ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Март—апрель 2015. Том 22, № 2. С. 86–101

УДК 519.1 DOI: 10.17377/daio.2015.22.469

О ГРАНЯХ МНОГОГРАННИКА ЗАДАЧИ АППРОКСИМАЦИИ ГРАФА

Р. Ю. Симанчёв[1,2], *И. В. Уразова*[1]
[1]Омский гос. университет им. Ф. М. Достоевского,
пр. Мира, 55–а, 644077 Омск, Россия
[2]Омский научный центр СО РАН,
пр. К. Маркса, 15/1, 644024 Омск, Россия
e-mail: osiman@rambler.ru, urazovainn@mail.ru

Аннотация. Изучается многогранник задачи аппроксимации графа. Построена полиэдральная релаксация этого многогранника, описан класс опорных неравенств, в котором выделены неравенства, порождающие фасеты многогранника. Ил. 1, библиогр. 9.

Ключевые слова: M-граф, многогранник, полиэдр, опорное неравенство, фасета.

Введение

Пусть $\mathbb{K}_n = (V, E)$ — полный неориентированный n-вершинный граф без петель и кратных рёбер. Остовный подграф $H \subset \mathbb{K}_n$ называется *M-графом*, если каждая его компонента связности (возможно одновершинная) является кликой. Множество всех M-графов в $\mathbb{K}_n$ обозначим через $\mathcal{H}$. Пусть $G \subset \mathbb{K}_n$ — некоторый априори заданный остовный подграф. Задача аппроксимации графа G заключается в нахождении M-графа H^*, минимизирующего функционал

$$\rho_G(H) = |EG \cup EH| - |EG \cap EH| \tag{1}$$

на множестве $\mathcal{H}$.

В общем случае эта задача NP-трудна [9]. Для неё известны некоторые полиномиально разрешимые случаи [7], построены оценки целевой функции [3] и разработаны приближённые алгоритмы [2].

В настоящей работе мы исследуем многогранник задачи аппроксимации графа. Подобный подход к анализу экстремальных комбинаторных

задач довольно эффективен, особенно при решении задач высокой размерности (см., например, [4, 5, 8]). В разд. 1 приведены основные понятия, факты и обозначения. В разд. 2 построена полиэдральная релаксация многогранника M-графов, в разд. 3 доказывается фасетность всех входящих в неё ограничений. Разд. 4 посвящён изучению неравенств, индуцированных так называемыми k-парашютами. Найдены условия их опорности к многограннику M-графов при $k \geqslant 2$, определена структура M-графа, необходимая и достаточная для принадлежности его вектора инциденций гиперплоскости, порождённой k-парашютом. Кроме того, доказано, что неравенства, индуцированные k-парашютами, фасетны лишь при $k = 1$.

1. Основные понятия и факты

Пусть, как уже говорилось, $\mathbb{K}_n = (V, E)$ — полный неориентированный n-вершинный граф без петель и кратных рёбер. Для любого графа D, отличного от $\mathbb{K}_n$, через VD и ED обозначим множества его вершин и рёбер соответственно. Для ребра $e \in E$ будем также использовать запись uv, где u, v — вершины из V, инцидентные ребру e. Каждое множество $R \subset E$ индуцирует некоторый подграф T, в котором $ET = R$ и VT — множество вершин из V, инцидентных рёбрам из R. Граф, индуцированный множеством рёбер R, иногда будем обозначать через R. Для подграфов D, F из $\mathbb{K}_n$ положим

$$D \cup F = (VD \cup VF, ED \cup EF), \quad D \cap F = ED \cap EF$$

и если $F \subseteq D$, то $D \setminus F = (VD, ED \setminus EF)$. *Кликой* в $\mathbb{K}_n$ называется подграф, вершины которого попарно смежны. Одновершинный граф также является кликой.

С графом $\mathbb{K}_n$ свяжем евклидово пространство $\mathbb{R}^E$ размерности $\frac{n^2-n}{2}$, поставив в соответствие каждому ребру ось координат в $\mathbb{R}^E$. Это пространство может рассматриваться как множество вектор-столбцов, компоненты которых индексируются элементами из E. Если $x \in \mathbb{R}^E$ и $R \subset E$, то через $x(R)$ обозначим линейную форму $\sum\limits_{e \in R} x_e$. *Вектором инциденций* произвольного подграфа $D \subset \mathbb{K}_n$ называется вектор $x^D \in \mathbb{R}^E$ с компонентами $x^D_e = 1$ при $e \in ED$ и $x^D_e = 0$ при $e \notin ED$. Последнее правило, очевидно, задаёт взаимно однозначное соответствие между множеством остовных подграфов графа $\mathbb{K}_n$ и множеством вершин единичного куба в пространстве $\mathbb{R}^E$.

Множество $P \subset \mathbb{R}^E$ называется *многогранником*, если P является выпуклой оболочкой конечного числа точек. Под размерностью $\dim P$

многогранника P будем понимать уменьшенную на 1 мощность максимального по включению аффинно независимого семейства его точек. Если $\dim P = |E|$, то будем называть P *многогранником полной размерности.* Линейное неравенство $a^t x \leqslant a_0$ ($a, x \in \mathbb{R}^E$, $a \neq 0$, $a_0 \in \mathbb{R}$, t — знак транспонирования) называется *правильным относительно многогранника* P, если $a^t x \leqslant a_0$ для любого $x \in P$. Правильное неравенство $a^t x \leqslant a_0$ называется *опорным к* P, если существуют $x', x'' \in P$ такие, что $a^t x' = a_0$ и $a^t x'' < a_0$. Всякое опорное к P неравенство порождает множество $\{x \in P \mid a^t x = a_0\}$, которое называется *гранью многогранника* P. Грани размерности 0 будем называть *вершинами*, а грани размерности $\dim P - 1$ — *фасетами многогранника* P.

Фасетные неравенства играют особую роль для многогранника, так как каждое из них присутствует в любой системе линейных уравнений и неравенств, описывающих этот многогранник. Кроме того, фасетные неравенства хорошо зарекомендовали себя как отсечения при решении задач высокой размерности [5, 8].

Полиэдром в $\mathbb{R}^E$ называется множество решений системы линейных уравнений и неравенств, если оно ограничено. Согласно теореме Вейля — Минковского [7] выпуклое множество в $\mathbb{R}^E$ является многогранником тогда и только тогда, когда оно полиэдр. Если для многогранника $P \subset \mathbb{R}^E$ и полиэдра $M \subset \mathbb{R}^E$ выполняется включение $P \subseteq M$, то M будем называть *полиэдральной релаксацией многогранника* P.

2. Полиэдральная релаксация многогранника M-графов

Итак, $\mathcal{H} \subseteq 2^E$ — семейство всех M-графов графа $\mathbb{K}_n$. Многогранником M-графов или, что то же, многогранником задачи аппроксимации графа называется множество

$$P_{\mathcal{H}} = \operatorname{conv}\{x^H \in \mathbb{R}^E \mid H \in \mathcal{H}\}.$$

Так как пустой граф и графы $\{e\}$, где $e \in E$, являются M-графами, $\dim P_{\mathcal{H}} = \frac{n^2-n}{2}$, т. е. $P_{\mathcal{H}}$ является многогранником полной размерности.

Рассмотрим целевую функцию (1). Пусть $\overline{G} = E \setminus EG$. Тогда

$$|EG \cup EH| = |EG \cup (E\overline{G} \cap EH)| = |EG| + |E\overline{G} \cap EH|$$

(так как множества EG и $E\overline{G} \cap EH$ не пересекаются). Заметив, что

$$|E\overline{G} \cap EH| = \sum_{e \in E\overline{G}} x_e^H, \quad |EG \cap EH| = \sum_{e \in EG} x_e^H,$$

можем написать

$$\rho_G(H) = |EG| + x^H(E\overline{G}) - x^H(EG).$$

Таким образом, задача аппроксимации графа G заключается в минимизации линейного функционала

$$\rho_G(x) = |EG| + x(E\overline{G}) - x(EG) \tag{2}$$

на множестве $\{x^H \in \mathbb{R}^E \mid H \in \mathcal{H}\}$, или, что то же самое, среди вершин многогранника $P_{\mathcal{H}}$ нужно найти минимизирующую функционал (2).

Такая постановка делает актуальной задачу поиска опорных и фасетных неравенств для многогранника $P_{\mathcal{H}}$.

Построим полиэдральную релаксацию многогранника $P_{\mathcal{H}}$. Начнём со вспомогательной леммы.

Лемма 1. *Граф $H \subset \mathbb{K}_n$ является M-графом тогда и только тогда, когда для любого 3-цикла $C \subset \mathbb{K}_n$ выполняется условие $|EC \cap EH| \neq 2$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $VC = \{u, v, w\}$. Если $|EC \cap EH| = 2$, то все три вершины цикла C принадлежат одной компоненте связности, следовательно, H не является M-графом; противоречие.

Достаточность. Пусть $H' \subset H$ — компонента связности. Покажем, что H' — клика. Если $|VH'|$ равно 1 или 2, то это очевидно. Пусть $|VH'| \geqslant 3$. Возьмём произвольно $u, v \in VH'$. Так как H' связен, существует простая цепь $\{u, u_1, u_2, \ldots, u_t, v\}$, соединяющая вершины u и v. Поскольку $uu_1, u_1u_2 \in EH$, по условию леммы имеем $uu_2 \in EH$. Аналогично из $uu_2, u_2u_3 \in EH$ следует, что $uu_3 \in EH$. Продолжая эту процедуру получаем смежность вершин u и v. Лемма 1 доказана.

Следующими ограничениями (3), (4) определим в $\mathbb{R}^E$ полиэдр $M_{\mathcal{H}}$:

$$\begin{aligned} -x_{uv} + x_{uw} + x_{vw} &\leqslant 1, \\ x_{uv} - x_{uw} + x_{vw} &\leqslant 1, \\ x_{uv} + x_{uw} - x_{vw} &\leqslant 1, \end{aligned} \tag{3}$$

где $u, v, w \in V$ — всевозможные тройки попарно различных вершин,

$$x_{uv} \geqslant 0 \quad \text{для всех } uv \in E. \tag{4}$$

Теорема 1. *Граф $H \subset \mathbb{K}_n$ является M-графом тогда и только тогда, когда $x^H \in \mathbb{R}^E$ является целочисленной точкой полиэдра $M_{\mathcal{H}}$.*

Доказательство. Необходимость. Предположим, что существует тройка вершин u, v, w такая, что $-x^H_{uv} + x^H_{uw} + x^H_{vw} > 1$. Тогда $x^H_{uw} + x^H_{vw} > 1$. Так как все слагаемые — целые числа, это неравенство возможно лишь при $x^H_{uw} = x^H_{vw} = 1$, т. е. $uw, vw \in EH$. Тогда по лемме 1 $uv \in EH$, т. е. $x^H_{uv} = 1$. Получаем $2 = x^H_{uw} + x^H_{vw} > 1 + x^H_{uv} = 2$, чего быть не может. Значит, x^H удовлетворяет всем ограничениям вида (3). Выполнение ограничений (4) для точки x^H следует из определения вектора инциденций графа.

Достаточность. Пусть $\overline{x}$ — целочисленная точка полиэдра $M_{\mathcal{H}}$. Покажем сначала, что $\overline{x}_{uv} \leqslant 1$ для любых $u, v \in V$. Действительно, сложив два любых ограничения вида (3) для тройки вершин u, v, w (например, второе и третье), получим $2\overline{x}_{uv} \leqslant 2$, или $\overline{x}_{uv} \leqslant 1$.

Таким образом, $\overline{x}$ является (0,1)-вектором и, следовательно, вектором инциденций некоторого подграфа $H \subset \mathbb{K}_n$, т. е. $\overline{x} = x^H$. Докажем, что H — M-граф. Предположим, что это не так. Тогда по лемме 1 найдётся 3-цикл C на множестве вершин $\{u, v, w\}$ такой, что $|EH \cap EC|$=2. Иначе говоря, $x^H_{uv} = x^H_{uw} = 1$, $x^H_{vw} = 0$. Очевидно, что в этом случае одно из ограничений вида (3) нарушается. Теорема 1 доказана.

Следствие 1. *Множество целочисленных решений системы* (3), (4) *совпадает с множеством вершин многогранника* $P_{\mathcal{H}}$.

Приведём пример, показывающий, что полиэдр $M_{\mathcal{H}}$ имеет и нецелочисленные вершины.

Пример. Пусть $V = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Определим точку $\overline{x}$ следующими значениями компонент:

$$\overline{x}_{12} = \overline{x}_{13} = \overline{x}_{14} = \frac{1}{2}, \quad \overline{x}_{ij} = 0 \text{ при } ij \notin \{12, 13, 14\}.$$

Очевидно, что $\overline{x} \in M_{\mathcal{H}}$. Эта точка обращает в равенства следующие ограничения полиэдра $M_{\mathcal{H}}$:

$$\overline{x}_{12} + \overline{x}_{13} - \overline{x}_{23} = 1, \quad \overline{x}_{12} + \overline{x}_{14} - \overline{x}_{24} = 1, \quad \overline{x}_{13} + \overline{x}_{14} - \overline{x}_{34} = 1,$$

$$\overline{x}_{ij} = 0, \quad ij \notin \{12, 13, 14\}.$$

Непосредственными вычислениями легко убедиться, что матрица этих ограничений невырожденная.

3. Тривиальные и треугольные фасеты

В настоящем разделе будет доказана фасетность относительно $P_{\mathcal{H}}$ ограничений, определяющих полиэдр $M_{\mathcal{H}}$. Для доказательства фасетности опорных неравенств будем использовать следующий широко известный в выпуклом анализе факт.

Теорема 2 [6]. *Пусть $P \subset \mathbb{R}^E$ — многогранник полной размерности. Опорное к P неравенство $a^t x \leqslant a_0$ порождает фасету многогранника P тогда и только тогда, когда для любого опорного к P неравенства $b^t x \leqslant b_0$, удовлетворяющего условию*

$$\{x \in P \mid a^t x = a_0\} \subseteq \{x \in P \mid b^t x = b_0\},$$

имеет место разложение $b = \mu a$, $b_0 = \mu a_0$, причём $\mu \geqslant 0$.

Сначала докажем фасетность ограничений вида (4).

Теорема 3. *При любом $e \in E$ линейное неравенство $x_e \geqslant 0$ порождает фасету многогранника $P_{\mathcal{H}}$.*

Доказательство. Выберем произвольно $e \in E$. Вектор инциденций любого M-графа, не содержащего ребра e, обращает ограничение $x_e \geqslant 0$ в равенство. Пусть неравенство $b^t x \geqslant b_0$ опорно к $P_{\mathcal{H}}$ и

$$\{x \in P_{\mathcal{H}} \mid x_e = 0\} \subseteq \{x \in P_{\mathcal{H}} \mid b^t x = b_0\}.$$

Обозначим через $\varnothing$ пустой граф. Ясно, что $\varnothing \in \mathcal{H}$. Тогда $x_e^{\varnothing} = 0$, следовательно, $b_0 = b^t x^{\varnothing} = 0$. Всякое ребро $e' \neq e$ также образуют M-граф, причём $x_e^{e'} = 0$. Значит, $0 = b^t x^{\{e'\}} = b_e$. Таким образом, все компоненты вектора b, кроме b_e, равны нулю. Теорема 3 доказана.

Фасеты, описанные в теореме 3, по традиции назовём *тривиальными.*

Теорема 4. *Пусть $u, v, w \in V$ — попарно различные вершины. Линейное неравенство*

$$x_{uv} + x_{uw} - x_{vw} \leqslant 1$$

порождает фасету многогранника $P_{\mathcal{H}}$.

Доказательство. Вновь воспользуемся теоремой 2. Вектор $x^{\{uv\}} + x^{\{uw\}} - x^{\{vw\}}$ обозначим через a. Тогда неравенство $x_{uv} + x_{uw} - x_{vw} \leqslant 1$ можно записать в виде $a^t x \leqslant 1$. Пусть $b^t x \leqslant b_0$ опорно к $P_{\mathcal{H}}$ и

$$\{x \in P_{\mathcal{H}} \mid a^t x = 1\} \subseteq \{x \in P_{\mathcal{H}} \mid b^t x = b_0\}.$$

Покажем, что $b_e = 0$ для любого ребра $e \in E \backslash \{uv, uw, vw\}$. Пусть сначала ребро e не инцидентно ни одной из вершин u, v, w. Тогда для

M-графов $H_1 = \{uv, uw, vw\}$ и $H_2 = H_1 \cup \{e\}$ имеет место равенство $a^t x^{H_1} = a^t x^{H_2} = 1$, стало быть, $b^t x^{H_1} = b^t x^{H_2} = b_0$. Тем самым

$$0 = b_0 - b_0 = b^t x^{H_1} - b^t x^{H_1} = b^t(x^{H_1} + x^{\{e\}} - x^{H_1}) = b^t x^{\{e\}} = b_e.$$

Пусть $e = vt$ (или аналогично $e = wt$), где $t \in V \setminus \{u, v, w\}$. Определим M-графы $H_1 = \{uw\}$, $H_2 = H_1 \cup \{vt\}$. Для этих графов, как и выше, имеют место равенства $b^t x^{H_1} = b^t x^{H_2} = b_0$, поэтому

$$0 = b_0 - b_0 = b^t x^{H_2} - b^t x^{H_1} = b^t x^{\{vt\}} = b_{vt}.$$

И наконец, третий возможный тип рёбер, отличных от uv, uw и vw, — рёбра вида ut, $t \in V \setminus \{v, w\}$. В этом случае определим $H_1 = \{uv\}$, $H_2 = H_1 \cup \{ut, vt\}$. Для них, очевидно, $a^t x^{H_1} = a^t x^{H_2} = 1$, поэтому $b^t x^{H_1} = b^t x^{H_2} = b_0$. Вновь, взяв разность этих уравнений, получим

$$0 = b_0 - b_0 = b^t x^{\{ut, vt\}} = b_{ut} + b_{vt}.$$

Как показано, для ребра vt имеем $b_{vt} = 0$. Следовательно, $b_{ut} = 0$.

Итак, ограничение $b^t x \leqslant b_0$ имеет вид

$$b_{uv} x_{uv} + b_{uw} x_{uw} + b_{vw} x_{vw} \leqslant b_0.$$

Пусть $H_1 = \{uv\}$, $H_2 = \{uw\}$, $H_3 = \{uv, uw, vw\}$. Это M-графы, обращающие ограничения $a^t x \leqslant 1$ в равенство. Значит,

$$b_0 = b^t x^{H_1} = b^t x^{\{uv\}} = b_{uv}, \quad b_0 = b^t x^{H_2} = b^t x^{\{uw\}} = b_{uw},$$

$$b_0 = b^t x^{H_3} = b_{uv} + b_{uw} + b_{vw} = 2b_0 + b_{vw}.$$

Последняя цепочка равенств даёт $b_{vw} = -b_0$. Таким образом, неравенство $b^t x \leqslant b_0$ принимает вид

$$b_0 x_{uv} + b_0 x_{uw} - b_0 x_{vw} \leqslant b_0,$$

откуда сразу следует, что $b = b_0 a$. Остаётся показать, что $b_0 \geqslant 0$. Пусть M-графы H_1 и H_2 таковы, что $a^t x^{H_1} = 1$ и $a^t x^{H_2} < 1$. Тогда $b^t x^{H_1} = b_0$ и $b^t x^{H_2} \leqslant b_0$. Следовательно,

$$0 \leqslant b^t x^{H_1} - b^t x^{H_2} = b_0(a^t x^{H_1} - a^t x^{H_2}).$$

Так как $a^t x^{H_1} - a^t x^{H_2} > 1 - 1 = 0$, то $b_0 \geqslant 0$. Теорема 4 доказана.

Фасеты многогранника M-графов, описанные в теореме 4, назовём *треугольными*.

4. k-Парашюты

Пусть $U = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ и $W = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ — непустые подмножества множества V, $U \cap W = \varnothing$, $k \geqslant 1$, $p \geqslant 2$. Через T_i, $i = 1, 2, \dots, k$, будем обозначать звезду в $\mathbb{K}_n$ с центром в вершине u_i и лучами $u_i v_j$, $j = 1, 2, \dots, p$. Через K_p обозначим клику на множестве вершин W. Положим $T = \bigcup\limits_{i=1}^{k} T_i$. Граф $T \cup K_p$ называется *k-парашютом* (рис. 1).

Лемма 2. *Пусть $T \cup K_p$ — k-парашют. Линейное неравенство*

$$x(ET) - x(EK_p) \leqslant \frac{k^2 + k}{2} \tag{5}$$

является правильным относительно $P_{\mathcal{H}}$.

Доказательство. Пусть $H \in \mathcal{H}$. Положим $s = \max\{|EH \cap ET_i|,\ i = 1, 2, \dots, k\}$. Тогда $|EK_p \cap EH| \geqslant \frac{s^2 - s}{2}$, так как не менее s вершин из W входят в H и $K_p \cap H$ и являются набором вершинно-непересекающихся клик. Далее, пользуясь свойствами квадратного трёхчлена, получим

$$\begin{aligned}
x^H(ET) - x^H(EK) &= |ET \cap EH| - |EK_p \cap EH| \\
= \sum_{i=1}^{k} |ET_i \cup EH| - |EK_p \cap EH| &\leqslant ks - \frac{s^2 - s}{2} = \frac{1}{2}(-s^2 + (2k+1)s) \\
&\leqslant \left\lfloor \frac{1}{2}\left(- \left(\frac{2k+1}{2}\right)^2 + (2k+1)\frac{2k+1}{2} \right) \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(2k+1)^2}{8} \right\rfloor \\
&= \left\lfloor \frac{k^2 + k}{2} + \frac{1}{8} \right\rfloor = \frac{k^2 + k}{2},
\end{aligned}$$

так как $k^2 + k$ чётно. Лемма 2 доказана.

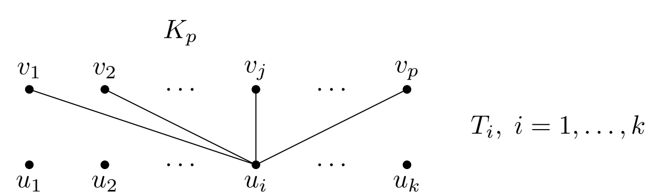

Рис. 1. Фрагмент k-парашюта $T \cup K_p$, соответствующий вершине u_i

Будем говорить, что неравенство (5) индуцировано k-парашютом $T \cup K_p$. Обратим внимание, что при $k = 1$, $p = 2$ неравенство (5) попадает в класс неравенств вида (3) и, следовательно, даёт треугольную

фасету многогранника $P_{\mathcal{H}}$. В настоящем разделе докажем фасетность неравенств, индуцированных k-парашютами при $k = 1$ и произвольном $p > 1$, и выявим условия их опорности при произвольном k.

Пусть $k = 1$. Тогда $U = \{u\}$ и наше неравенство имеет вид

$$x(ET) - x(EK_p) \leqslant 1, \tag{6}$$

или

$$\sum_{j=1}^{p} x_{uv_j} - \sum_{i,j=1,\, i\neq j}^{p} x_{v_i v_j} \leqslant 1.$$

Опорность этого неравенства к многограннику $P_{\mathcal{H}}$ следует из того, что вектор инциденций, например, M-графа $\{uv_1, uv_2, v_1v_2\}$ обращает его в равенство.

Теорема 5. *Неравенство, индуцированное* 1*-парашютом* $T \cup K_p$*, порождает фасету многогранника* $P_{\mathcal{H}}$*.*

Доказательство. Вновь воспользуемся теоремой 2. Пусть $a = x^T - x^{K_p}$. Тогда неравенство (6) можно записать в виде $a^t x \leqslant 1$. Возьмём опорное к $P_{\mathcal{H}}$ неравенство $b^t x \leqslant b_0$, удовлетворяющее условию

$$\{x \in P_{\mathcal{H}} \mid a^t x = 1\} \subseteq \{x \in P_{\mathcal{H}} \mid b^t x = b_0\}.$$

Аналогично тому, как это сделано при доказательстве теоремы 4, легко показать, что $b_e = 0$ при всех $e \in E \backslash E(T \cup K_p)$. Значит, неравенство $b^t x \leqslant b_0$ имеет вид

$$\sum_{j=1}^{p} b_{uv_j} x_{uv_j} - \sum_{i,j=1,\, i\neq j}^{p} b_{v_i v_j} x_{v_i v_j} \leqslant b_0.$$

Рассматривая M-графы вида $\{uv_j\}$, $j = 1, 2, \ldots, p$, получим $b_{uv_j} = b_0$ для всех $j = 1, 2, \ldots, p$. Наконец, рассматривая M-графы вида $\{uv_i, uv_j, v_i v_j\}$, также обращающие в равенство неравенство (6), получим

$$b_{uv_i} + b_{uv_j} - b_{v_i v_j} = b_0, \quad 2b_0 - b_{v_i v_j} = b_0, \quad b_{v_i v_j} = -b_0, \quad j = 1, 2, \ldots, p.$$

Теорема 5 доказана.

Пусть далее $k \geqslant 2$. Легко показать, что при $p \leqslant \frac{k}{2}$ неравенство, индуцированное k-парашютом $T \cup K_p$, не является опорным к $P_{\mathcal{H}}$. Действи-

тельно, в этом случае для любого M-графа H выполняется цепочка

$$\begin{aligned} x^H(ET) - x^H(EK_p) &= \sum_{i=1}^{k} x^H(ET_i) - x^H(EK_p) \\ &= \sum_{i=1}^{k} |EH \cap ET_i| - |EH \cap EK_p| \leqslant \sum_{i=1}^{k} |EH \cap ET_i| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{k} p = kp \leqslant \frac{k^2}{2} < \frac{k^2+k}{2}. \end{aligned}$$

В то же время при $p \geqslant k$ неравенство (5) опорно к $P_{\mathcal{H}}$. В самом деле, подставив в него вектор инциденций клики на вершинах $\{u_1, u_2, \ldots, u_k, v_1, v_2, \ldots, v_k\}$, получим

$$\sum_{i=1}^{k} |EH \cap ET_i| - |EH \cap EK_p| = k^2 - \frac{k^2-k}{2} = \frac{k^2+k}{2}.$$

Для нахождения условий опорности неравенства (6) докажем следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть $T \cup K_p$ — k-парашют, $k \geqslant 2$. Вектор инциденций M-графа H обращает неравенство $x(ET) - x(EK_p) \leqslant \frac{k^2+k}{2}$ в равенство тогда и только тогда, когда*

(i) *$E(H \cap K_p)$ есть клика на k либо $k+1$ вершинах;*

(ii) *для каждого $i = 1, 2, \ldots, k$ выполняется равенство*

$$EH \cap ET_i = \{u_i v \mid v \in V(H \cap K_p)\}.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $H \in \mathcal{H}$ таков, что

$$x^H(ET) - x^H(EK_p) = \frac{k^2+k}{2}. \tag{7}$$

Рассмотрим граф $H \cap K_p$. Пусть $F_1, F_2, \ldots, F_t$ — его компоненты связности. Так как H — M-граф и K_p — клика, все F_j, $j = 1, 2, \ldots, t$, тоже являются кликами. Заметим, что если вершина $u \in U \cap VH$ смежна с какой-либо вершиной $v \in F_j$ (относительно графа H), то она смежна со всеми вершинами из F_j. Кроме того, если $uv, uv' \in EH$, где $u \in U$, $vv' \in W$, то вершины v и v' принадлежат одной компоненте связности вида F_j. В связи с этими свойствами будем говорить, что вершина $u \in U \cap VH$ и компонента связности F_j смежны.

Покажем, что для каждой компоненты F_j с $|VF_j| > 1$ в $U \cap VH$ найдётся смежная с нею вершина. Действительно, предположим, что компонента F_j не имеет смежной вершины в $U \cap VH$. Пусть R — компонента связности графа H, содержащая клику F_j, и $H' = H \setminus R$. Ясно, что $H' \in \mathcal{H}$ и

$$|EH' \cap EK_p| < |EH \cap EK_p|, \quad |EH' \cap ET| = |EH \cap ET|.$$

Тогда

$$\begin{aligned} x^{H'}(ET) - x^{H'}(EK_p) &= |EH' \cap ET| - |EH' \cap EK_p| \\ &> |EH \cap ET| - |EH \cap EK_p| = x^H(ET) - x^H(EK_p) = \frac{k^2+k}{2}, \end{aligned}$$

что противоречит правильности неравенства, индуцированного k-парашютом $T \cup K_p$.

Теперь покажем, что при $|VF_j| = 1$ компонента F_j не имеет смежных вершин в $U \cap VH$. Предположим, что это не так и в $U \cap VH$ найдутся $q > 0$ вершин, смежных с F_j. Без ограничения общности будем считать, что это вершины $u_1, u_2, \ldots, u_q$ и $VF_j = \{v_1\}$. Тогда

$$x^H(ET) = \sum_{i=1}^{k} x^H(ET_i) = q + \sum_{i=q+1}^{k} x^H(ET_i).$$

Пусть $s = \max\limits_{i=q+1,q+2,\ldots,k} |EH \cap ET_i|$. Тогда $|EH \cap EK_p| \geqslant \frac{s^2-s}{2}$. Отсюда, вновь пользуясь свойствами квадратного трёхчлена, получим

$$\begin{aligned} x^H(ET) - x^H(EK_p) &= q + \sum_{i=q+1}^{k} x^H(ET_i) - x^H(EK_p) \\ &= q + \sum_{i=q+1}^{k} |EH \cap ET_i| - |EH \cap EK_p| \leqslant q + (k-q)s - \frac{s^2-s}{2} \\ &= \frac{1}{2}(2q - s^2 + (2(k-q)+s)s) \leqslant \left\lfloor \frac{1}{2}\left(2q - \frac{(2(k-q)+1)^2}{4} \right.\right. \\ &\quad \left.\left. + \frac{(2(k-q)+1)^2}{2}\right)\right\rfloor = \left\lfloor q + \frac{(2(k-q)+1)^2}{8} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor q + \frac{(k-q)^2+(k-q)}{2} + \frac{1}{8} \right\rfloor = q + \frac{(k-q)^2+(k-q)}{2}, \end{aligned}$$

так как $(k-q)^2+(k-q)$ чётно. Теперь в силу (7) имеем

$$\frac{k^2+k}{2} \leqslant q + \frac{(k-q)^2+(k-q)}{2},$$

откуда $q \geqslant 2k-1$. Так как при этом $q \leqslant k$, справедливо неравенство $k \geqslant 2k-1$, следовательно, $k \leqslant 1$, что противоречит условию. Таким образом, если среди $F_1, F_2, \ldots, F_t$ есть одновершинные клики, то ни одна из таковых не смежна ни с одной вершиной из $V \cap VH$.

Теперь покажем, что непустых (отличных от одновершинных) клик среди $F_1, \ldots, F_t$ ровно одна. Предположим, что их больше одной, и возьмём две из них, скажем F_1 и F_2. При этом будем полагать, что $|VF_1| \geqslant |VF_2|$. Пусть $H_j \subset H$ — компонента связности, содержащая клику F_j, $j = 1, 2$. Через $S \subset U$ обозначим множество вершин, смежных с кликой F_2. Определим $H' = H \setminus H_2$. В графе H' вершины множества S будут изолированными. Соединив их рёбрами с вершинами компоненты H_1, получим клику H_1'. Теперь сформируем новый M-граф $H'' = (H' \setminus H_1) \cup H_1'$. Поскольку $|VF_1| \geqslant |VF_2|$, имеем $|ET \cap EH''| \geqslant |ET \cap EH|$. Кроме того, $|EK_p \cap EH''| < |EK_p \cap EH|$, так как рёбра из F_2 не входят в пересечение k-парашюта $T \cup K_p$ и M-графа H''.

Таким образом,

$$x^{H''}(ET) - x^{H''}(EK_p) > x^H(ET) - x^H(EK_p) = \frac{k^2+k}{2},$$

что противоречит правильности неравенства, индуцированного k-парашютом. Значит, среди компонент связности графа $H \cap K_p$ ровно одна непустая.

Без ограничения общности положим, что непустая компонента $F \subset H \cap K_p$ построена на вершинах $v_1, v_2, \ldots, v_q$, а $u_1, u_2, \ldots, u_s \in U$ — вершины, смежные с F. Тогда

$$x^H(ET) = \sum_{i=1}^{s} x^H(ET_i) = \sum_{i=1}^{s} |EH \cap ET_i| = sq,$$

$$x^H(EK_p) = |EH \cap EK_p| = |EF| = \frac{q^2-q}{2}.$$

Сначала заметим, что $s = k$. Действительно, если $s < k$, то рассмотрим клику H' на вершинах $U \cup \{v_1, v_2, \ldots, v_q\}$. Имеем

$$E(H' \cap K_p) = E(H \cap K_p) = EF, \quad E(H' \cap T) \supset E(H \cap T),$$

причём последнее включение строгое. Значит,

$$x^{H'}(ET) - x^{H'}(EK_p) > x^H(ET) - x^H(EK_p) = \frac{k^2+k}{2},$$

что вновь противоречит правильности неравенства.

Пусть

$$x^H(ET) = \sum_{i=1}^{k} x^H(ET_i) = \sum_{i=1}^{k} |EH \cap ET_i| = kq,$$

$$x^H(EK_p) = |EH \cap EK_p| = |EF| = \frac{q^2 - q}{2}.$$

Тогда в силу (7) имеем

$$kq - \frac{q^2 - q}{2} = \frac{k^2 + k}{2}, \quad 2kq - q^2 + q = k^2 + k,$$

$$q_{1,2} = \frac{2k + 1 \pm \sqrt{(2k+1)^2 - 4(k^2 + k)}}{2} = \frac{2k + 1 \pm 1}{2}, \quad q_1 = k,\ q_2 = k + 1.$$

Таким образом, клика F может содержать либо k, либо $k+1$ вершин. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $H \in \mathcal{H}$ таков, как требуется в условиях (i) и (ii) леммы. Покажем, что точка x^H обращает в равенство неравенство, индуцированное k-парашютом $T \cup K_p$. Будем полагать, что $|EH \cap EK_p| = \frac{\alpha^2 - \alpha}{2}$, где α равно либо k, либо $k + 1$. Тогда

$$\begin{aligned} x^H(ET) - x^H(EK_p) &= \sum_{i=1}^{k} |EH \cap ET_i| - |EH \cap EK_p| \\ &= k\alpha - \frac{\alpha^2 - \alpha}{2} = \frac{1}{2}(-\alpha^2 + (2k+1)\alpha) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}(-k^2 + (2k+1)k) = \frac{k^2+k}{2} & \text{при } \alpha = k, \\ \frac{1}{2}(-(k+1)^2 + (2k+1)(k+1)) = \frac{k^2+k}{2} & \text{при } \alpha = k + 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

Прямым следствием леммы 3 является

Теорема 6. *Пусть $T \cup K_p$ — k-парашют, $k \geqslant 2$. Неравенство*

$$x(ET) - x(EK_p) \leqslant \frac{k^2 + k}{2}$$

опорно к $P_{\mathcal{H}}$ тогда и только тогда, когда $p \geqslant k$.

Рассмотрим вопрос о фасетности неравенств, индуцированных k-парашютом $T \cup K_p$, при $k \geqslant 2$, $p \geqslant k$.

Согласно лемме 3 для всякого M-графа H, обращающего неравенство $x(ET) - x(EK_p) \leqslant \frac{k^2+k}{2}$ в равенство, выполняется включение $u_i u_j \in EH$, $i, j = 1, 2, \ldots, k$, $i \neq j$. Это означает, что грань

$$Q = \left\{ x \in P_{\mathcal{H}} \mid x(ET) - x(EK_p) = \frac{k^2+k}{2} \right\}$$

многогранника $P_{\mathcal{H}}$ принадлежит пересечению граней $Q_{u_i u_j} = \{x \in P_{\mathcal{H}} \mid x_{u_i u_j} = 1\}$, $i, j = 1, 2, \ldots, k$, $i \neq j$.

Заметим, что Q является собственной подгранью грани $Q_{u_i u_j}$ для любых $i, j = 1, 2, \ldots, k$, $i \neq j$. Это следует из того, что для M-графа $\{u_i u_j\}$ имеют место свойства $\{u_i u_j\} \notin Q$ и $\{u_i u_j\} \in Q_{u_i u_j}$. Значит,

$$\dim Q < \dim Q_{u_i u_j} < \dim P_{\mathcal{H}} - 1.$$

Таким образом, справедлива

Теорема 7. *Неравенство, индуцированное k-парашютом $T \cup K_p$, порождает фасету многогранника M-графов тогда и только тогда, когда $k = 1$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К.** Многогранники. Графы. Оптимизация. М.: Наука, 1981. 344 с.
2. **Ильев В. П., Ильева С. Д., Навроцкая А. А.** Приближённые алгоритмы для задач аппроксимации графов // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2011. Т. 18, № 1. С. 41–60.
3. **Ильев В. П., Фридман Г. Ш.** К задаче аппроксимации графами с фиксированным числом компонент // Докл. АН СССР. 1982. Т. 264, № 3. С. 533–538.
4. **Селиверстов А. В.** Многогранники и связные подграфы // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2014. Т. 21, № 3. С. 82–86.
5. **Симанчёв Р. Ю., Шерешик Н. Ю.** Целочисленные модели обслуживания требований одним прибором с прерываниями // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2014. Т. 21, № 4. С. 89–101.
6. **Схрейвер А.** Теория линейного и целочисленного программирования. Т. 2. М.: Мир, 1991. 342 с.
7. **Фридман Г. Ш.** Одна задача аппроксимации графов // Управляемые системы. 1971. Вып. 8. С. 73–75.
8. **Grotschel M., Holland O.** Solution of large-scale symmetric travelling salesman problems // Math. Programming. 1991. Vol. 51, No. 2. P. 141–202.

9. **Shamir R., Sharan R., Tsur D.** Cluster graph modification problems // Discrete Appl. Math. 2004. Vol. 144, No. 1–2. P. 173–182.

Симанчёв Руслан Юрьевич
Уразова Инна Владимировна

Статья поступила
11 декабря 2014 г.
Исправленный вариант —
31 января 2015 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
March–April 2015. Volume 22, No. 2. P. 86–101

UDC 519.1 DOI: 10.17377/daio.2015.22.469

ON THE FACES OF THE GRAPH APPROXIMATION PROBLEM POLYTOPE

Simanchev R. Yu.[1,2], *Urazova I. V.*[1]
[1]Omsk State University,
55–a Mira Ave., 644077 Omsk, Russia
[2] Omsk Scientific Center, SB RAS,
15/1 K. Marx Ave., 644024 Omsk, Russia
e-mail: osiman@rambler.ru, urazovainn@mail.ru

Abstract. We study the polytope of the graph approximation problem. The polyhedral relaxation of this polytope is built. We describe the class of valid inequalities for this polytope among which the inequalities that generate facets are allocated. Ill. 1, bibliogr. 9.

Keywords: stability of the solution, stability radius, Boolean polynomial, matroid, geometric configuration.

REFERENCES

1. **V. A. Emelichev, M. M. Kovalev,** and **M. K. Kravtsov,** *Mnogogranniki. Grafy. Optimizatsiya* (Polyhedra. Graphs. Optimization), Nauka, Moscow, 1981.
2. **V. P. Il'ev, S. D. Il'eva,** and **A. A. Navrotskaya,** Approximation algorithms for graph approximation problems, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **18**, No. 1, 41–60, 2011. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **5**, No. 4, 569–581, 2011.
3. **V. P. Il'ev** and **G. Sh. Fridman,** On the problem of approximation by graphs with a fixed number of components, *Dokl. Akad. Nauk SSSR,* **264**, No. 3, 533–538, 1982. Translated in *Sov. Math., Dokl.,* **25**, 666–670, 1982.

4. **A. V. Seliverstov,** Polytopes and connected subgraphs, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **21**, No. 3, 82–86, 2014.
5. **R. Yu. Simanchev** and **N. Yu. Shereshik,** Integer models for the interrupt-oriented services of jobs by single machine, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **21**, No. 4, 89–101, 2014.
6. **A. Schrijver,** *Theory of Linear and Integer Programming,* Vol. 2, John Wiley & Sons, New York, 1986. Translated under the title *Teoriya lineinogo i tselochislennogo programmirovaniya,* Vol. 2, Mir, Moscow, 1991.
7. **G. Sh. Fridman,** A problem of graph approximation, *Upr. Sist.*, **8**, 73–75, 1971.
8. **M. Grötschel, O. Holland,** Solution of large-scale symmetric travelling salesman problems, *Math. Program., Ser. A,* **51**, No. 1–3, 141–202, 1991.
9. **R. Shamir, R. Sharan,** and **D. Tsur,** Cluster graph modification problems, *Discrete Appl. Math.,* **144**, No. 1–2, 173–182, 2004.

Ruslan Yu. Simanchev
Inna V. Urazova

Received
11 December 2014
Revised
31 January 2015