^{(n)}$. Областью значений функциональной переменной $\varphi_i^{(n)}$ служит множество $P_N^{(n)}$. В случае, когда это не приводит к недоразумению, верхние индексы у функциональных констант и функциональных переменных будем опускать. Помимо функциональных переменных используем обычные *предметные переменные* $x_1, x_2, \ldots$ с областью значений N.

Язык $\mathcal{L}_N$ функциональных уравнений состоит из предметных переменных x_i $(i = 1, 2, \ldots)$, функциональных переменных $\varphi_i^{(n)}$ $(i, n = 1, 2, \ldots)$, функциональных констант $f_\nu^{(n)}$, знака равенства $=$, левой и правой скобок и запятой.

Пусть $Q \subseteq P_N$. Определим понятие *терма над* Q. Всякая предметная переменная есть терм над Q. Если $t_1, \ldots, t_n$ — термы над Q, $f_\nu^{(n)}$ — функциональная константа, служащая обозначением функции из Q, $\varphi_i^{(n)}$ — функциональная переменная, то выражения $f_\nu^{(n)}(t_1, \ldots, t_n)$ и $\varphi_i^{(n)}(t_1, \ldots, t_n)$ суть термы над Q.

Равенством над Q называем любое выражение вида $t_1 = t_2$, где t_1, t_2 — термы над Q. Равенства над Q называем также *функциональными уравнениями над* Q.

Пусть $t_1 = t_2$ — функциональное уравнение над Q и $\varphi_{i_1}^{(n_1)}, \ldots, \varphi_{i_m}^{(n_m)}$ — все входящие в него функциональные переменные. *Решением уравнения* $t_1 = t_2$ называем систему функций $\{f_{\nu_1}^{(n_1)}, \ldots, f_{\nu_m}^{(n_m)}\}$ из P_N, которая после замены каждой функциональной переменной $\varphi_{i_s}^{(n_s)}$ соответствующей функциональной константой $f_{\nu_s}^{(n_s)}$ превращает уравнение $t_1 = t_2$ в тождество (относительно всех входящих в уравнение предметных переменных). Отметим, что решением уравнения над Q могут быть функции, не входящие в множество Q.

Пусть Ξ — конечная система уравнений над Q. *Решением системы уравнений* Ξ называем систему функций из P_N, которая является решением каждого уравнения, входящего в Ξ.

Опишем некоторую процедуру, позволяющую в принципе находить все решения произвольной системы функциональных уравнений. Предлагаемая процедура будет определять по системе уравнений Ξ бесконечное дерево Γ («дерево решений» системы уравнений Ξ), все невисячие вершины которого имеют бесконечную степень. В каждой вершине дерева Γ, за исключением корня, будут определяться в конечном числе точек значения всех функций, составляющих предполагаемое решение системы Ξ. В некоторых вершинах дерева Γ процесс дальнейшего построения дерева (из данной вершины) будет обрываться. Основное свойство дерева Γ состоит в том, что существует взаимно однозначное соответствие между бесконечными ветвями дерева Γ и (вообще говоря, частичными) решениями системы уравнений Ξ.

Итак, пусть Ξ — система функциональных уравнений над множеством функциональных констант $\{f_1, \ldots, f_r\}$, $x_1, \ldots, x_n$ — все предметные переменные системы Ξ, $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ — все её функциональные переменные и $\varphi^1, \ldots, \varphi^k$ — все вхождения функциональных переменных в систему Ξ (некоторые функциональные переменные могут входить в систему Ξ несколько раз). Зафиксируем (эффективные) нумерации множеств N^n и N^k, наборы с номером i будем обозначать через $\mathbf{x}_i^{(n)}$ и $\mathbf{x}_i^{(k)}$

соответственно. Можно считать, что $\mathbf{x}_0^{(n)}$ — нулевой набор.

Дерево Г будем определять по ярусам (вершины, расположенные на одном и том же расстоянии от корня дерева). При этом на ярусе с номером $l \geqslant 1$ будут рассматриваться набор $\mathbf{x}_{l-1}^{(n)}$ (для предметных переменных $x_1, \ldots, x_n$) и наборы $\mathbf{x}_0^{(k)}, \mathbf{x}_1^{(k)}, \ldots$ (для вхождений $\varphi^1, \ldots, \varphi^k$ функциональных переменных). На ярусе l пытаемся определить в конечном числе точек возможное решение $(g_1, \ldots, g_m)$ системы Ξ, отвечающее значениям $\mathbf{x}_{l-1}^{(n)}$ предметных переменных системы Ξ и «значениям» $\mathbf{x}_0^{(k)}, \mathbf{x}_1^{(k)}, \ldots$ функциональных переменных, расположенных в последовательности $\varphi^1, \ldots, \varphi^k$.

Опишем подробно первый шаг в построении дерева Г — определение вершин первого яруса. Придадим всем предметным переменным системы Ξ значения из набора $\mathbf{x}_0^{(n)}$ (т. е. значения 0). В вершинах $v_0, v_1, \ldots$ первого яруса присвоим вхождениям $\varphi^1, \ldots, \varphi^k$ значения соответственно из наборов $\mathbf{x}_0^{(k)}, \mathbf{x}_1^{(k)}, \ldots$. При этом каждый терм системы Ξ, не начинающийся символом функциональной константы, получит некоторое значение. Если термам $t_1, \ldots, t_s$ уже присвоены значения $a_1, \ldots, a_s$ и в систему Ξ входит терм $f_j(t_1, \ldots, t_s)$, то присвоим этому терму значение b, где $b = f_j(a_1, \ldots, a_s)$. Таким образом, всем термам системы Ξ будут присвоены значения из N.

Указанное присваивание значений термам системы Ξ (в конкретной вершине v_i) может оказаться противоречивым. Так, для одной и той же переменной φ_j за счёт использования различных вхождений в последовательность $\varphi^1, \ldots, \varphi^k$ одному и тому же терму вида $\varphi_j(a_1, \ldots, a_p)$ могут быть присвоены различные значения. Кроме того, могут оказаться различными и значения термов, образующих равенство системы Ξ. В этих случаях обрываем построение дерева Г в данной вершине v_i.

Предположим, что описанное выше «означивание» термов системы Ξ в вершине v_i к противоречиям не приводит. Тогда, очевидно, в вершине v_i для значений предметных переменных из набора $\mathbf{x}_0^{(n)}$ имеем корректное определение в конечном числе точек функций $g_1, \ldots, g_m$, образующих возможное решение системы уравнений Ξ.

Продолжая по индукции, предположим, что уже определены l ярусов дерева Г. Выберем в ярусе l неконцевую вершину v. Будем считать, что в вершине v функции $g_1, \ldots, g_m$ (из возможного решения системы уравнений Ξ) получили корректные определения в конечном множестве точек, отвечающем наборам $\mathbf{x}_0^{(n)}, \ldots, \mathbf{x}_{l-1}^{(n)}$ для предметных переменных системы Ξ и некоторым наборам $\mathbf{x}_{i_1}^{(k)}, \ldots, \mathbf{x}_{i_l}^{(k)}$ для вхождений $\varphi^1, \ldots, \varphi^k$

функциональных переменных в систему Ξ. Во всех вершинах $v_0, v_1, \ldots$ $(l+1)$-го яруса дерева Γ для предметных переменных системы Ξ будет рассматриваться набор $\mathbf{x}_l^{(n)}$ и соответственно наборы $\mathbf{x}_0^{(k)}, \mathbf{x}_1^{(k)}, \ldots$ для вхождений функциональных переменных.

Определение функций $g_1, \ldots, g_m$ в вершине v_i мало отличается от аналогичного определения на шаге 1. После присваивания значений из набора $\mathbf{x}_l^{(n)}$ предметным переменным и значений из набора $\mathbf{x}_i^{(k)}$ вхождениям $\varphi^1, \ldots, \varphi^k$ функциональных переменных проверяем корректность такого присваивания. Единственное дополнительное требование — новые значения, полученные здесь для функций $g_1, \ldots, g_m$, необходимо проверить на совместимость со значениями этих функций, полученными на пути в вершину v_i.

Перейдём к основному свойству дерева Γ. Предположим, что в дереве Γ имеется бесконечная ветвь B. Проходя по всем вершинам ветви B, получим определение функций $g_1, \ldots, g_m$, которые, как нетрудно видеть, образуют решение системы Ξ. Однако функции $g_1, \ldots, g_m$ на ветви B определяются, вообще говоря, не полностью, а лишь на некоторых подмножествах декартовых степеней множества N. Это те минимальные (по включению) подмножества, которые необходимы для выполнения всех уравнений системы Ξ. Вместе с тем значения функций $g_1, \ldots, g_m$ вне данных подмножеств никак не сказываются на выполнимости/невыполнимости уравнений системы Ξ (эти значения не «выводятся» из системы уравнений Ξ). Поэтому в случае частичной определённости функций $g_1, \ldots, g_m$ эти функции можно доопределить произвольным образом — любое доопределение все равно будет давать решение системы уравнений Ξ.

Таким образом, любая бесконечная ветвь дерева Γ определяет решение $g_1, \ldots, g_m$ системы уравнений Ξ, состоящее, вообще говоря, из частичных функций. Это, так сказать, «ядро» решения, «настоящие» решения можно получить из данного ядра произвольными доопределениями.

Обратно, предположим, что всюду определённые функции $g_1, \ldots, g_m$ образуют решение системы уравнений Ξ. Тогда, анализируя процедуру построения дерева Γ, нетрудно убедиться, что в дереве Γ существует бесконечная ветвь. Так, если подставить в систему уравнений Ξ вместо функциональных переменных $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ функции $g_1, \ldots, g_m$, а вместо всех предметных переменных — значение 0, то в некоторой вершине v_i первого яруса дерева Γ рассматриваемый набор $\mathbf{x}_i^{(k)}$ будет являться набором «истинных» значений всех термов системы Ξ, которые начинаются с функциональных переменных. Эта же ситуация повторится на втором ярусе дерева Γ, когда будут рассматриваться вершина v_j, соединённая ребром с вершиной v_i, и наборы $\mathbf{x}_1^{(n)}$ для предметных переменных системы Ξ и $\mathbf{x}_j^{(k)}$ для вхождений её функциональных переменных. В результате в дереве Γ будет выделена бесконечная ветвь, которая соответствует решению $g_1, \ldots, g_m$.

Эффективность процедуры построения дерева Γ сильно зависит от эффективности (вычислимости) функциональных констант $f_1, \ldots, f_r$. Нетрудно заметить, что в случае вычислимости функций $f_1, \ldots, f_r$ данную процедуру можно сделать полностью эффективной. В самом деле, нумерации множеств N^n и N^k можно выбрать вычислимыми. Само построение дерева Γ можно организовать так, чтобы на каждом шаге построения рассматривать только одну вершину дерева Γ, причём «координаты» этой вершины определять эффективным образом по шагу построения.

Гарантирует ли вычислимость функций $f_1, \ldots, f_r$ «простоту» решений системы уравнений Ξ? Этот вопрос нуждается в уточнении, поскольку известно [5], что даже в случае отсутствия функциональных констант система Ξ может иметь континуальное число различных решений. Поэтому вопрос можно ставить либо для некоторых выделенных решений системы Ξ, либо в случае, когда система Ξ имеет, например, единственное решение. Однако, как показано в [6], в последнем случае для простейших функциональных констант 0, $x+1$ компоненты (единственного) решения могут быть сколь угодно сложными функциями из класса Σ_1^1 аналитической иерархии Клини [10]. Вообще, как нетрудно заметить, для произвольных функций $f_1, \ldots, f_r$ в случае единственности решения системы Ξ данное решение будет принадлежать релятивизованному (множеством $\{f_1, \ldots, f_r\}$) классу Σ_1^1 аналитической иерархии Клини.

В связи с этим возникает вопрос: можно ли в случае «очень простых» функций $f_1, \ldots, f_r$ получить из дерева Γ хотя бы одно «простое» решение? В теореме 1 рассмотрим один такой случай, когда в качестве функциональных констант берутся только однородные функции [1]. Как известно [6], из любой нетривиальной однородной функции можно, используя системы функциональных уравнений, получить любые другие однородные функции. Вместе с тем наиболее известной и употребительной однородной функцией является тернарный дискриминатор p:

$$p(x,y,z) = \begin{cases} z, & \text{если } x = y, \\ x & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Поэтому для определённости в теореме 1 системы функциональных уравнений рассматриваются над множеством $\{p\}$.

Сделаем ещё два замечания, относящихся к формулировке теоремы 1. Во-первых, как видели выше, используя деревья для определения решений системы функциональных уравнений, мы вынуждены рассматривать решения, состоящие из частичных функций. Именно это обстоятельство имеется в виду в теореме 1, когда говорится о существовании решения с определёнными свойствами эффективности, — данное решение вполне может состоять из частичных функций.

Во-вторых, принадлежность решения классу Σ_2 арифметической иерархии Клини — Мостовского [10] означает лишь, что вектор-график решения является отношением, принадлежащим классу Σ_2.

Теорема 1. *Если система функциональных уравнений, содержащая только функциональную константу p, имеет решение, то она имеет решение, принадлежащее классу Σ_2 иерархии Клини — Мостовского.*

Доказательство. Пусть Ξ — система функциональных уравнений над множеством $\{p\}$. Возьмём от общего случая обозначения $x_1, \ldots, x_n$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ и $\varphi^1, \ldots, \varphi^k$. Как в общем случае, по системе уравнений Ξ построим дерево Γ, которое содержит бесконечную ветвь тогда и только тогда, когда система Ξ имеет решение. Однако в нашем случае построение дерева Γ будет отличаться существенными деталями. Так, степень ветвления каждой вершины дерева будет конечной. Более точно, каждая неконцевая вершина l-го яруса будет иметь степень $l^k(k+1)^k+1$ (корень дерева — степень $(k+1)^k$).

Напомним, что зафиксированы вычислимые нумерации множеств N^n и N^k, в которых i-й набор имеет обозначения $\mathbf{x}_i^{(n)}$ и $\mathbf{x}_i^{(k)}$. Потребуем дополнительно, чтобы в этих нумерациях номера присваивались последовательно в «блоках», состоящих из всех наборов с заданной суммой координат. При этом все элементы набора $\mathbf{x}_i^{(n)}$ будут не превосходить i.

Сформулируем основные отличия в построении дерева Γ, выполняемого в этой теореме. На первом шаге построения всевозможными способами присваиваем вхождениям $\varphi^1, \ldots, \varphi^k$ значения из множества $\{0, 1, \ldots, k\}$. Это позволяет учесть значение 0 из набора $\mathbf{x}_0^{(n)}$ и, кроме того, даёт возможность создать всевозможные отношения равенства/неравенства между значениями термов, определяемых вхождениями $\varphi^1, \ldots, \varphi^k$. В результате образуются $(k+1)^k$ вершин первого яруса. Так же, как в общем случае, проверяем корректность присвоения и возможность выполнения системы равенств Ξ на наборе $\mathbf{x}_0^{(n)}$ и с заданными присвоениями.

Пусть уже определены вершины l-го яруса дерева Γ. Предполагаем, что на вершинах дерева Γ с первого по l-й ярусы вхождениям $\varphi^1, \dots, \varphi^k$ присваивались значения только из множества $\{0, 1, \dots, l(k+1)-1\}$. На всех вершинах $(l+1)$-го яруса рассматриваем набор $\mathbf{x}_l^{(n)}$. Выбираем в ярусе l неконцевую вершину v. Определяем в $(l+1)$-м ярусе $(l+1)^k(k+1)^k$ вершин, связанных рёбрами с вершиной v, присваивая вхождениям $\varphi^1, \dots, \varphi^k$ всевозможными способами значения из множества $\{0, 1, \dots, (l+1)(k+1)-1\}$. Проверяем корректность присваиваний и возможность выполнения системы равенств Ξ.

Будем предполагать, что процесс присваивания значений выполняется некоторым стандартным эффективным способом. Поэтому полностью эффективным будет и процесс построения дерева Γ: имеется алгоритм, который по «координате» произвольной вершины дерева Δ определяет, является ли данная вершина «концевой», а если нет, то вычисляет значения функций $g_1, \dots, g_m$ из предполагаемого решения во всех рассматриваемых точках.

То, что бесконечная ветвь в дереве Γ даёт решение системы Ξ, устанавливается так же, как в общем случае. Поэтому предположим, что система уравнений Ξ имеет решение $(g_1, \dots, g_m)$, и покажем, что в этом случае в дереве Γ существует бесконечная ветвь.

Рассмотрим нулевой набор значений переменных $x_1, \dots, x_n$. Если заменить в системе Ξ все предметные переменные значением 0 и затем рассматривать последовательно все термы системы Ξ, содержащие функциональные переменные, то с использованием функций $g_1, \dots, g_m$ (а также функции p) можно для всех вхождений $\varphi^1, \dots, \varphi^k$ функциональных переменных в систему Ξ найти значения $a_1, \dots, a_k$ функций $g_1, \dots, g_m$ на соответствующих наборах. Отметим, что в последовательности $a_1, \dots, a_k$ возможны повторения.

Заменим числа из последовательности $a_1, \dots, a_k$ наименьшими числами из множества $\{0, 1, \dots, k\}$ с сохранением отношения равенства/неравенства между элементами последовательности $a_1, \dots, a_k$ и сохранением нулевых значений, если они имеются. Образуется набор $b_1, \dots, b_k$. Этот набор вместе с нулевыми значениями всех предметных переменных будет удовлетворять системе Ξ, поскольку при определении истинностных значений равенств системы Ξ важны лишь соотношения равенства/неравенства между значениями термов, входящих в Ξ (учитываем также аналогичное свойство дискриминатора p). Таким образом, на первом шаге построения дерева Γ на одной из вершин первого яруса всем вхождениям $\varphi^1, \dots, \varphi^k$ будут присвоены соответственно значения $b_1, \dots, b_k$.

Далее продолжаем по индукции. Предположим, что для числа l имеется вершина v дерева Γ, расположенная в l-м ярусе, которая удовлетворяет следующим условиям. Для любого набора $\mathbf{x}_j^{(n)}$, $0 \leqslant j \leqslant l-1$, в вершине v всем вхождениям $\varphi^1, \ldots, \varphi^k$ присвоены значения $b_1, \ldots, b_k$, принадлежащие множеству $\{0, 1, \ldots, (j+1)(k+1)-1\}$ и отвечающие набору $\mathbf{x}_j^{(n)}$ согласно алгоритму построения дерева Γ. Кроме того, если на основе функций $g_1, \ldots, g_m$ для набора $\mathbf{x}_j^{(n)}$ вхождениям $\varphi^1, \ldots, \varphi^k$ приписаны значения $a_1, \ldots, a_k$, то отношения равенства/неравенства между элементами наборов $\mathbf{x}_j^{(n)}$ и $(a_1, \ldots, a_k)$, с одной стороны, и элементами наборов $\mathbf{x}_j^{(n)}$ и $(b_1, \ldots, b_k)$, с другой стороны, совпадают.

Пусть теперь для функций $g_1, \ldots, g_m$ и набора $\mathbf{x}_l^{(n)}$ вхождениям φ^1, $\ldots, \varphi^k$ отвечают значения $a'_1, \ldots, a'_k$. Заметим, что в соответствии с принятой нумерацией наборов из множества N^n набор $\mathbf{x}_l^{(n)}$ может содержать максимум одно значение, не входящее в наборы $\mathbf{x}_0^{(n)}, \ldots, \mathbf{x}_{l-1}^{(n)}$. Поэтому в наборах $\mathbf{x}_l^{(n)}$ и $(a'_1, \ldots, a'_k)$ может быть максимум $k+1$ элементов, которые не содержатся в наборах $\mathbf{x}_0^{(n)}, \ldots, \mathbf{x}_{l-1}^{(n)}$ и отвечающих им наборах $(a_1, \ldots, a_k)$. Это позволяет согласно алгоритму построения дерева Γ найти в $(l+1)$-м ярусе дерева Γ вершину v' (соединённую ребром с вершиной v), которой будут приписаны значения $b'_1, \ldots, b'_k$ из множества $\{0, 1, \ldots, (l+1)(k+1)-1\}$. Кроме того, значения $b'_1, \ldots, b'_k$ будут находиться в том же отношении равенства/неравенства с остальными значениями, приписанными вершине v', как и значения $a'_1, \ldots, a'_k$ с остальными значениями a_i, отвечающими функциям $g_1, \ldots, g_m$ и наборам $\mathbf{x}_0^{(n)}, \ldots, \mathbf{x}_l^{(n)}$.

Далее предполагаем, что дерево Γ содержит бесконечную ветвь, а вершины дерева Γ эффективно перенумерованы. Предположим даже больше: что эффективно перенумерованы вершины «полного» дерева, из которого рассматриваемое дерево Γ получается удалением некоторого числа вершин.

Чтобы указать положение вершины v в дереве Γ, достаточно, например, указать путь, ведущий из корня дерева Γ в вершину v. В свою очередь, этот путь (для вершины l-го яруса) задаётся последовательностью наборов $\mathbf{x}_{i_1}^{(k)}, \ldots, \mathbf{x}_{i_l}^{(k)}$, которые были использованы для «означивания» вхождений $\varphi^1, \ldots, \varphi^k$ (соответствующие наборы $\mathbf{x}_0^{(n)}, \ldots, \mathbf{x}_{l-1}^{(n)}$ для предметных переменных у них одиниковы).

При применении некоторой «геометрической» терминологии будем для определённости считать, что корень дерева Γ расположен внизу, а вершины l-го яруса, соединённые рёбрами с одной и той же вершиной $(l-1)$-го яруса (или корнем дерева, если $l=1$), упорядочены слева направо в соответствии с номерами приписанных им наборов $\mathbf{x}_i^{(k)}$. В этом случае можно говорить о взаимном расположении (левее/правее) бесконечных ветвей дерева Γ. В частности, можно говорить о «самой левой» бесконечной ветви дерева Γ. Именно эта бесконечная ветвь дерева Γ будет выбрана для доказательства утверждения теоремы.

Принадлежность вершины v самой левой бесконечной ветви дерева Γ вытекает из следующих двух свойств.

1. *Вершина v принадлежит некоторой бесконечной ветви дерева* Γ.

2. *В дереве Γ левее вершины v (в том же ярусе, что и вершина v) бесконечные ветви не проходят.*

Сначала обсудим сложность формализации свойства 1. Нетрудно видеть, что свойство 1 для вершины v выполняется в том и только том случае, когда в каждом ярусе дерева Γ существует вершина, соединённая путём с вершиной v. Необходимость этого утверждения очевидна, поэтому обратимся к достаточности. Пусть вершина v расположена в l-м ярусе дерева Γ. Поскольку имеется бесконечное число вершин, соединённых путями с вершиной v, а ярус $l+1$ состоит из конечного числа вершин, в ярусе $l+1$ найдётся вершина v_1, которая соединена ребром с вершиной v и «выше» которой расположено бесконечное число вершин дерева Γ (они, конечно, соединены путями с вершиной v_1). Далее переходим к ярусу $l+2$ и выбираем там вершину v_2, которая соединена ребром с вершиной v_1 и «выше» которой в дереве Γ расположено бесконечное число вершин. Этот процесс не может оборваться ни на каком шаге, и в итоге получим бесконечную ветвь дерева Γ, проходящую через вершину v.

Теперь заметим, что свойство 1 можно выразить подходящим отношением класса Π_1 иерархии Клини — Мостовского. Действительно, как отмечалось выше, определение дерева Γ полностью эффективно. Каждый ярус дерева Γ конечен, а число элементов яруса (и даже полный список вершин яруса) может быть выражен простой примитивно рекурсивной функцией. Поэтому для проверки свойства 1 следует для любого яруса l рассмотреть все вершины этого яруса и убедиться, что среди них есть вершины, связанные путями с вершиной v.

Перейдём к свойству 2. Здесь необходимо потребовать, чтобы ни через одну вершину l-го яруса дерева Γ, лежащую «левее» вершины v, не проходило бесконечной ветви. Эти вершины эффективно определяются по вершине v. Затем для каждой из указанных вершин следует воспользоваться отрицанием свойства 1. В результате придём к отношению класса Σ_1.

Таким образом, принадлежность вершины дерева Γ самой левой ветви этого дерева (отношение $L(v)$) можно выразить конъюнкцией отношений, принадлежащих классам Π_1 и Σ_1 иерархии Клини — Мостовского. Нетрудно заметить, что данные отношения не зависят друг от друга и потому могут входить в конъюнкцию в любом порядке. Следовательно, приходим к двум формулам, выражающим отношение $L(v)$: в классе Σ_2 и в классе Π_2.

Для завершения доказательства теоремы остаётся показать, что, имея отношение $L(v)$, можно получить вектор-график решения системы Ξ, отвечающего самой левой ветви B дерева Γ. Для этого необходимо заметить, что согласно алгоритму построения дерева Γ любой набор из вектор-графика рассматриваемого решения $g_1, \ldots, g_m$ может быть эффективно вычислен по подходящей вершине ветви B. Поэтому для проверки равенства вида $g_i(a_1, \ldots, a_s) = b$ достаточно лишь найти вершину v ветви B, в которой «содержится» данное равенство. При этом квантор существования по переменной v можно поставить перед $\exists\forall$-формулой, обеспечивающей принадлежность вершины v ветви B. Теорема 1 доказана.

Теорема 1 показывает, что у системы уравнений над множеством $\{p\}$ всегда есть достаточно простое решение. Возникает вопрос: насколько вообще сложными могут быть решения у уравнений данного типа? Для получения ответа на этот вопрос придётся обратиться к системам функциональных уравнений над множеством $\{0, x+1\}$. Как установлено в [6], подобная система уравнений может иметь единственное решение, принадлежащее классу Σ^1_1 аналитической иерархии Клини. При этом если рассматривать «проекцию» решения по одной из функциональных переменных, то такая проекция может быть произвольной функцией класса Σ^1_1 (т. е. функцией, график которой принадлежит классу Σ^1_1). В теореме 2 мы хотим «вложить» подобную функцию в решение системы уравнений над множеством $\{p\}$.

Теорема 2. *Для любой функции g из класса Σ^1_1 существует система уравнений над множеством $\{p\}$, у которой одно из решений имеет в качестве компоненты функцию g.*

Доказательство. В [6] доказано, что для функции g можно построить систему Ξ_1 функциональных уравнений над $\{0, x+1\}$, которая имеет решение с компонентой g. Далее, в [5] установлено, что можно построить систему Ξ_2 функциональных уравнений над $\{p\}$ с функциональными переменными φ_0, φ_1 (но, вообще говоря, и другими переменными, отличными от φ_0, φ_1), которая имеет решение с константой 0 по переменной φ_0 и функцией $x+1$ по переменной φ_1. Будем считать, что множества функциональных переменных систем Ξ_1 и Ξ_2 не пересекаются. Образуем систему уравнений Ξ, объединяя уравнения систем Ξ_1, Ξ_2 и заменяя в системе Ξ_1 функции $0, x+1$ функциональными переменными φ_0 и φ_1 соответственно (в качестве предметной переменной для φ_0 берём произвольную предметную переменную системы Ξ_1, для переменной φ_1 — ту переменную, которая используется в системе Ξ_1 в соответствующем вхождении функциональной константы $x+1$). Нетрудно видеть, что полученная система уравнений Ξ будет иметь решение с компонентой g. Теорема 2 доказана.

Автор признателен рецензенту за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Марченков С. С.** Однородные алгебры // Пробл. кибернетики. 1982. Вып. 39. С. 85–106.
2. **Марченков С. С.** Оператор замыкания в многозначной логике, базирующийся на функциональных уравнениях // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2010. Т. 17, №4. С. 18–31.
3. **Марченков С. С.** О классификациях функций многозначной логики с помощью групп автоморфизмов // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2011. Т. 18, №4. С. 66–76.
4. **Марченков С. С.** FE-классификация функций многозначной логики // Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычисл. математика и кибернетика. 2011. №2. С. 32–39.
5. **Марченков С. С.** Определимость в языке функциональных уравнений счетнозначной логики // Дискрет. математика. 2013. Т. 25, №4. С. 13–23.
6. **Марченков С. С., Калинина И. С.** Оператор FR-замыкания в счетнозначной логике // Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычисл. математика и кибернетика. 2013. №3. С. 42–47.
7. **Марченков С. С., Фёдорова В. С.** О решениях систем функциональных булевых уравнений // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2008. Т. 15, №6. С. 48–57.
8. **Марченков С. С., Фёдорова В. С.** О решениях систем функциональных уравнений многозначной логики // Докл. АН. 2009. Т. 426, №4. С. 448–449.
9. **Марченков С. С., Фёдорова В. С.** Решения систем функциональных уравнений многозначной логики // Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычисл. математика и кибернетика. 2009. № 4. С. 29–33.

10. Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.

Марченков Сергей Серафимович

Статья поступила
2 сентября 2014 г.

Исправленный вариант —
25 января 2015 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
March–April 2015. Volume 22, No. 2. P. 49–62

UDC 519.716

DOI: 10.17377/daio.2015.22.460

ON COMPLEXITY OF SOLVING SYSTEMS
OF FUNCTIONAL EQUATIONS IN COUNTABLE-VALUED LOGIC

S. S. Marchenkov[1]
[1]Moscow State University,
1 Leninskie gory, 119991 Moscow, Russia
e-mail: ssmarchen@yandex.ru

Abstract. We propose a procedure to construct all solutions of an arbitrary system of functional equations in countable-valued logic. Based on this procedure, the solutions of systems of equations in the class Σ_2 of Kleene — Mostovsky arithmetical hierarchy which include only the ternary discriminator p are determined. We prove that for given systems of equations the components of solutions may be arbitrary functions of the class Σ_1^1 of Kleene analytical hierarchy.

Keywords: system of functional equations, function of countable-valued logic.

REFERENCES

1. **S. S. Marchenkov,** Homogeneous algebras, in S. V. Yablonskii, ed., *Problemy kibernetiki* (Problems of Cybernetics), Vol. 39, pp. 85–106, Nauka, Moscow, 1982.
2. **S. S. Marchenkov,** The closure operator in a multivalued logic based on functional equations, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **17**, No. 4, 18–31, 2010. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **5**, No. 3, 383–390, 2011.
3. **S. S. Marchenkov,** On classifications of many-valued logic functions by means of automorphism groups, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **18**, No. 4, 66–76, 2011.

4. **S. S. Marchenkov,** FE-classification of functions of many-valued logic, *Vestn. Mosk. Univ., Ser. 15,* No. 2, 32–39, 2011. Translated in *Mosc. Univ. Comput. Math. Cybern.,* **35**, No. 2, 89–96, 2011.

5. **S. S. Marchenkov,** Definability in the language of functional equations of a countable-valued logic, *Diskretn. Mat.,* **25**, No. 4, 13–23, 2013. Translated in *Discrete Math. Appl.,* **23**, No. 5–6, 451–462, 2013.

6. **S. S. Marchenkov** and **I. S. Kalinina,** The FE-closure operator in countable-valued logic, *Vestn. Mosk. Univ., Ser. 15,* No. 3, 42–47, 2013. Translated in *Mosc. Univ. Comput. Math. Cybern.,* **37**, No. 3, 131–136, 2013.

7. **S. S. Marchenkov** and **V. S. Fedorova,** On solutions to the systems of functional Boolean equations, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **15**, No. 6, 48–57, 2008. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **3**, No. 4, 476–481, 2009.

8. **S. S. Marchenkov** and **V. S. Fedorova,** On solutions to systems of functional equations of multiple-valued logic, *Dokl. Akad. Nauk,* **426**, No. 4, 448–449, 2009. Translated in *Dokl. Math.,* **79**, No. 3, 382–383, 2009.

9. **S. S. Marchenkov** and **V. S. Fedorova,** Solutions to the systems of functional equations of multivalued logic, *Vestn. Mosk. Univ., Ser. 15,* No. 4, 29–33, 2009. Translated in *Mosc. Univ. Comput. Math. Cybern.,* **33**, No. 4, 197–201, 2009.

10. **H. Rogers,** *Theory of Recursive Functions and Effective Computability,* McGrow-Hill Book Co., New York, 1967. Translated under the title *Teoriya rekursivnykh funktsii i effektivnaya vychislimost',* Mir, Moscow, 1972.

Sergey S. Marchenkov

Received
2 September 2014

Revised
25 January 2015