ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Март—апрель 2015. Том 22, № 2. С. 5–16

УДК 519.17 DOI: 10.17377/daio.2015.22.467

О МЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ВЕКТОРНОГО ВАРИАНТА ОДНОЙ ИНВЕСТИЦИОННОЙ ЗАДАЧИ *)

С. Е. Бухтояров[1], *В. А. Емеличев*[1]
[1]Белорусский гос. университет,
пр. Независимости, 4, 220030 Минск, Беларусь
e-mail: emelichev@tut.by

Аннотация. Рассматривается векторный вариант инвестиционной задачи Марковица с критериями крайнего оптимизма, состоящий в поиске множества Парето. Получены нижняя и верхняя оценки радиуса устойчивости, под которым понимается предельный уровень изменений параметров векторного критерия, не приводящих к появлению новых Парето-оптимальных портфелей. Анализ устойчивости задачи ведётся в предположении, что в пространстве проектов и критериальном пространстве показателей экономической эффективности проектов задана произвольная норма Гёльдера $l_p, 1 \leqslant p \leqslant \infty$, а в пространстве состояний финансового рынка — норма Чебышёва l_∞. Указан ряд случаев, когда полученные оценки достигаются. Библ. 10.

Ключевые слова: векторная инвестиционная задача, критерий крайнего оптимизма, множество Парето, радиус устойчивости задачи, норма Гёльдера, норма Чебышёва.

Введение

В [1] на основе теории Марковица сформулирована многокритериальная булева задача выбора инвестиционных портфелей с максиминными критериями эффективности Вальда. Получены нижняя и верхняя оценки радиуса устойчивости Парето-оптимального портфеля в случае, когда в трёхмерном пространстве параметров задачи задана линейная норма. В данной статье в рамках той же модели рассматривается векторный вариант задачи портфельной оптимизации с другими целевыми

*)Исследование выполнено при при частичной финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследование (проект Ф13К–078).

функциями, а именно с критериями крайнего оптимизма по эффективности портфеля. Получены нижняя и верхняя оценки радиуса того типа устойчивости задачи, который является дискретным аналогом свойства полунепрерывности сверху по Хаусдорфу точечно-множественного отображения, задающего паретовскую функцию выбора. При этом количественный анализ устойчивости ведётся в предположении, что в пространстве проектов и критериальном пространстве задана произвольная норма Гёльдера l_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, а в пространстве состояний финансового рынка — чебышёвская норма l_∞. Отметим, что ранее подобные оценки радиуса устойчивости были известны лишь в частных случаях, когда в трёхмерном пространстве параметров многокритериальной инвестиционной задачи задавались линейная l_1 и чебышёвская l_∞ нормы в различных комбинациях [2, 3, 7, 8]. Использование классического неравенства Гёльдера позволило ниже обобщить результаты [2].

1. Постановка задачи, основные определения

Рассмотрим векторный дискретный вариант задачи Марковица [10]. Для этого введём ряд обозначений.

Пусть i — номер возможного состояния финансового рынка (сценария развития), $i \in N_m = \{1, 2, \dots, m\}$, $j \in N_n$ — номер альтернативного инвестиционного проекта (актива), $k \in N_s$ — вид (показатель) экономической эффективности инвестиционного проекта, e_{ijk} — ожидаемая оценка экономической эффективности (доходности) вида $k \in N_s$ j-го проекта, когда рынок находится в i-м состоянии, $E = [e_{ijk}]$ — трёхмерная матрица размера $m \times n \times s$ с элементами из $\mathbb{R}$. Пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{E}^n$ — инвестиционный портфель, где $\mathbb{E} = \{0, 1\}$, $x_j = 1$, если инвестор выбирает проект j, и $x_j = 0$ в противном случае, $X \subseteq \mathbb{E}^n$— множество всех возможных инвестиционных портфелей, т. е. тех, реализация которых не превосходит начального капитала инвестора.

На X зададим векторную целевую функцию $f(x, E) = (f_1(x, E_1), f_2(x, E_2), \dots, f_s(x, E_s))$, компонентами которой являются широко известные в теории принятия решений критерии крайнего оптимизма (MAX-MAX):

$$f_k(x, E_k) = \max_{i \in N_m} e_{ik} x = \max_{i \in N_m} \sum_{j \in N_n} e_{ijk} x_j \to \max_{x \in X}, \quad k \in N_s,$$

где $E_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$ — k-е сечение матрицы $E \in \mathbb{R}^{m \times n \times s}$, $e_{ik} = (e_{i1k}, e_{i2k}, \dots, e_{ink})$ — i-я строка этого сечения. Под векторной инвестиционной задачей $Z^s(E)$, $s \in \mathbb{N}$, будем понимать задачу поиска множества Паре-

то $P^s(E)$, т. е. множества Парето-оптимальных инвестиционных портфелей

$$P^s(E) = \{x \in X \mid X(x, E) = \varnothing\},$$

где $X(x, E) = \{x' \in X \mid f(x, E) \leqslant f(x', E) \,\&\, f(x, E) \neq f(x', E)\}$.

Для всякого натурального числа d в действительном пространстве $\mathbb{R}^d$ зададим норму Гёльдера l_p, $p \in [1, \infty]$, т. е. под нормой вектора $y = (y_1, y_2, \ldots, y_d)^T \in \mathbb{R}^d$ будем понимать число

$$\|y\|_p = \begin{cases} \sqrt[p]{\sum\limits_{i \in N_d} |y_i|^p}, & \text{если } 1 \leqslant p < \infty, \\ \max\limits_{i \in N_d} |y_i|, & \text{если } p = \infty. \end{cases}$$

Как известно, для любых векторов a, $b \in \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство Гёльдера

$$|a^T b| \leqslant \|a\|_p \cdot \|b\|_q, \tag{1}$$

где величины p и q связаны соотношением $1/p + 1/q = 1$, при этом $q = 1$, если $p = \infty$, и $q = \infty$, если $p = 1$. Полагаем $1/p = 0$ при $p = \infty$. Далее будем считать, что областью изменения чисел p и q является отрезок $[1, \infty]$.

Используя известное условие [6], при выполнении которого неравенство (1) превращается в равенство, нетрудно убедиться в справедливости следующей формулы:

$$\forall b \in \mathbb{R}^n \ \forall \delta > 0 \ \exists a \in \mathbb{R}^n \ |a^T b| = \delta \|b\|_q \,\&\, \|a\|_p = \delta. \tag{2}$$

В пространстве проектов $\mathbb{R}^n$ и критериальном пространстве показателей экономической эффективности проектов $\mathbb{R}^s$ зададим произвольную норму Гёльдера l_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, а в пространстве состояний финансового рынка $\mathbb{R}^m$ — норму Чебышёва l_∞, т. е. полагаем

$$\|E\|_{p\infty p} = \|(\|E_1\|_{p\infty}, \|E_2\|_{p\infty}, \ldots, \|E_s\|_{p\infty})\|_p,$$

$$\|E_k\|_{p\infty} = \|(\|e_{1k}\|_p, \|e_{2k}\|_p, \ldots, \|e_{nk}\|_p)\|_\infty, \quad k \in N_s.$$

При любом $p \in [1, \infty]$ очевидны неравенства $\|e_{ik}\|_p \leqslant \|E_k\|_{p\infty} \leqslant \|E\|_{p\infty p}$, $i \in N_m$, $k \in N_s$. Используя неравенство Гёльдера (1), для любых портфелей x, $x' \in X$ и индексов i, $i' \in N_m$, $k \in N_s$, получаем

$$\begin{aligned} e_{ik}x - e_{i'k}x' &\geqslant -(\|e_{ik}\|_p \|x\|_q + \|e_{i'k}\|_p \|x'\|_q) \\ &\geqslant -\|E_k\|_{p\infty}(\|x\|_q + \|x'\|_q) \geqslant -\|E\|_{p\infty p}(\|x\|_q + \|x'\|_q). \end{aligned} \tag{3}$$

Следуя [2–4, 9], *радиусом устойчивости* задачи $Z^s(E)$ назовём число

$$\rho = \rho(m,n,s,p) = \begin{cases} \sup\ \Xi_p, & \text{если}\ \ \Xi_p \neq \varnothing, \\ 0, & \text{если}\ \ \Xi_p = \varnothing, \end{cases}$$

где $\Xi_p = \{\varepsilon > 0 \mid \forall E' \in \Omega_p(\varepsilon)\,(P^s(E+E') \subseteq P^s(E))\}$, $\Omega_p(\varepsilon) = \{E' \in \mathbb{R}^{m\times n\times s} \mid \|E'\|_{p\infty p} < \varepsilon\}$ — множество возмущающих матриц, $P^s(E+E')$ — множество Парето возмущённой задачи $Z^s(E+E')$. Таким образом, радиус устойчивости задач $Z^s(E)$ — это предельный уровень возмущений элементов матрицы E в пространстве $\mathbb{R}^{m\times n\times s}$, которые не приводят к появлению новых Парето-оптимальных портфелей. Очевидно, что при $P^s(E) = X$ радиус устойчивости задачи следует считать бесконечным. Задачу, для которой $P^s(E) \neq X$, будем называть *нетривиальной*. Для такой задачи положим

$$\varphi = \varphi(m,n,s,p) = \min_{x \notin P^s(E)} \ \max_{x' \in P(x,E)} \frac{\gamma(x',x)}{\|x'\|_q + \|x\|_q},$$

$$\psi = \psi(m,n,s) = \min_{x \notin P^s(E)} \ \max_{x' \in P(x,E)} \frac{\gamma(x',x)}{\|x'-x\|_1},$$

$$\gamma(x',x) = \min\{f_k(x',E_k) - f_k(x,E_k) \mid k \in N_s\},$$

$$P(x,E) = X(x,E) \cap P^s(E).$$

Легко видеть, что φ, $\psi \geqslant 0$.

2. Оценки радиуса устойчивости задачи

Теорема 1. *При любых $m,n,s \in \mathbb{N}$ и $p \in [1,\infty]$ для радиуса устойчивости $\rho(m,n,s,p)$ нетривиальной задачи $Z^s(E)$ справедливы следующие оценки:*

$$\varphi(m,n,s,p) \leqslant \rho(m,n,s,p) \leqslant (ns)^{1/p}\psi(m,n,s). \tag{4}$$

Доказательство. Вначале покажем, что $\rho \geqslant \varphi$. При $\varphi = 0$ это очевидно. Пусть $\varphi > 0$ и возмущающая матрица $E' \in \mathbb{R}^{m\times n\times s}$ с сечениями E'_k, $k \in N_s$, принадлежит множеству $\Omega_p(\varphi)$. Согласно определению числа φ для любого портфеля $x \notin P^s(E)$ существует портфель $x^0 \in P(x,E)$ такой, что

$$\gamma(x^0,x) \geqslant \varphi\,(\|x^0\|_q + \|x\|_q),$$

т. е. выполняются неравенства

$$f_k(x^0,E_k) - f_k(x,E_k) \geqslant \varphi(\|x^0\|_q + \|x\|_q), \quad k \in N_s.$$

Учитывая неравенства (3), для всякого индекса $k \in N_s$ получаем

$$
\begin{aligned}
f_k(x^0, E_k + E'_k) &- f_k(x, E_k + E'_k) \\
&= \max_{i \in N_m}(e_{ik} + e'_{ik})x^0 - \max_{i \in N_m}(e_{ik} + e'_{ik})x \\
&= \min_{i \in N_m} \max_{i' \in N_m} (e_{i'k}x^0 + e'_{i'k}x^0 - e_{ik}x - e'_{ik}x) \\
&\geqslant f_k(x^0, E_k) - f_k(x, E_k) - \|E'\|_{p\infty p}(\|x^0\|_q + \|x\|_q) \\
&\geqslant (\varphi - \|E'\|_{p\infty p})\,(\|x^0\|_q + \|x\|_q) > 0,
\end{aligned}
$$

где e'_{ik} — i-я строка сечения E'_k. Таким образом, портфель x не принадлежит множеству Парето $P^s(E+E')$. Отсюда заключаем, что при любой возмущающей матрице $E' \in \Omega_p(\varphi)$ справедливо включение $P^s(E+E') \subseteq P^s(E)$. Следовательно, $\rho \geqslant \varphi$.

Далее докажем неравенство $\rho \leqslant (ns)^{1/p}\psi$. В соответствии с определением величины ψ найдётся такой портфель $x^0 \notin P^s(E)$, что для любого портфеля $x \in P(x^0, E)$ существует индекс $l \in N_s$, при котором

$$f_l(x, E_l) - f_l(x^0, E_l) \leqslant \psi\,\|x - x^0\|_1. \tag{5}$$

Полагая $\varepsilon > (ns)^{1/p}\psi$, зададим элементы e^0_{ijk} любого k-го сечения E^0_k, $k \in N_s$, возмущающей матрицы E^0 по правилу

$$e^0_{ijk} = \begin{cases} \delta, & \text{если } i \in N_m,\ x^0_j = 1, \\ -\delta & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $\varepsilon/(ns)^{1/p} > \delta > \psi$. Тогда$\|E^0\|_{p\infty p} = \delta(ns)^{1/p}$.

Это значит, что $E^0 \in \Omega_p(\varepsilon)$. Кроме того, все строки e^0_{ik}, $i \in N_m$, любого сечения E^0_k, $k \in N_s$, одинаковы и состоят из компонент δ и $-\delta$. Поэтому, положив $A = e^0_{ik},\ i \in N_m,\ k \in N_s$, имеем

$$A(x - x^0) = -\delta\|x - x^0\|_1 < 0. \tag{6}$$

Отсюда с учётом (5) выводим, что для любого портфеля $x \in P(x^0, E)$ существует индекс $l \in N_s$, удовлетворяющий соотношениям

$$
\begin{aligned}
f_l\big(x, E_l + E^0_l\big) - f_l\big(x^0, E_l + E^0_l\big) &= \max_{i \in N_m}\big(e_{il} + e^0_{il}\big)x - \max_{i \in N_m}\big(e_{il} + e^0_{il}\big)x^0 \\
&= \min_{i \in N_m}\max_{i' \in N_m}\big(e_{i'l}x - e_{il}x^0 + e^0_{i'l}x - e^0_{il}x^0\big) \\
&= f_l(x, E_l) - f_l(x^0, E_l) + A(x - x^0) \leqslant (\psi - \delta)\|x - x^0\|_1 < 0.
\end{aligned}
$$

Таким образом, справедлива формула

$$\forall x \in P(x^0, E)\ (x \notin X(x^0, E + E^0)). \tag{7}$$

Если $X(x^0, E+E^0) = \varnothing$, то $x^0 \in P^s(E+E^0)$. Напомним, что $x^0 \notin P^s(E)$.

Допустим, что $X(x^0, E+E^0) \neq \varnothing$. Тогда благодаря внешней устойчивости множества $P^s(E+E^0)$ (см., например, [5, с. 34]) найдётся портфель $x^* \in P(x^0, E + E^0)$. Покажем, что $x^* \notin P^s(E)$.

Допустим, напротив, что $x^* \in P^s(E)$. Согласно (7) выполняется включение

$$x^* \in P^s(E)\backslash P(x^0, E).$$

Поэтому возможны лишь следующие два случая.

Случай 1. $f(x^*, E) = f(x^0, E)$. Тогда для любого $k \in N_s$ согласно (6) имеем

$$f_k\big(x^*, E_k + E_k^0\big) - f_k\big(x^0, E_k + E_k^0\big) =$$
$$= f_k(x^*, E_k) - f_k(x^0, E_k) + A(x^* - x^0) = -\delta \left\|x^* - x^0\right\|_1 < 0.$$

Случай 2. Существует индекс $u \in N_s$ такой, что $f_u(x^*, E_u) < f_u(x^0, E_u)$. Тогда, вновь используя (6), приходим к соотношениям

$$f_u\big(x^*, E_u+E_u^0\big) - f_u\big(x^0, E_u+E_u^0\big) = f_u(x^*, E_u) - f_u(x^0, E_u) + A(x^* - x^0) < 0.$$

В результате и тот, и другой случай противоречат включению $x^* \in P(x^0, E + E^0)$. Тем самым доказано, что $x^* \notin P^s(E)$. Напомним, что $x^* \in P^s(E + E^0)$.

Итак, при любом числе $\varepsilon > (ns)^{1/p}\psi$ гарантируется существование возмущающей матрицы $E^0 \in \Omega_p(\varepsilon)$ такой, что найдётся портфель (x^0 или x^*), который, не являясь Парето-оптимальным портфелем задачи $Z^s(E)$, одновременно является таковым в возмущённой задаче $Z^s(E + E^0)$. Таким образом, справедлива формула

$$\forall \varepsilon > (ns)^{1/p}\psi\ \exists E^0 \in \Omega_p(\varepsilon)\ (P^s(E + E^0) \not\subseteq P^s(E)).$$

Следовательно, $\rho \leqslant (ns)^{1/p}\psi$. Теорема 1 доказана.

Из теоремы вытекает известный результат.

Следствие 1 [2]. *Справедливы оценки*

$$\min_{x \notin P^s(E)} \quad \max_{x' \in P(x,E)} \frac{\gamma(x', x)}{\left\|x' + x\right\|_1} \leqslant \rho(m, n, s, \infty) \leqslant \min_{x \notin P^s(E)} \quad \max_{x' \in P(x,E)} \frac{\gamma(x', x)}{\left\|x' - x\right\|_1}.$$

Отсюда получаем следующее очевидное утверждение, свидетельствующее о достижимости оценок (4) при $p = \infty$.

Следствие 2. *Если для любой пары портфелей $x \notin P^s(E)$ и $x' \in P(x, E)$ множество $\{j \in N_n \mid x_j = x'_j = 1\}$ пусто, то справедлива формула*

$$\rho(m, n, s, \infty) = \varphi(m, n, s, \infty) = \psi(m, n, s).$$

3. Случай линейных критериев ($m = 1$)

В случае, когда $m = 1$, инвестиционная задача $Z^s(E)$ превращается в векторную задачу линейного булева программирования, которую запишем в удобном для нас виде

$$Z^s_B(E): \ E_k x \to \max_{x \in X}, \quad k \in N_s,$$

где $X \subseteq \mathbb{E}^n$, $E_k \in \mathbb{R}^n$ — k-я строка матрицы $E = [e_{kj}] \in \mathbb{R}^{s \times n}$. Такой случай можно интерпретировать как ситуацию, при которой состояние финансового рынка не вызывает сомнений инвестора. При этом, как и прежде, считаем, что в пространстве проектов $\mathbb{R}^n$ и критериальном пространстве $\mathbb{R}^s$ задана произвольная норма Гёльдера l_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Для задачи $Z^s_B(E)$ будем использовать прежние обозначения $P^s(E)$, $P(x, E)$ и др.

В рассматриваемом линейном случае инвестиционной задачи нижнюю оценку радиуса устойчивости $\rho(1, n, s, p)$ можно улучшить. Действительно, справедлива

Теорема 2. *Пусть $n, s \in \mathbb{N}$, $\rho \in [1, \infty]$ и*

$$\xi(p) = \xi(1, n, s, p) = \min_{x \notin P^s(E)} \ \max_{x' \in P(x,E)} \ \min_{k \in N_s} \frac{E_k(x' - x)}{\|x' - x\|_q}. \tag{8}$$

Тогда для радиуса устойчивости нетривиальной задачи $Z^s_B(E)$ справедливы оценки

$$\xi(1, n, s, p) \leqslant \rho(1, n, s, p) \leqslant (ns)^{1/p} \xi(1, n, s, \infty). \tag{9}$$

Доказательство. Справедливость верхней оценки, т. е. неравенства

$$\rho(1, n, s, p) \leqslant (ns)^{1/p} \xi(\infty),$$

следует из теоремы 1.

Докажем неравенство $\rho(1,n,s,p) \geqslant \xi(p)$. При $\xi(p) = 0$ оно очевидно. Пусть $\xi(p) > 0$, и пусть $E' \in \mathbb{R}^{s\times n}$ — возмущающая матрица со строками E'_k, $k \in N_s$, и нормой $\|E\|_{pp} = \|(\|E_1\|_p, \|E_2\|_p, \ldots, \|E_s\|_p)\|_p < \xi(p)$. Согласно (8) для любого портфеля $x \notin P^s(E)$ найдётся Парето-оптимальный портфель $x^0 \in P^s(E)$ такой, что

$$\left\|E'_k\right\|_p \leqslant \|E'\|_{pp} < \xi(p) \leqslant \frac{E_k(x^0 - x)}{\|x^0 - x\|_q}, \quad k \in N_s.$$

Поэтому в силу неравенство Гёльдера (1) для всякого индекса $k \in N_s$

$$(E_k + E'_k)(x^0 - x) = E_k(x^0 - x) + E'_k(x^0 - x) \geqslant E_k(x^0 - x) - \|E'_k\|_p \|x^0 - x\|_q > 0,$$

т. е. $x \notin P^s(E + E')$. Отсюда заключаем, что при любой возмущающей матрице $E' \in \mathbb{R}^{s\times n}$ с нормой $\|E'\|_{pp} < \xi(p)$ справедливо включение $P^s(E + E') \subseteq P^s(E)$. Следовательно, $\rho(1,n,s,p) \geqslant \xi(p)$. Теорема 2 доказана.

Из теоремы 2 вытекает известное утверждение, свидетельствующее о достижимости нижней и верхней оценок (9) для радиуса устойчивости задач $Z^s_B(E)$ при $p = \infty$.

Следствие 3 [4]. *Для радиуса устойчивости нетривиальной задачи* $Z^s_B(E)$, $s \in \mathbb{N}$, *справедливо равенство*

$$\rho(1,n,s,\infty) = \min_{x \notin P^s(E)} \; \max_{x' \in P(x,E)} \; \min_{k \in N_s} \frac{E_k(x' - x)}{\|x' - x\|_1}.$$

Покажем, что нижняя оценка $\xi(p)$ радиуса устойчивости для задачи $Z^s_B(E)$, указанная в теореме 2, достижима при любом числе $p \in [1,\infty]$.

Следствие 4. *При любых* $n, s \in \mathbb{N}$ *и* $p \in [1,\infty]$ *существует такой класс задач* $Z^s_B(E)$, *что для радиуса устойчивости любой задачи этого класса справедлива формула*

$$\rho(1,n,s,p) = \xi(p) = \xi(1,n,s,p). \tag{10}$$

Доказательство. Рассмотрим класс задач $Z^s_B(E)$ в случае, когда $P^s(E) = \{x^0\}$. Тогда ввиду (8) имеем

$$\xi(p) = \min_{x \in X \setminus \{x^0\}} \; \min_{k \in N_s} \frac{E_k(x^0 - x)}{\|x^0 - x\|_q}. \tag{11}$$

Ввиду теоремы 2 для доказательства равенства (10) достаточно показать, что $\rho(1, n, s, p) \leqslant \xi(p)$. Дальнейшее изложение посвятим этому.

Из (11) следует существование $x^* \notin P^s(E)$ и $g \in N_s$ таких, что

$$E_g(x^0 - x^*) = \xi(p)\|x^0 - x^*\|_q. \tag{12}$$

Для любого числа $\varepsilon > \xi(p)$ зафиксируем число δ, подчинённое неравенству

$$\xi(p) < \delta < \varepsilon. \tag{13}$$

Согласно формуле (2) найдётся такой вектор $a \in \mathbb{R}^n$, что

$$a^T(x^0 - x^*) = -\delta\|x^0 - x^*\|_q, \quad \|a\|_p = \delta.$$

Задав строки $E_k^0,\ k \in N_s$, возмущающей матрицы $E^0 \in \mathbb{R}^{s\times n}$ по правилу

$$E_k^0 = \begin{cases} a^T, & \text{если } k = g, \\ 0_{(n)}^T, & \text{если } k \neq g, \end{cases}$$

где $0_{(n)} = (0,\ 0, \ldots,\ 0) \in \mathbb{R}^n$, тем самым получаем

$$E_g^0(x^0 - x^*) = -\delta\|x^0 - x^*\|_q, \quad \|E^0\|_p = \delta < \varepsilon.$$

Отсюда, а также из (12) и (13) следует, что

$$\big(E_g + E_g^0\big)(x^0 - x^*) = (\xi(p) - \delta)\|x^0 - x^*\|_q < 0,$$

т. е. верно соотношение

$$x^0 \notin X(x^*, E + E^0). \tag{14}$$

Если $X(x^*, E + E^0) = \varnothing$, то $x^* \in P^s(E + E^0)$. Напомним, что $x^* \notin P^s(E)$.

Если $X(x^*, E + E^0) \neq \varnothing$, то вновь благодаря внешней устойчивости множества Парето $P^s(E + E^0)$ найдётся портфель $\widehat{x} \in X(x^*, E + E^0)$ такой, что $\widehat{x} \in P^s(E + E^0)$. Поэтому ввиду (14) имеем $\widehat{x} \neq x^0$, т. е. $\widehat{x} \notin P^s(E)$.

Итак, при любом числе $\varepsilon > \xi(p)$ гарантируется существование возмущающей матрицы $E^0 \in \mathbb{R}^{s\times n}$ с нормой $\|E^0\|_p < \varepsilon$ такой, что найдётся такой портфель (x^* или $\widehat{x}$), который, не являясь Парето-оптимальным портфелем задачи $Z_B^s(E)$, одновременно становится таковым в возмущённой задаче $Z_B^s(E + E^0)$, т. е. верна формула

$$\forall p \in [1, \infty]\ \forall \varepsilon > \xi(p)\ \exists E^0 \in \Omega_p(\varepsilon)\ (P^s(E + E^0) \not\subseteq P^s(E)).$$

Следовательно, при любом числе $p \in [1, \infty]$ справедливо неравенство $\rho(1, n, s, p) \leqslant \xi(p)$. Следствие 4 доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Емеличев В. А., Коротков В. В.** Анализ устойчивости Парето-оптимального портфеля многокритериальной инвестиционной задачи с максиминными критериями Вальда // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2012. Т. 19, №6. С. 23–36.
2. **Емеличев В. А., Коротков В. В.** О радиусе устойчивости векторной инвестиционной задачи с критериями минимаксного Сэвиджа // Кибернетика и систем. анализ. 2012. №3. С. 68–77.
3. **Емеличев В. А., Коротков В. В.** Устойчивость векторной инвестиционной булевой задачи с критерями Вальда// Дискрет. математика. 2012. Т. 24, вып. 3. С. 3–16.
4. **Емеличев В. А., Подкопаев Д. П.** Устойчивость и регуляризация векторных задач целочисленного линейного программирования // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2001. Т. 8, № 1. С. 47–69.
5. **Подиновский В. В., Ногин В. Д.** Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Физматлит, 2007. 256 с.
6. **Харди Г., Литлвуд Дж. Е., Полиа Г.** Неравенства. М.: Изд-во иностр. лит., 2008. 456 с.
7. **Emelichev V., Korotkov V.** On stability of multicriteria investment Boolean problem with Wald's efficiency criteria // Bull. Acad. Sci. Moldova. 2014. No. 1. P. 3–13.
8. **Emelichev V., Korotkov V.** On stability radius of the multicriteria variant of Markowitz's investment portfolio problem // Bull. Acad. Sci. Moldova. 2011. No. 1. P. 83–94.
9. **Emelichev V., Podkopaev D.** Quantitative stability analysis for vector problems of 0-1 programming // Discrete Optimization. 2010. Vol. 7, No. 1–2. P. 48–63.
10. **Markowitz H. M.** Portfolio selection: efficient diversification of investments. Oxford: Blackwell Publ., 1991. 384 p.

Бухтояров Сергей Евгеньевич
Емеличев Владимир Алексеевич

Статья поступила
15 ноября 2014 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
March–April 2015. Volume 22, No. 2. P. 5–16

UDC 519.17 DOI: 10.17377/daio.2015.22.467

ON STABILITY OF SOLUTIONS OF A VECTOR VARIANT OF ONE INVESTMENT PROBLEM

S. E. Bukhtoyarov[1], *V. A. Emelichev*[1]
[1]Belarusian State University,
4 Nezavisimosti Ave., 220030 Minsk, Belarus
e-mail: emelichev@tut.by

Abstract. The vector Boolean problem of portfolio optimization with extreme optimism criteria and Pareto optimality principle is considered. Upper and lower bounds of stability radius are given with an arbitrary Hölder metric in the space of investment projects and in the space of factors of projects economical efficiency and with the Chebyshev metric in the space of financial market states. Bibliogr. 10.

Keywords: vector investment problem, extreme optimism criteria, Pareto set, stability radius of a problem, Hölder norm, Chebyshev norm.

REFERENCES

1. **V. A. Emelichev** and **V. V. Korotkov,** Stability analysis of a Pareto-optimal portfolio of the multicriteria investment problem with Wald maximin criteria, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **19**, No. 6, 23–36, 2012.
2. **V. A. Emelichev** and **V. V. Korotkov,** Stability radius of a vector investment problem with Savage minimax risk criteria, *Kibern. Sist. Anal.,* No. 3, 68–77, 2012. Translated in *Cybern. Syst. Anal.,* **48**, No. 3, 378–386, 2012.
3. **V. A. Emelichev** and **V. V. Korotkov,** On stability of a vector Boolean investment problem with Wald criteria, *Diskretn. Mat.,* **24**, No. 3, 3–16, 2012. Translated in *Discrete Math. Appl.,* **22**, No. 4, 367–381, 2012.
4. **V. A. Emelichev** and **D. P. Podkopaev,** Stability and regularization of vector integer programs, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 2,* **8**, No. 1, 47–69, 2001.
5. **V. V. Podinovski** and **V. D. Nogin,** *Pareto-optimal'nye resheniya mnogokriterial'nykh zadach* (Pareto-Optimal Solutions of Multicriteria Problems), FIZMATLIT, Moscow, 2007.
6. **G. H. Hardy, J. E. Littlewood,** and **G. Pólya,** *Inequalities*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1934. Translated under the title *Neravenstva,* Izdatel'stvo Inostr. Lit., Moscow, 1948.

7. **V. A. Emelichev** and **V. V. Korotkov,** On stability of multicriteria investment Boolean problem with Wald's efficiency criteria, *Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold., Mat.,* No. 1, 3–13, 2014.
8. **V. A. Emelichev** and **V. V. Korotkov,** On stability radius of the multicriteria variant of Markowitz's investment portfolio problem, *Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold., Mat.,* No. 1, 83–94, 2011.
9. **V. A. Emelichev** and **D. P. Podkopaev,** Quantitative stability analysis for vector problems of 0-1 programming, *Discrete Optim.,* **7**, No. 1–2, 48–63, 2010.
10. **H. M. Markowitz,** *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments,* Blackwell Publ., Oxford, 1991.

Sergey E. Bukhtoyarov,
Vladimir A. Emelichev

Received
15 November 2014