ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Март—апрель 2015. Том 22, № 2. С. 17–26

УДК 519.718 DOI: 10.17377/daio.2015.22.470

О ЗАДАЧАХ РАСКРАСКИ ДЛЯ ДВУХСЕЗОННЫХ МУЛЬТИГРАФОВ

В. Г. Визинг[1]
[1]ул. Варненская, 18/2, кв. 26, 65070 Одесса, Украина
e-mail: vizing@paco.net

Аннотация. Предполагается, что есть два момента времени, называемых *сезонами*, в которых мультиграф может иметь различные множества рёбер. Такие мультиграфы с изменяющейся структурой называются *двухсезонными.* При раскраске вершин или рёбер каждый объект раскрашивается в одном сезоне. Приводятся оценки двухсезонного хроматического числа, описывается точный алгоритм минимальной раскраски рёбер двудольного двухсезонного мультиграфа. Библиогр. 3.

Ключевые слова: двухсезонный мультиграф, двухсезонная раскраска.

1. Основные понятия. Постановка задачи.

Пусть $L = (V, E)$ — конечный неориентированный мультиграф без петель, в котором V — множество вершин, E — множество рёбер. Будем обозначать через $d(L, v)$ степень вершины v, $\Delta(L)$ — максимальную степень вершины, $\chi(L)$ — хроматическое число мультиграфа L. Запись $e = uv$, где $e \in E$, $u, v \in V$, означает, что e — ребро с концами u и v.

Структура мультиграфа может изменяться с течением времени. Рассматриваем случай, когда есть всего два момента времени, которые будем называть *сезонами*, а мультиграф с изменяющейся структурой — *двухсезонным мультиграфом.* Двухсезонные ориентированные графы рассматривались в работе [1], посвящённом отысканию базы вершин в таких графах. В настоящей работе рассматриваются неориентированные двухсезонные мультиграфы.

Двухсезонный мультиграф G — четвёрка (V, E_0, E_1, E_2), где V — множество вершин, E_0 — множество *двухсезонных рёбер*, E_1, E_2 — множества *односезонных рёбер*, существующих в первом и втором сезонах соответственно. Если мультиграф $G' = (V, E_0 \cup E_1 \cup E_2)$ заведомо не содержит кратных рёбер, то G будем называть *двухсезонным графом.*

Под цветами понимаются натуральные числа. Множество цветов обозначается через C. Мы будем иметь дело с двухсезонной раскраской вершин или рёбер двухсезонных мультиграфов. Каждому раскрашиваемому объекту сопоставляется *сезонный цвет* — пара (j, c), где $c \in C$, а j — номер сезона, в котором производится раскраска ($j = 1, 2$).

Двухсезонная раскраска вершин графа $G = (V, E_0, E_1, E_2)$ называется *правильной*, если различные вершины v и u могут окрашиваться в один и тот же сезонный цвет (j, c) при условии, что в $E_0 \cup E_j$ нет ребра с концами v и u ($j = 1, 2$). Наименьшее число цветов множества C, необходимое для правильной двухсезонной раскраски всех вершин графа G, называется *двухсезонным хроматическим числом* графа G и обозначается через $\chi_0(G)$.

В работе оценивается $\chi_0(G)$ через хроматические числа графов $G_0 = (V, E_0)$ и $G^0 = (V, E_0 \cup E_1 \cup E_2)$, а также указывается алгоритм, устанавливающий, имеет ли место равенство $\chi_0(G) = 1$.

При двухсезонной раскраске рёбер мультиграфа $G = (V, E_0, E_1, E_2)$ каждое односезонное ребро окрашивается в своем сезоне, а двухсезонное — в одном из сезонов. Двухсезонная раскраска рёбер называется *правильной*, если два различных ребра, одинаково окрашенных в одном и том же сезоне, не смежны. Наименьшее число цветов множества C, необходимое для правильной двухсезонной раскраски всех рёбер, называется *двухсезонным хроматическим индексом* мультиграфа G и обозначается через $\chi'_0(G)$.

В работе приводится алгоритм, определяющий двухсезонный хроматический индекс двудольного двухсезонного мультиграфа. Предварительно приходится решить вспомогательную задачу о возможности разбиения двудольного мультиграфа на два подграфа, степени вершин которых удовлетворяют заданным верхним ограничениям.

2. Раскраска вершин

Утверждение 1. *Пусть $G = (V, E_0, E_1, E_2)$ — двухсезонный граф, $G_0 = (V, E_0)$ и $G^0 = (V, E_0 \cup E_1 \cup E_2)$ — графы. Тогда*

$$\lceil \chi(G_0)/2 \rceil \leqslant \chi_0(G) \leqslant \lceil \chi(G^0)/2 \rceil.$$

Доказательство. Сначала докажем, что $\lceil \chi(G_0)/2 \rceil \leqslant \chi(G_0)$. Построим правильную двухсезонную раскраску вершин графа G с помощью $\chi_0(G)$ цветов. Пусть q_1 цветов использовано для раскраски вершин в первом сезоне, а q_2 цветов — для раскраски вершин во втором сезоне. Тогда $\chi_0(G) = \max\{q_1, q_2\}$. Вершины, одинаково окрашенные в одном сезоне, не могут соединяться ребром из E_0, и их можно одинаково окрасить в графе G_0. Поэтому $\chi_0(G) \leqslant q_1 + q_2$. Отсюда следует, что $\lceil \chi(G_0)/2 \rceil \leqslant \max\{q_1, q_2\} = \chi_0(G)$.

Докажем верхнюю оценку для $\chi_0(G)$. Вершины графа G^0 раскрасим $\chi(G^0)$ цветами $1, 2, \ldots, \chi(G^0)$. Затем перейдём к двухсезонной раскраске следующим образом. Если в графе G^0 вершина имеет цвет c, то в графе G окрашиваем её в сезонный цвет $(1, \lceil c/2 \rceil)$, если c — нечётное число, и в сезонный цвет $(2, \lfloor c/2 \rfloor)$, если c — чётное число. Получим правильную двухсезонную раскраску всех вершин графа G с использованием $\lceil \chi(G^0)/2 \rceil$ цветов множества C. Следовательно, $\chi_0(G) \leqslant \lceil \chi(G^0)/2 \rceil$. Утверждение 1 доказано.

Верхние и нижние границы двухсезонного хроматического числа, приведённые в утверждении 1, совпадают, если $E_1 = \varnothing$ и $E_2 = \varnothing$.

Вопрос о том, верно ли равенство $\chi_0(G) = 2$, относится к NP-трудным. Положительный ответ на него решил бы задачу: верно ли, что хроматическое число графа не больше 4? Это NP-трудная задача [2]. Зададимся вопросом: когда имеет место равенство $\chi_0(G) = 1$? Очевидно следующее

Утверждение 2. *Равенство $\chi_0(G) = 1$ выполняется тогда и только тогда, когда множество V разбивается на два подмножества V_1 и V_2 таким образом, что любые две вершины из V_1 либо не смежны, либо соединены ребром из E_2, а любые две вершины из V_2 либо не смежны, либо соединены ребром из E_1.*

Опишем процедуру, с помощью которой устанавливается возможность указанного разбиения вершин графа $G = (V, E_0, E_1, E_2)$. Если $\chi_0(G) = 1$, то каждая вершина окрашивается либо в первом, либо во втором сезоне. Если вершина окрашивается в первом сезоне, то все её соседи в $E_1 \cup E_0$ должны окрашиваться в сезоне 2, а если во втором, то все её соседи в $E_2 \cup E_0$ должны быть окрашены в сезоне 1. Выберем произвольную вершину, назовём её *индуктором*. Каждый вариант её раскраски индуцирует вариант раскраски некоторых других вершин. Если оба варианта приводят к противоречию, то это означает, что $\chi_0(G) > 1$. Если же один из вариантов не приводит к противоречию, то для некоторых вершин зафиксирован сезон, в котором они будут окрашиваться. Если остались вершины, для которых сезон окраски не определён, то из таких вершин произвольным образом выбираем индуктора и продолжаем описанную процедуру. В результате либо придём к противоречию ($\chi_0(G) > 1$), либо для всех вершин укажем сезон, в котором они будут окрашиваться ($\chi_0(G) = 1$).

Дадим более формальное изложение этой процедуры.

Будем вершинам графа G присваивать метки, используя в качестве меток числа 1 и 2. Выберем произвольную вершину, назовём эту вершину *индуктором.* Первый вариант состоит в том, что индуктору присвоим метку 1. Затем действуем по следующим правилам. Пусть x и y — смежные вершины и p — метка вершины x. Возможны такие случаи.

Случай 1: $p = 1$, $xy \in E_1 \cup E_0$, вершина y не имеет метки. Тогда вершине y присваиваем метку 2.

Случай 2: $p = 2$, $xy \in E_2 \cup E_0$, вершина y не имеет метки. Тогда вершине y присваиваем метку 1.

Случай 3: вершина y имеет метку q, причём $q = p$, $xy \in E_p \cup E_0$. Это свидетельствует о противоречивости варианта.

Если в первом варианте встретился случай 3, то переходим ко второму варианту. Для этого убираем все метки, полученные в первом варианте, индуктору присваиваем метку 2 и присваиваем метки другим вершинам по тем же правилам. Если и во втором варианте встретился случай 3, то это означает, что $\chi_0(G) > 1$, и алгоритм останавливается.

Предположим, что в одном из вариантов не встретился случай 3 и процесс присвоения вершинам меток стабилизировался. Тогда удалим из графа G все вершины с метками (множество удаляемых вершин непустое, так как индуктор удаляется). Если после удаления у графа остались вершины, то одну из вершин назначаем индуктором и продолжаем процедуру. В результате либо будет установлено, что $\chi_0(G) > 1$, либо все вершины получат метки. В последнем случае $\chi_0(G) = 1$ и метка каждой вершины является индикатором сезона, в котором вершина окрашивается.

3. О разбиении двудольного мультиграфа на подграфы с заданными верхними ограничениями на степени вершин

Для задачи о минимальной раскраске рёбер двудольного двухсезонного мультиграфа потребуется решить такую задачу.

Имеется двудольный мультиграф $H = (X, Y, E)$, где X и Y — множества вершин первой и второй доли соответственно, E — множество рёбер. Задано *степенное предписание*, состоящее в том, что каждой вершине v сопоставлена пара целых неотрицательных чисел $(\alpha(v), \beta(v))$ таких, что

$$\alpha(v) + \beta(v) \geqslant d(H, v). \tag{1}$$

Требуется установить, существует ли разбиение множества рёбер E на два подмножества E' и E'', при котором в мультиграфах $H' = (X, Y, E')$

и $H'' = (X, Y, E'')$ для каждой вершины v выполняются неравенства

$$d(H', v) \leqslant \alpha(v), \quad d(H'', v) \leqslant \beta(v). \tag{2}$$

Степенное предписание, при котором это выполняется, называется *креативным*.

Удобно считать, что рёбра множества E' окрашены в цвет 1, а рёбра множества E'' — в цвет 2. Такую раскраску назовём *допустимой*, если не нарушаются условия (2), т. е. число рёбер цвета 1 (цвета 2), инцидентных произвольной вершине v, не превосходит $\alpha(v)$ ($\beta(v)$). Степенное предписание является креативным тогда и только тогда, когда существует допустимая раскраска всех рёбер мультиграфа H.

При допустимой раскраске какого-либо подмножества множества E цвет 1 (цвет 2) называется *свободным* в вершине v, если число рёбер цвета 1 (цвета 2), инцидентных вершине v, меньше $\alpha(v)$ ($\beta(v)$). Цвет, не являющийся свободным в вершине, называется *занятым* в этой вершине. *Чередующейся цепью* называется цепь, соединяющая две различные вершины, рёбра которой попеременно окрашены в цвета 1 и 2. Такая цепь может состоять из одного ребра. Перекраска такой цепи состоит в том, что рёбра цвета 1 окрашиваются в цвет 2, а рёбра цвета 2 — в цвет 1. Перекраска чередующейся цепи, соединяющей вершины a и b, не нарушает допустимости раскраски рёбер, если в вершинах a и b до перекраски свободны те цвета, которые отличны от цветов конечных рёбер цепи, инцидентных соответственно вершинам a и b.

Утверждение 3. *Пусть U — собственное подмножество множества рёбер E мультиграфа $H = (X, Y, E)$ и φ — допустимая раскраска рёбер множества U. Пусть ребро $e = xy$ не принадлежит U ($x \in X$, $y \in Y$), причём в вершинах x и y нет общего свободного цвета. Если существует допустимая раскраска Φ рёбер множества $U \cup \{e\}$, то при раскраске φ найдётся чередующаяся цепь, после перекраски которой в вершинах x и y появится общий свободный цвет.*

Доказательство. Предположим, что $\Phi(e) = 1$ (поэтому $\alpha(x) > 0$, $\alpha(y) > 0$) и при раскраске φ только цвет 1 свободен в вершине x и только цвет 2 свободен в вершине y. (Эти предположения не ограничивают общности рассуждений — при других вариантах рассуждения симметричны). Покажем, что при раскраске φ существует чередующаяся цепь, начинающаяся инцидентным вершине y ребром цвета 1, после перекраски которой в вершинах x и y цвет 1 станет свободным.

Пусть W — подмножество тех рёбер из U, которые получили различные цвета при раскрасках Φ и φ. Для каждой вершины v мультиграфа H

введём такие обозначения:

$F_i(v)$ — число инцидентных v рёбер из W, окрашенных в цвет i при раскраске Φ $(i = 1, 2)$;

$f_i(v)$ — число инцидентных v рёбер из W, окрашенных в цвет i при раскраске φ $(i = 1, 2)$;

$t_i(v)$ — число инцидентных v рёбер из E, одинаково окрашенных в цвет i при раскрасках Φ и φ $(i = 1, 2)$.

Очевидно, что $f_1(v) = F_2(v)$ и $f_2(v) = F_1(v)$.

Имеет место неравенство $f_1(y) > f_2(y)$. Действительно, при раскраске φ цвет 1 занят в вершине y, поэтому $f_1(y)+t_1(y) = \alpha(y)$. Так как Φ — допустимая раскраска и $\Phi(e) = 1$, имеем $F_1(y) + t_1(y) < \alpha(y)$, однако e не принадлежит W. Значит, $f_1(y) > F_1(y) = f_2(y)$.

Пусть z — вершина, отличная от y. Если при раскраске φ цвет 1 занят в вершине z, то $f_1(z) \geqslant f_2(z)$. Действительно, раскраска Φ допустима, поэтому $F_1(z) + t_1(z) = f_2(z) + t_1(z) \leqslant \alpha(z)$, но $f_1(z) + t_1(z) = \alpha(z)$, поскольку цвет 1 занят в вершине z. Значит, $f_1(z)+t_1(z) \geqslant f_2(z)+t_1(z)$, откуда $f_1(z) \geqslant f_2(z)$. Аналогично показывается, что если в вершине z при раскраске φ занят цвет 2, то $f_1(z) \geqslant f_2(z)$.

Приступаем к построению из рёбер подмножества W чередующейся цепи. Говоря о цвете ребра, будем иметь в виду его цвет при раскраске φ. Назовём *особыми* вершины множества X, в которых занят цвет 2, и вершины из множества Y, в которых занят цвет 1. Превратим рёбра множества W в дуги, которые направлены от Y к X для рёбер цвета 1 и от X к Y для рёбер цвета 2. Пусть K — подграф , порожденный вершинами, достижимыми путями из y. По доказанному полустепень исхода вершины y в этом подграфе больше полустепени захода, а у остальных особых вершин полустепень исхода не меньше полустепени захода. Поэтому в подграфе K существует непустое подмножество вершин, у которых полустепень захода больше полустепени исхода. Каждая из таких вершин не является особой. Пусть P — путь минимальной длины, идущий от y к вершине подграфа K, не являющейся особой. Рёбра, соответствующие дугам этого пути, образуют чередующуюся цепь. Обозначим через u конечную вершину этой цепи. Если $u \in X$, то вершине u инцидентно ребро цепи цвета 1, а в самой вершине свободен цвет 2. Если $u \in Y$, то вершине u инцидентно ребро цепи цвета 2, а в самой вершине свободен цвет 1. В обоих случаях после перекраски чередующейся цепи в вершинах x и y цвет 1 станет свободным. Утверждение 3 доказано.

Как видно из доказательства утверждения 3, построение требуемой чередующейся цепи сводится к простой процедуре отыскания ближайшей к y неособой вершины.

Вопрос о существовании допустимой раскраски всех рёбер мультиграфа H решается путём последовательного расширения множества окрашенных рёбер. Пусть, как и в формулировке утверждения 3, раскрашено уже подмножество $U \subset E$ (случай $U = \varnothing$ не исключается), а ребро $e = xy$ не окрашено. Нужно решить вопрос о существовании допустимой раскраски множества $U \cup \{e\}$. Если $\alpha(x) \cdot \alpha(y) = 0$ и $\beta(x) \cdot \beta(y) = 0$, то ребро e окрасить нельзя и, значит, нет допустимой раскраски всех рёбер мультиграфа H. Пусть хотя бы одно из указанных равенств не выполняется. Если в вершинах x и y есть общий свободный цвет, то окрашиваем в него ребро e. Если же общего свободного цвета нет, то в случае возможности окрасить множество $U \cup \{e\}$ по утверждению 3 существует чередующаяся цепь, начинающаяся в x или в y, после перекраски которой в вершинах x и y появится общий свободный цвет, в который можно будет окрасить ребро e. Таким образом, нужно проверить существование или не существование не более двух чередующихся цепей и решить вопрос о том, возможна ли перекраска хотя бы одной из них, приводящая к появлению общего свободного цвета в вершинах x и y.

4. Раскраска рёбер двудольного двухсезонного мультиграфа

Пусть $B = (X, Y, E_0, E_1, E_2)$ — двудольный двухсезонный мультиграф. Необходимо найти точное значение двухсезонного хроматического индекса $\chi'_0(B)$.

По теореме Кёнига [3] минимальное число цветов, необходимых для правильной раскраски рёбер в одном сезоне, равно максимальной степени вершины подграфа, образованного раскрашиваемыми в этом сезоне рёбрами. Поэтому нужно так распределить двухсезонные рёбра между сезонами, чтобы минимизировать максимальную степень получившихся в каждом сезоне подграфов.

Рассмотрим мультиграфы: $B_0 = (X, Y, E_0)$, $B_1 = (X, Y, E_1)$, $B_2 = (X, Y, E_2)$. В связи со сказанным очевидно, что

$$\chi'_0(B) \geqslant \max\{\lceil \Delta(B)/2 \rceil, \Delta(B_1), \Delta(B_2)\}.$$

Пусть

$$h_0 = \max\{\lceil \Delta(B)/2 \rceil, \Delta(B_1), \Delta(B_2)\}. \tag{3}$$

Нужно найти минимальное h, при котором $\chi'_0(B) = h$.

Пусть $h \geqslant h_0$. Каждой вершине v мультиграфа B_0 сопоставим пару чисел $(\alpha(v), \beta(v))$, где $\alpha(v) = h - d(B_1, v)$, $\beta(v) = h - d(B_2, v)$. Это будет степенным предписанием. Действительно, $h \geqslant \max\{\Delta(B_1), \Delta(B_2)\}$, поэтому $\alpha(v) \geqslant 0$ и $\beta(v) \geqslant 0$. Выполняется и условие (1):

$$\begin{aligned}\alpha(v) + \beta(v) &= 2h - (d(B_1, v) + d(B_2, v)) \\ &\geqslant \Delta(B) - (d(B_1, v) + d(B_2, v)) \geqslant (d(B_0, v) + d(B_1, v) + d(B_2, v)) \\ &\qquad - (d(B_1, v) + d(B_2, v)) = d(B_0, v).\end{aligned}$$

Если это степенное предписание для вершин мультиграфа B_0 является креативным, то множество E_0 разбивается на подмножества E_0' и E_0'' так, что каждой вершине v мультиграфа B_0 инцидентно не больше $\alpha(v)$ рёбер из E_0' и не больше $\beta(v)$ рёбер из E_0''. Поэтому степень каждой вершины v в мультиграфе $B_1' = (X, Y, E_0 \cup E_0')$ не больше $d(B_1, v) + \alpha(v) = h$. Следовательно, $\Delta(B_1') \leqslant h$. Аналогично показывается, что $\Delta(B_2'') \leqslant h$ для мультиграфа $B_2'' = (X, Y, E_0 \cup E_0'')$. Таким образом, $\chi_0'(B) \leqslant h$.

Легко также убедиться, что из равенства $\chi_0'(B) = h$ вытекает креативность степенного предписания, построенного указанным способом для мультиграфа B_0.

Тем самым задача сводится к отысканию минимального h, при котором построенное указанным образом степенное предписание для B_0 креативно.

Поиск такого минимального значения h осуществляется с помощью итерационной процедуры. Сначала полагаем $h = h_0$, где h_0 вычислено по формуле (3), и методом, изложенным в разд. 3, определяем, будет ли креативным при этом h степенное предписание для B_0. В случае отрицательного ответа увеличиваем h на 1 и снова проверяем степенное предписание на креативность и т. д. Таких итераций потребуется не больше $\lfloor \Delta(B)/2 \rfloor + 1$.

Автор благодарен рецензенту за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Визинг В. Г.** О базах вершин двухсезонного ориентированного графа // Докл. Одесского семинара по дискретной математике. 2014. № 15. С. 13–16.
2. **Garey M. R., Johnson D. S., Stockmeyer I. J.** Some simplified NP-complete graph problems // Theoret. Comput. Sci. 1976. No. 1. P. 337–367.

3. **König D.** Über Graphen und ihre Anvendung auf Determinantentheorie und Mengenlehre // Math. Ann. 1916. No. 77. P. 453–465.

Визинг Вадим Георгиевич

Статья поступила
22 декабря 2014 г.

Исправленный вариант —
16 февраля 2015 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
March–April 2015. Volume 22, No. 2. P. 17–26

UDC 519.718 DOI: 10.17377/daio.2015.22.470

ON COLORING PROBLEMS FOR THE TWO-SEASON MULTIGRAPHS

V. G. Vizing[1]

[1]Apt. 26, 18/2 Varnenskaya St., 165070 Odessa, Ukraine
e-mail: vizing@paco.net

Abstract. It is supposed that there are two moments of time called *seasons* in which a multigraph can have various sets of edges. Such multigraphs are called *two-season.* In coloring vertices or edges every object is colored in one season. Some bounds on two-season chromatic number are given and the exact algorithm for the minimal edge coloring of a bipartite two-season multigraph is presented. Bibliogr. 3.

Keywords: two-season multigraph, two-season coloring.

REFERENCES

1. **V. G. Vizing,** On bases of vertices of a two-season directed graph, in *Doklady Odesskogo seminara po diskretnoi matematike* (Doklady of Odessa Seminar on Discrete Mathematics), Vol. 15, pp. 13–16, Astroprint, Odessa, 2014.
2. **M. R. Garey, D. S. Johnson,** and **L. Stockmeyer,** Some simplified NP-complete graph problems, *Theor. Comput. Sci.,* **1**, No. 3, 237–267, 1976.

3. **D. König,** Über Graphen und ihre Anvendung auf Determinantentheorie und Mengenlehre, *Math. Ann.,* **77**, No. 4, 453–465, 1916.

Vadim G. Vizing

Received
22 December 2014

Revised
16 February 2015