ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Май—июнь 2015. Том 22, № 3. С. 55–74

УДК 519.1 DOI: 10.17377/daio.2015.22.455

ЗАДАЧА О МАКСИМАЛЬНОМ ПОТОКЕ В СЕТИ С ОСОБЫМИ УСЛОВИЯМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОТОКА

В. А. Скороходов[1], *А. С. Чеботарёва*[1]
[1]Южный федеральный университет,
ул. Мильчакова, 8а, 344090 Ростов-на-Дону, Россия
e-mail: pdvaskor@yandex.ru, chebot1988@yandex.ru

Аннотация. Рассмотрена задача нахождения максимального потока в сетях с условиями жёсткого и нежёсткого распределения потока. Показано, что для каждого условия распределения решение рассматриваемой задачи существует и единственно. Разработаны алгоритмы нахождения максимального потока для каждого условия распределения потока, а также получены верхняя и нижняя оценки для величины максимального потока в сетях с условием жёсткого распределения. Ил. 3, табл. 4, библиогр. 11.

Ключевые слова: сеть, граф, алгоритм на графах, максимальный поток в сети, распределение потока.

Введение

Задача максимизации потока в сети является одной из классических оптимизационных задач на графах. Среди большого числа статей, изучающих различные постановки потоковых задач (см., например, [2, 4, 6–11]), особенно выделим работу А. И. Ерзина и И. И. Тахонова [1], в которой рассмотрена модель произвольной ориентированной сети с неограниченными пропускными способностями дуг, каждая из вершин которой производит некоторый поток ресурса. Предполагается, что время дискретно и на любом временнóм шаге каждая вершина распределяет пришедший в неё поток по исходящим дугам в заданной пропорции. Поток, пришедший в каждую вершину-сток, поглощается полностью. В [1] доказано, что когда каждая вершина графа связана путём со стоком, при любом наборе величин производимого в вершинах потока существует единственный «сбалансированный» поток, а также приведены аналитические формулы для вычисления предельного потока.

Похожие модели, а именно динамические графовые модели распространения ресурса, названные авторами ресурсными сетями, рассмотрены в работах О. П. Кузнецова и Л. Ю. Жиляковой (см., например, [4]). Ресурсная сеть — это сеть, для каждой дуги которой указана пропускная способность, а для каждой вершины — величина находящегося в ней ресурса. В каждый момент времени ресурс каждой вершины перераспределяется между смежными с ней вершинами по некоторым правилам, при этом в сети действует закон сохранения ресурса, т. е. ресурс не исчезает и не добавляется извне. Поскольку ресурс перераспределяется между вершинами в некоторой пропорции, при наличии так называемых вершин-приёмников и вершин-источников ресурса задача предельного распределения ресурса схожа как с задачей поиска сбалансированного потока в [1], так и с задачами о распределении потока, рассмотренными в данной работе.

В настоящей работе рассмотрены задачи о максимальном потоке в произвольной ориентированной сети, для каждой дуги которой вместе с пропускной способностью задана вторая величина — доля приходящего в её начальную вершину потока, которая должна быть пропущена по этой дуге. В [3] отмечено, что в таком случае в сети задано некоторое распределение потока. Показано, что даже в том случае, когда существует бесконечно много потоков заданной величины, задание долей потока для всех дуг фиксирует единственный поток указанной величины.

Рассмотрены два вида такого распределения потока: жёсткое и нежёсткое. В случае жёсткого распределения приходящий в некоторую вершину поток распределяется по выходящим дугам строго в указанных для дуг долях. В случае нежёсткого распределения приходящий поток распределяется по выходящим дугам таким образом, чтобы долевая пропорциональность величин потока выполнялась только для тех дуг, на которых полученная величина потока меньше пропускной способности. Последнее означает, что в некоторых случаях нежёстко распределённый поток, приходящий в некоторую вершину, можно «продавить» по выходящим дугам помимо того, что проходит через данную вершину при условии жёсткого распределения.

Ключевым и существенным отличием от сетей, рассмотренных в [1], является ограниченность пропускных способностей всех дуг сети. Таким образом, не весь возможный поток, приходящий из источника в некоторую вершину, может быть распределён по выходящим из неё дугам в указанных долях, что существенно влияет на решение поставленных задач. Хотя при исследовании задачи о максимальном жёстко распределённом потоке рассматриваются системы уравнений, схожие с системами в [1], для доказательства некоторых утверждений (теоремы 2 и 3) данной работы и обоснования приведённого алгоритма нахождения максимального жёстко распределённого потока потребовалось другое доказательство однозначной разрешимости построенных систем.

1. Максимальный поток в сети с условием жёсткого распределения потока

Рассмотрим сеть $G(X, U, f)$ — связный ориентированный граф с двумя выделенными вершинами (источником s и стоком t) — такую, что для каждой её дуги $u \in U$ заданы две величины: пропускная способность $c(u)$ и доля $p(u)$ прохождения по ней потока, приходящего в начальную вершину дуги u [3, 6, 7]. Обозначим через $F(u)$ величину потока F, проходящего по дуге u.

Ясно, что для величин $p(u)$, $c(u)$ и $F(u)$ справедливы следующие выражения [3, 8]:

$$\begin{cases} \sum\limits_{u\in[x]^+} p(u) = 1, & x \neq t, \\ \sum\limits_{u\in[x]^-} F(u) - \sum\limits_{u\in[x]^+} F(u) = 0, & x \neq s, t, \\ 0 \leqslant F(u) \leqslant c(u), & u \in U. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь и далее через $[x]^+$ будем обозначать множество дуг, выходящих из вершины x, а через $[x]^-$ — множество дуг, входящих в вершину x.

Определение 1. Поток F в сети G будем называть *жёстко распределённым*, если для него выполняются соотношения (1) и величины пропускаемого по дугам потока пропорциональны долям потока, проходящего по этим дугам, т. е.

$$F(u_i) \cdot p(u_j) = F(u_j) \cdot p(u_i), \quad u_i, u_j \in [x]^+,\ x \in X \setminus \{t\}. \tag{2}$$

Определение 2. Сети, для которых рассматриваются только потоки, удовлетворяющие условиям (1) и (2), будем называть *сетями с жёстким распределением потока*.

Пример 1. Рассмотрим сеть G с условием жёсткого распределения потока на рис. 1, при этом величины $c(u)$, $p(u)$ и один из вариантов допустимого потока F для дуг сети G представлены в табл. 1.

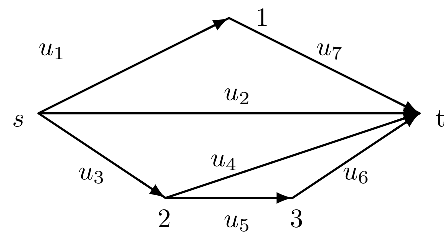

Рис. 1. Ориентированная сеть G с условием жёсткого распределения потока

Таблица 1

Пропускные способности, доли и величины потока на дугах сети G

u	$p(u)$	$c(u)$	$F(u)$
u_1	$\frac{1}{5}$	20	$8\frac{1}{3}$
u_2	$\frac{3}{5}$	25	25
u_3	$\frac{1}{5}$	40	$8\frac{1}{3}$
u_4	$\frac{7}{10}$	15	$5\frac{5}{6}$
u_5	$\frac{3}{10}$	8	$2\frac{1}{2}$
u_6	1	3	$2\frac{1}{2}$
u_7	1	10	$8\frac{1}{3}$

Для величин, представленных в табл. 1, выполнены условия (1). Можно видеть, что условие (2) также выполняется:

$$\frac{1}{5} : \frac{3}{5} = 8\frac{1}{3} : 25, \quad \frac{1}{5} : \frac{1}{5} = 8\frac{1}{3} : 8\frac{1}{3}, \quad \frac{3}{5} : \frac{1}{5} = 25 : 8\frac{1}{3}, \quad \frac{7}{10} : \frac{3}{10} = 5\frac{5}{6} : 2\frac{1}{2}.$$

1.1. Нетривиальная разрешимость задачи нахождения максимального жёстко распределённого потока. Поскольку нулевой поток является жёстко распределённым, рассмотрим вопрос о нетривиальной разрешимости задачи нахождения максимального жёстко распределённого потока в сети G с выделенными источником s и стоком t.

Определение 3. Будем говорить, что *вершина x охватывается источником s*, если существует путь из s в x. Также будем говорить, что *вершина x охватывается стоком t*, если существует путь из x в t.

Множества всех не охватываемых источником и стоком вершин будем обозначать через Y_s и Y_t соответственно.

Определение 4. Сеть G с выделенными источником s и стоком t будем называть *s-охватываемой*, если $Y_s = \varnothing$.

Определение 5. *Сеть G с выделенными источником s и стоком t будем называть t-охватываемой, если $Y_t = \varnothing$.*

Рассмотрим все варианты охватываемости сетей.

Вариант 1. Для сети, являющейся одновременно и s-, и t-охватываемой, далее будет показано существование единственного ненулевого решения задачи нахождения максимального жёстко распределённого потока.

Вариант 2. Для сети, которая является s-охватываемой и не является t-охватываемой, легко показать существование единственно возможного жёстко распределённого потока — нулевого потока.

Вариант 3. Для сети, которая является t-охватываемой и не является s-охватываемой, рассмотрим подсеть G', порождённую множеством вершин $Y' = X \setminus Y_s$. Если сток t не принадлежит сети G', то задача нахождения жёстко распределённого потока имеет только тривиальное решение, поскольку нет ни одного пути из источника в сток [3]. Если сток t принадлежит сети G', то задача нахождения максимального жёстко распределённого потока в сети G сводится к аналогичной задаче для сети G', которая, в свою очередь, нетривиально разрешима по варианту 1. Решение в этом случае может быть получено следующим образом:

а) для каждой вершины $x \in Y_s$ положить $F(u) = 0$ для каждой дуги $u \in [x]^+$;

б) для каждой вершины $x \in X \setminus Y_s$ положить $F(u) = F'(u)$ для каждой дуги $u \in [x]^+$, где F' — решение задачи о максимальном жёстко распределённом потоке в сети G'.

Вариант 4. Для сети, которая не является t-охватываемой и не является s-охватываемой, если $Y_t \subset Y_s$, то, как и выше, задача нахождения максимального жёстко распределённого потока в сети G сводится к аналогичной задаче для сети G', которая нетривиально разрешима по варианту 1. Если же $Y_t \not\subset Y_s$, то для подсети G' имеет место второй вариант охватываемости, т. е. в сети G', а следовательно, и в сети G существует только нулевой жёстко распределённый поток.

1.2. Задача о максимальном жёстко распределённом потоке. Рассмотрим для сети $G(X, U, f)$ с условием жёсткого распределения потока задачу о максимальном потоке. Здесь и далее полагаем, что сеть G является одновременно и s-, и t-охватываемой.

При введении условия распределения потока применение классических алгоритмов не даёт решения поставленной задачи, поскольку в классических алгоритмах исходящие из вершины потоки не связаны между собой.

Для решения поставленной задачи будем использовать подход, согласно которому составим систему уравнений, описывающую жёсткое распределение потока в сети. Такую систему будем строить в три этапа.

Этап 1. Для каждой вершины $x \neq s, t$ сети G составим уравнения двух видов:

$$p(u) \sum_{v \in [x]^+} F(v) - F(u) = 0, \quad u \in [x]^+ \setminus w_x, \tag{3}$$

$$p(w_x) \sum_{v \in [x]^-} F(v) - F(w_x) = 0. \tag{4}$$

В обоих равенствах w_x — это произвольная (не обязательно одна и та же) дуга из множества $[x]^+$.

Отметим, что если составлять уравнения вида (3) для всех дуг вершины x, то одно из них обязательно будет линейной комбинацией остальных. В таком случае система будет избыточна. Таким образом выбирается одна дуга w_x, для которой не составляется уравнений вида (3). Аналогично для уравнений вида (4), если взять более одного уравнения, то снова получим избыточную систему.

Этап 2. Для вершины s составим лишь уравнения первого вида (3), поскольку входящих в вершину дуг нет. Для вершины t, так как нет исходящих дуг, уравнений составлено не будет.

Замечание 1. Уравнения (3) (первого вида) обеспечивают выполнение равенства (2). Уравнения (4) (второго вида) связывают величину входящего в вершину x потока с величиной потока, исходящего из этой вершины, таким образом обеспечивая выполнение второго соотношения в условиях (1).

Этап 3. К уравнениям, полученным на этапах 1 и 2, добавим уравнение вида $F(w) = a$, где $a \in R_+$ и w — произвольная дуга сети G. Таким образом, получим систему уравнений

$$\begin{cases} p(u) \sum\limits_{v \in [x]^+} F(v) - F(u) = 0, \quad x \in X \backslash \{t\}, \; u \in [x]^+ \setminus \{w_x\}, \\ p(w_x) \sum\limits_{v \in [x]^-} F(v) - F(w_x) = 0, \quad x \in X \backslash \{s, t\}, \\ F(w) = a. \end{cases} \tag{5}$$

Покажем, что решение системы (5) существует и единственно.

Замечание 2. Множество уравнений первого и второго вида обеспечивают связь величин потоков на дугах только для тех сетей, которые являются одновременно и s-, и t-охватываемыми. Если это не так, то не все величины потоков на дугах будут связаны уравнениями первого и второго вида. В таком случае множество решений системы уравнений (5) может быть и пустым.

Зафиксируем нумерации в множествах вершин и дуг $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ и $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$. Здесь и далее будем считать, что $m = |U|$. Также для определённости будем считать, что $s = x_1$ и $t = x_n$. Основную матрицу системы (5) обозначим через A.

Разобьём всё множество вектор-строк матрицы A на подмножества g_i, $i \in [1; n+1]_Z$, следующим образом:

к g_i отнесём те строки, которые соответствуют всем уравнениям первого вида, построенным для вершины x_i,

к g_n отнесём строки матрицы A, соответствующие уравнениям второго вида,

к подмножеству g_{n+1} отнесём строку, соответствующую последнему уравнению $F(w) = a$.

Лемма 1. *Система векторов g_i линейно независима для всех значений $i \in [1; n-1]_Z$.*

Доказательство. Вид рассматриваемых вектор-строк множества g_i таков, что для любой пары $z = \{z_j\}_{j=1}^m$ и $y = \{y_j\}_{j=1}^m$ из g_i ($y \neq z$) выполняются следующие условия:

(i) если $z_j = -1$, то $y_j \neq -1$ для всех $j \in [1; m]_Z$,

(ii) $z_j \neq 0$ тогда и только тогда, когда $y_j \neq 0$ для всех $j \in [1; m]_Z$.

Рассмотрим матрицу B, вектор-строки которой являются элементами множества g_i. Согласно [5] система $\{g_i\}$ линейно независима тогда и только тогда, когда ранг матрицы B равен количеству строк: $\operatorname{rank} B = |g_i|$.

Найдём ранг матрицы B. Так как для всех вектор-строк g_i выполняется условие (2), рассмотрим матрицу B', полученную из матрицы B исключением столбцов, содержащих только нулевые элементы. При этом ранг матрицы B' равен рангу матрицы B.

Отметим, что число строк матрицы B' на единицу меньше числа столбцов этой матрицы. Следовательно, $\operatorname{rank} B = \operatorname{rank} B' \leqslant |g_i|$. Для нахождения ранга матрицы B' элементарными преобразованиями из B' получим матрицу приведённого вида [5].

Рассмотрим две вектор-строки B'_1 и B'_k матрицы B'. Они имеют следующий вид:

$$
\begin{aligned}
B'_1 &= (\alpha, \alpha, \dots, \alpha, -1, \alpha, \dots, \alpha, \alpha, \alpha, \dots, \alpha),\\
B'_k &= (\beta, \beta, \dots, \beta, \beta, \beta, \dots, \beta, -1, \beta, \dots, \beta).
\end{aligned}
$$

Будем считать, что элемент, равный -1, в строке B'_1 стоит на j-м месте.

Выполним элементарное преобразование: $\frac{1}{|-1+\alpha\beta|}(B'_k + \beta \cdot B'_1)$. В результате получим вектор-строку B''_k вида

$$B''_k = (\gamma, \dots, \gamma, 0, \gamma, \dots, \gamma, -1, \gamma, \dots, \gamma), \tag{6}$$

где $\gamma = \frac{\beta+\alpha\beta}{|-1+\alpha\beta|}$. Отметим, что $\gamma > 0$.

Также заметим, что на j-м месте в новой строке B''_k получили 0. Кроме того, элемент, равный -1, в новой строке стоит на том же месте, что и в строке B'_k.

Выполним указанные элементарные преобразования для всех $k \neq 1$. В результате получим матрицу B'' такую, что в j-м столбце на первом месте будет стоять -1, а все остальные элементы этого столбца будут равны нулю.

Аналогично поступим для каждого элемента, равного -1, в строках, начиная со второй и заканчивая $(|g_i| - 1)$-й строкой.

Заметим, что после преобразований вектор-строки вида (6) в получившейся вектор-строке остаётся элемент, равный -1. Значит, ни на одном из этапов выполнения элементарных преобразований в матрице B' не может быть получена нулевая строка. При этом любые две строки, полученные после каждой серии преобразований матрицы, будут иметь следующий вид (с точностью до перестановки элементов без нарушения условия (i)):

$$(-1, \beta, \beta, \dots, 0, \dots) \quad \text{и} \quad (\alpha, -1, \alpha, \dots, 0, \dots).$$

Таким образом, первые $|g_i| - 1$ вектор-строк станут приведёнными, а последняя строка не будет нулевой. Следовательно, ранг матрицы B', а значит, и ранг B равен количеству строк в системе g_i. Это означает, что система векторов g_i линейно независима для всех $i \in [1; n-1]_Z$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Система векторов* $\bigcup\limits_{i=1}^{n-1} g_i$ *линейно независима.*

Доказательство. Из того, что по лемме 1 каждая система g_i линейно независима и любые две вектор-строки, не принадлежащие одной системе g_i, линейно независимы (так как ненулевые элементы одной из этих строк соответствуют нулевым элементам другой и наоборот), следует, что система векторов $\bigcup\limits_{i=1}^{n-1} g_i$ линейно независима. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Система векторов* g_n *линейно независима.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу B, строками которой являются вектор-строки системы g_n. Заметим, что для любого столбца матрицы B существует не более двух ненулевых элементов, при этом если их ровно два, то один из них обязательно равен -1.

Аналогично тому, как это было сделано в лемме 1, из матрицы B получим матрицу B' приведённого вида. Переставим строки матрицы B так, что в верхней части матрицы окажутся все привёденные вектор-строки. Рассмотрим верхнюю из неприведённых строк. Будем считать, что это строка с номером j. Под элементом этой строки, равным -1 (будем считать, что он стоит на i-м месте), найдётся единственный элемент, не равный нулю (он также не равен и -1). Положим, что он находится в строке B_k. Но в строке B_k есть -1, над которой в строке B_j стоит 0. Это следует из правил построения уравнений вида (4). Общий вид описанных строк следующий:

$$B_j = (\dots, -1, \dots, 0, \dots), \quad B_k = (\dots, a, \dots, -1, \dots).$$

Для рассматриваемой пары строк выполним элементарное преобразование $B_k + aB_j$. Заметим, что на i-м месте нового вектора B'_k стоит нуль, а элемент, равный -1, не изменился.

Выполняя аналогичо преобразования последовательно для каждой из неприведённых вектор-строк, получим матрицу B', в которой нет нулевых строк (поскольку при каждом преобразовании все элементы, равные -1, сохраняются).

Это означает, что ранг матрицы B' равен количеству строк, а так как $\operatorname{rank} B = \operatorname{rank} B'$, система векторов g_n линейно независима. Лемма 3 доказана.

Теорема 1. *Решение системы уравнений* (5) *существует и единственно для любого действительного значения a.*

Доказательство. Для доказательства теоремы преобразуем матрицу A, соответствующую системе (5), к приведённому виду.

Рассмотрим систему вектор-строк $g = \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} g_i$. По леммам 1 и 2 рассматриваемая система вектор-строк может быть приведена. В результате из A приведением строк множества g получим матрицу A'. Обозначим приведённую систему вектор-строк через g'. В каждой строке множества g' по лемме 1 существуют элемент, равный -1, и ещё ровно один элемент, не равный 0, причём для каждого множества приведённых вектор-строк g'_i элементы, не равные 0, стоят в одном и том же столбце. Обозначим номер этого столбца через l_i.

Рассмотрим пару строк $A'_j \in g'_i$ и $A'_k \in g_n$ такую, что найдётся номер p, для которого $A'_{jp} = -1$ и $A'_{kp} \neq 0$. Произведём следующее элементарное преобразование для строки A'_k: $\frac{1}{|B_{jl_i}|}(A'_k + A'_{kp} \cdot A'_j)$. Указанное элементарное преобразование таково, что в новой вектор-строке A'_k элемент с номером l_i равен -1 и есть ещё один элемент, не равный нулю, на том же самом месте, что и в старой строке A'_k до преобразования.

Выполним описанные преобразования для всех вектор-строк A'_j каждого из множеств g'_i, $i \in [1, |g_i| - 1]_Z$. В итоге все вектор-строки множества $g' \cup g'_n$ будут обладать следующими свойствами (согласно правилам выполненния указанных преобразований и лемме 3):

в каждой вектор-строке A'_j найдётся элемент, равный -1,

для каждой пары строк A'_j и A'_k выполняется условие: $\forall i \in [1; m]_Z$ $(A'_{ji} = -1) \Rightarrow (A'_{ki} \neq -1)$,

общее количество минус единиц в преобразованной матрице равно $m - 1$.

В силу полученных свойств при помощи минус единицы в вектор-строке элементарными преобразованиями могут быть исключены все остальные ненулевые элементы в том же столбце полученной матрицы. Проводя такие исключения для каждой вектор-строки множества $g' \cup g'_n$, получим приведённую матрицу A'' с единственным столбцом, содержащим ненулевые элементы, не равные -1. Для определённости обозначим номер этого столбца через p.

Далее возможны два случая.

Случай 1. Элемент, не равный нулю, в последней строке (это единственный ненулевой элемент вектор-строки) находится также и в столбце с номером p. В данном случае при помощи этого элемента элементарными преобразованиями исключим все ненулевые элементы, стоящие выше него в том же столбце.

Случай 2. Элемент, не равный нулю, в последней строке находится в столбце с номером $q \neq p$. В данном случае найдётся такой номер j, что $A''_{jq} = -1$. Выполним элементарное преобразование для строки A''_j: $\frac{1}{A''_{jp}}(A''_j + A_m)$. В полученной строке A''_j остался единственный ненулевой элемент $A''_{jp} = 1$. При помощи последнего элементарными преобразованиями исключим остальные элементы столбца p.

В результате получили (с точностью до перестановки строк) диагональную матрицу размера $m \times m$. Согласно [5] решение системы линейных уравнений с такой матрицей существует и единственно. Теорема 1 доказана.

Для одной и той же сети G с жёстким распределением потока рассмотрим две системы вида (5), которые отличаются лишь последними уравнениями $F(u) = a_1$ и $F(u) = a_2$. Пусть F_1 и F_2 — решения первой и второй системы вида (5) соответственно.

Теорема 2. *Если $a_1 \geqslant a_2$, то $F_1(u_i) \geqslant F_2(u_i)$ для любой дуги u_i сети G.*

Доказательство. Представим решение системы (5) следующим образом: $F = (F(u_1), \ldots, F(u_m))$, где $m = |U|$.

В доказательстве теоремы 1 побочным результатом получен следующий общий вид решения системы (5):

$$F = a \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix},$$

где $\xi_i = 1$, если $u_i = u$.

Таким образом, поскольку $F_1(u_i) = a_1\xi_i$, $F_2(u_i) = a_2\xi_i$ для всех значений $i \in [1; m]_Z$ и $a_1 \geqslant a_2$, имеем $F_1(u_i) \geqslant F_2(u_i)$, $i \in [1; m]_Z$. Теорема 2 доказана.

Задача нахождения максимального потока в сети G с жёстким распределением потока может быть решена при помощи следующего алгоритма.

Алгоритм 1

Шаг 0. Положим $V = \varnothing$, $\overline{V} = U \setminus V$.

Шаг 1. Выберем дугу $u \in \overline{V}$ такую, что

$$\frac{c(u)}{p(u)} = \min_{w \in \overline{V}} \frac{c(w)}{p(w)}.$$

Решим систему уравнений (5), в качестве последнего уравнения используя уравнение $F(u) = c(u)$.

Шаг 2. Выполним проверку подстановкой решения рассмотренной на шаге 1 системы уравнений для каждой дуги $w \in V$, и если третье соотношение условий (1) верно, то $V := V \cup \{w\}$.

Шаг 3. Если $V = U$, то полученное на шаге 1 решение системы вида (5) является искомым потоком. Иначе положим $\overline{V} = U \setminus V$ и вернёмся на шаг 1.

Таким образом, согласно теореме 2 на каждой итерации будет получаться решение системы вида (5), все элементы которого не превосходят соответствующих элементов решения, полученного на предыдущем этапе.

Если $V = U$ на шаге 3, то по теореме 2 итоговое решение F системы вида (5) является решением задачи о максимальном жёстко распределённом потоке в рассматриваемой сети G, поскольку все элементы F удовлетворяют неравенству $c(u) \geqslant F(u)$, при этом для последней из взятых дуг u имеет место равенство $F(u) = c(u)$.

Вычислительная трудоёмкость алгоритма 1 определяется трудоёмкостью решения системы линейных алгебраических уравнений, которая в силу общего вида системы (5) и доказательства теоремы 1 ограничена величиной $O(nd^3)$, где $n = |X|$, $d = \max\limits_{x \in X}\{\deg x\}$. В худшем случае, когда рассматриваемый граф G плотный, трудоёмкость решения системы вида (5) ограничена величиной $O(n^4)$. Тем самым вычислительная трудоёмкость алгоритма 1 в худшем случае ограничена величиной $O(n^5)$.

Пример 2. Рассмотрим задачу о максимальном потоке в сети с условием жёсткого распределения G, показанной на рис. 2. Доля потока $p(u)$ и пропускная способность $c(u)$ каждой из дуг сети G представлены в табл. 2.

Т а б л и ц а 2

Доли потока, проходящего по дугам,
и пропускные способности дуг сети G

u	$p(u)$	$c(u)$
u_1	1	30
u_2	0,3	11
u_3	0,7	20
u_4	0,6	7
u_5	0,4	3
u_6	1	22
u_7	0,8	10
u_8	0,2	8

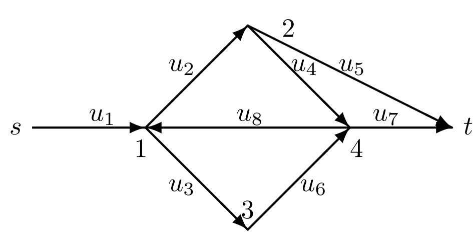

Рис. 2. Сеть G с жёстким распределением потока

По данным табл. 2 составим систему уравнений (7), аналогичную системе (5). Следуя алгоритму 1, последним уравнением системы (7) положим $F(u_5) = 3$:

$$\begin{cases} 0{,}4(F(u_4) + F(u_5)) - F(u_5) = 0, \\ 0{,}8(F(u_7) + F(u_8)) - F(u_7) = 0, \\ 0{,}3(F(u_2) + F(u_3)) - F(u_2) = 0, \\ 0{,}4F(u_2) - F(u_5) = 0, \\ 0{,}8(F(u_4) + F(u_6)) - F(u_7) = 0, \\ 0{,}3(F(u_8) + F(u_1)) - F(u_2) = 0, \\ F(u_6) - F(u_3) = 0, \\ F(u_5) = 3. \end{cases} \tag{7}$$

Результат решения системы уравнений (7) обозначим через F_1:

$$F_1(u_1) = 20{,}6, \quad F_1(u_2) = 7{,}5, \quad F_1(u_3) = 17{,}5, \quad F_1(u_4) = 4{,}5,$$

$$F_1(u_5) = 3, \quad F_1(u_6) = 17{,}5, \quad F_1(u_7) = 17{,}6, \quad F_1(u_8) = 4{,}4.$$

Решение F_1 не является решением задачи о максимальном потоке в сети G с условием жёсткого распределения, поскольку $F_1(u_7) > c(u_7)$. Это означает, что $V \neq U$. Следовательно, полагаем $\overline{V} = U \setminus V = \{u_7\}$ и возвращаемся на шаг 1 к составлению и решению системы линейных уравнений вида (5).

Преобразуем систему (7), заменив её последнее уравнение уравнением $F(u_7) = 10$. Решение данной системы обозначим через F_2 (значения приведены с округлением до второго знака после запятой):

$$F_2(u_1) = 11{,}7, \quad F_2(u_2) = 4{,}26, \quad F_2(u_3) = 9{,}94, \quad F_2(u_4) = 2{,}56,$$

$$F_2(u_5) = 1{,}7, \quad F_2(u_6) = 9{,}94, \quad F_2(u_7) = 10, \quad F_2(u_8) = 2{,}5.$$

Решение F_2 является решением задачи о максимальном потоке в сети G с условием жёсткого распределения, поскольку $V = U$.

Представим последовательность решений F_i в виде табл. 3. По табл. 3 легко прослеживается, что решение каждой следующей системы (7) ближе к решению задачи о максимальном потоке в сети G с условием жёсткого распределения, поскольку в каждом следующем столбце количество элементов, при которых нарушается третье соотношение условий (1), меньше, чем в предыдущем. Последний столбец табл. 3 является решением задачи о максимальном потоке в рассматриваемой сети G, так как все элементы этого столбца удовлетворяют неравенству $c(u) \geqslant F(u)$ и для дуги u_7 имеет место равенство $F(u_7) = c(u_7)$.

Таблица 3

Нахождение максимального потока в сети G с условием жёсткого распределения потока

u	$c(u)$	$F_1(u)$	$F_2(u)$
u_1	30	$20,6$	$11,7$
u_2	11	$7,5$	$4,26$
u_3	20	$17,5$	$9,94$
u_4	7	$4,5$	$2,56$
u_5	3	3	$1,7$
u_6	22	$17,5$	$9,94$
u_7	10	$17,6$	10
u_8	8	$4,4$	$2,5$

Замечание 3. Исходя из вида общего решения системы (5), указанного в доказательстве теоремы 2, вычислительная трудоёмкость алгоритма 1 может быть уменьшена. Действительно, решив одну систему вида (5), кроме самого решения получим пропорциональность его элементов. Таким образом, можно сократить число решений систем вида (5) до одного, пользуясь пропорциональностью элементов решения и тем, что в итоге один из элементов решения должен совпадать с пропускной способностью соответствующей дуги. Поскольку приведённое решение системы вида (5) может быть сведено к искомому решению не более чем за $O(nm)$ (в случае плотного графа за $O(n^3)$) операций, вычислительная трудоёмкость может быть уменьшена до $O(n^4)$.

Лемма 4. *Изменяя доли потока, проходящего по дугам сети G с условием жёсткого распределения потока, можно получить максимальный поток минимальной величины $\rho = \rho_0$, которая равна наименьшей из пропускных способностей дуг сети G.*

Доказательство. Найдём в сети G путь из источника в сток, содержащий дугу u_0: $c(u_0) = \rho_0$. Пусть этот путь состоит из множества дуг $U_0 = \{u_0, u_1, u_2, \ldots, u_m\}$. Всем дугам этого пути назначим $p(u_i) = 1,\ i \in [1, m]$. Всем остальным дугам сети G назначим $p(u_j) = 0,\ u_j \in U \setminus U_0$.

Таким образом, получим единственный путь из источника в сток, пропускная способность которого ограничивается пропускной способностью дуги u_0. Тем самым максимальный поток в сети G с условием жёсткого распределения потока равен ρ_0. Лемма 4 доказана.

Пусть сеть G' отличается от сети G лишь тем, что у дуг G' нет характеристики $p(u)$, т. е. G' — обычная сеть, рассматриваемая в большинстве классических потоковых задач (см., например, [8, 9]). Обозначим величину максимального потока в сети G' через ρ'.

Теорема 3. *Для любого вещественного числа ρ такого, что $\rho_0 \leqslant \rho \leqslant \rho'$, расстановкой долей потока, проходящего по дугам сети G', можно получить, что величина максимального потока в сети G с условием жёсткого распределения потока станет равной числу ρ.*

Доказательство. Найдём в сети G' некоторый поток (обозначим его через F^*), величина которого равна V. При этом поток F^* должен быть таким, что как минимум для одной дуги u выполняется равенство $F^*(u) = c(u)$. Поток с предложенными свойствами всегда может быть построен, поскольку $\rho \geqslant \rho_0$ и в качестве u можно взять дугу w такую, что $c(w) = \rho_0$.

Положим доли потока, проходящего по дугам сети G, пропорциональными величине потока F^* по соответствующим дугам сети G', т. е. для каждой вершины $x \in X \setminus \{t\}$ должно выполняться соотношение (2), и поскольку величина $F^*(u)$ известна для каждой дуги $u \in U$, значит, достаточно просто можно определить доли потока, проходящего по дугам сети G.

По теореме 1 максимальным потоком в полученной сети G с условием жёсткого распределения потока является поток F^*, величина которого равна ρ. Теорема 3 доказана.

2. Максимальный поток на графе с условием нежёсткого распределения потока

Заметим, что при условии жёсткого распределения потока в сети многие дуги остаются не полностью насыщенными.

Пусть в сети $G = (X, U, f)$ задан некоторый поток F.

Определение 6. Поток F будем называть *нежёстко распределённым*, если выполняются соотношения (1), и для каждой вершины $x \in X \setminus \{t\}$ выполняются равенства

$$F(u_i) \cdot p(u_j) = F(u_j) \cdot p(u_i), \quad u_i, u_j \in [x]^+ \setminus [x]^*, \tag{8}$$

где $[x]^* = \{u \in [x]^+ \mid F(u) = c(u)\}$.

Определение 7. Сети, для которых рассматриваются только потоки, удовлетворяющие условиям (1) и (8), будем называть *сетями с нежёстким распределением потока*.

Приведём жадный алгоритм нахождения максимального потока в сети с нежёстким распределением.

Алгоритм 2

Рассмотрим сеть $G(X, U, f, c, p)$ с нежёстким распределением.

Шаг 0. Положим $i = 0$, $F(u) = 0$, $u \in U$.

Шаг 1. Построим сеть $G_i(X_i, U_i, f|_{U_i}, c_i, p_i)$, вершинами которой являются вершины сети G, а дугами являются только не насыщенные дуги u сети G.

Шаг 2. Для дуг сети G_i определим собственные пропускные способности и доли потока потока, проходящего по дугам следующим образом:

$$\forall u \in U_i \quad c_i(u) = c(u) - F(u),$$

$$\forall x \in X \setminus \{t\} \; \forall u \in [x]^+ \cap U_i \quad p_i(u) = \frac{p(u)}{\sum\limits_{w \in [x]^+ \cap U_i} p(w)}.$$

Шаг 3. Найдём максимальный поток в сети G_i при условии жёсткого распределения потока. Обозначим его через F_i, а его величину — через ρ_i.

Шаг 4. Увеличим поток по дугам сети G на величины $F_i(u)$, т. е. для каждой дуги $u \in U_i$ выполним $F(u) := F(u) + F_i(u)$.

Шаг 5. Если $\rho_i > 0$, то увеличим значение переменной i на единицу ($i := i+1$) и перейдём к шагу 1. В противном случае найденный поток F в сети G считается максимальным.

Приведённый алгоритм в большинстве случаев находит максимальный поток в сети с нежёстким распределением, однако существуют такие сети, для которых поток, построенный в результате применения алгоритма 2, не является максимальным.

Вычислительная трудоёмкость алгоритма 2 определяется трудоёмкостью решения системы линейных алгебраических уравнений и в данном случае ограничена величиной $O(m^4)$, где $m = |U|$.

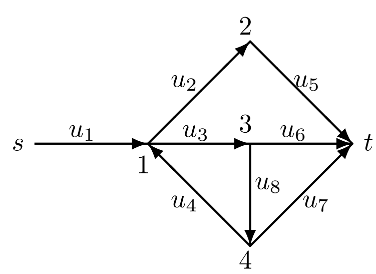

Рис. 3. Сеть G с нежёстким распределением потока

Пример 3. Рассмотрим сеть G с нежёстким распределением потока, изображённую на рис. 3. Найдём максимальный поток в сети G. Доля потока $p(u)$ и пропускная способность $c(u)$ каждой из дуг сети G представлены в табл. 4.

Таблица 4

Доли потока, проходящего по дугам
и пропускные способности дуг сети G

u	$p(u)$	$c(u)$
u_1	1	20
u_2	0,2	5
u_3	0,8	8
u_4	0,5	4
u_5	1	5
u_6	0,5	4
u_7	0,5	5
u_8	0,5	4

Изначально полагаем $i = 0$, $F(u) = F_0(u) = 0$, $u \in U$, и берём сеть G_0 — дубликат сети G.

Решая задачу о максимальном потоке в сети G_0 при условии жёсткого распределения, находим поток F_0:

$$F_0(u_1) = 8, \quad F_0(u_2) = 2, \quad F_0(u_3) = 8, \quad F_0(u_4) = 2,$$

$$F_0(u_5) = 2, \quad F_0(u_6) = 4, \quad F_0(u_7) = 2, \quad F_0(u_8) = 4.$$

Увеличиваем поток по дугам сети G на величины $F_0(u)$. Поскольку величина полученного потока $\rho_0 = 8$ больше нуля, переходим на шаг 1 к построению вспомогательной сети G_1.

Дугами сети G_1 являются дуги $\{u_1, u_2, u_4, u_5, u_7\}$ исходной сети G. Для них найдём пропускные способности и доли потока, проходящего по ним:

$$c_1(u_1) = 20 - 8 = 12, \quad p_1(u_1) = 1,$$

$$c_1(u_2) = 5 - 2 = 3, \quad p_1(u_2) = \frac{0{,}2}{0{,}2} = 1,$$

$$c_1(u_4) = 4 - 2 = 2, \quad p_1(u_4) = \frac{0{,}5}{0{,}5 + 0{,}5} = 0{,}5,$$

$$c_1(u_5) = 5 - 2 = 3, \quad p_1(u_5) = 1,$$

$$c_1(u_7) = 5 - 2 = 3, \quad p_1(u_7) = \frac{0{,}5}{0{,}5 + 0{,}5} = 0{,}5.$$

Решая задачу о максимальном потоке в сети G_1 при условии жёсткого распределения, находим поток F_1:

$$F_1(u_1) = 3, \quad F_1(u_2) = 3, \quad F_1(u_4) = 0, \quad F_1(u_5) = 3, \quad F_1(u_7) = 0.$$

Увеличиваем поток по дугам сети G на величины $F_1(u)$. Поскольку величина полученного потока $\rho_1 = 3$ больше нуля, переходим на шаг 1 к построению вспомогательной сети G_2.

Дугами новой сети G_2 являются дуги $\{u_1, u_4, u_7\}$. Так как сток t принадлежит множеству Y_s (т. е. нет ни одного пути из s в t), в сети G_2 может быть только нулевой жёстко распределённый поток. В итоге искомый поток в сети G выглядит следующим образом:

$$F(u_1) = 11, \quad F(u_2) = 5, \quad F(u_3) = 8, \quad F(u_4) = 2,$$

$$F(u_5) = 5, \quad F(u_6) = 4, \quad F(u_7) = 2, \quad F(u_8) = 4.$$

Величина искомого максимального потока равна $\rho^* = \rho_0 + \rho_1 = 11$.

Заметим, что величина максимального потока в рассматриваемой сети G без ограничения на распределение потока равна $\rho' = 13$. Таким образом, в общем случае максимальный поток в сети с нежёстким распределением не является максимальным потоком в той же самой сети, но без ограничения на распределение.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ерзин А. И., Тахонов И. И.** Задача поиска сбалансированного потока // Сиб. журн. индустр. математики. 2006. Т. 9, № 4. С. 50–63.
2. **Ерусалимский Я. М., Водолазов Н. Н.** Нестационарный поток в сети // Вестн. ДГТУ. 2009. Т. 9, № 3. С. 402–409.
3. **Ерусалимский Я. М., Скороходов В. А., Кузьминова М. В., Петросян А. Г.** Графы с нестандартной достижимостью: задачи, приложения. Ростов-на-Дону: Южный федеральный ун-т, 2009. 195 с.
4. **Кузнецов О. П., Жилякова Л. Ю.** Двусторонние ресурсные сети: новая потоковая модель // Докл. АН. 2010. Т. 433, № 5. С. 609–612.
5. **Курош А. Г.** Курс высшей алгебры. М: Наука, 1975. 431 с.
6. **Скороходов В. А.** Потоки в сетях с меняющейся длительностью прохождения // Изв. вузов. Северо-Кавказ. регион. Естеств. науки. 2011. № 1. С. 21–26.
7. **Скороходов В. А.** Потоки в обобщенных сетях со связанными дугами // Моделирование и анализ информ. систем. 2012. Т. 19, № 2. С. 41–52.
8. **Форд Л. Р., Фалкерсон Д. Р.** Потоки в сетях. М: Мир, 1966. 276 с.

9. **Ahuja R. K., Magnanti T. L., Orlin J. B.** Network flows: theory, algorithms, and applications. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall Inc., 1993. 864 p.
10. **Fonoberova M.** On determining the minimum cost flows in dynamic networks // Bul. Acad. Stiinte Repub. Moldova., Mat. 2006. No. 1. P. 51–56.
11. **Goldberg A. V., Rao S.** Beyond the flow decomposition barrier // J. ACM. 1998. Vol. 45, No. 5. P. 783–797.

Скороходов Владимир Александрович
Чеботарёва Анастасия Сергеевна

Статья поступила
16 июня 2014 г.

Исправленный вариант —
25 марта 2015 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
May–June 2015. Volume 22, No. 3. P. 55–74

UDC 519.1 DOI: 10.17377/daio.2015.22.455

THE MAXIMAL FLOW PROBLEM ON NETWORKS WITH SPECIAL CONDITIONS OF FLOW DISTRIBUTION

V. A. Skorokhodov[1], *A. S. Chebotareva*[1]
[1]Southern Federal University,
8a Milchakova St., 344090 Rostov-on-Don, Russia
e-mail: pdvaskor@yandex.ru, chebot1988@yandex.ru

Abstract. We consider the problem of finding the maximal flow in nets with conditions of strict and nonstrict flow distribution. We show that for each condition of flow distribution the solution of the considered problem exists and is unique. The algorithms for finding the maximal flow are developed for each condition of flow distribution. We find bounds on the maximal flow value in the case of strict flow distribution. Ill. 3, tab. 4, bibliogr. 27.

Keywords: network, graph, graph algorithm, maximal flow on network, flow distribution.

REFERENCES

1. **A. I. Erzin** and **I. I. Takhonov,** The problem of the search for a balanced flow, *Sib. Zh. Ind. Mat.,* **9**, No. 4, 50–63, 2006.
2. **Ya. M. Erusalimsky** and **N. N. Vodolazov,** Unsteady flow in a network, *Vestn. Don. Gos. Tekh. Univ.,* **9**, No. 3, 402–409, 2009.

3. **Ya. M. Erusalimsky, V. A. Skorokhodov, M. V. Kuzminova,** and **A. G. Petrosyan,** *Grafy s nestandartnoi dostizhimost'yu: zadachi, prilozheniya* (Graphs with Nonstandard Connectivity: Problems and Applications), Yuzh. Fed. Univ., Rostov-on-Don, 2009.
4. **O. P. Kuznetsov** and **L. Yu. Zhilyakova,** Bidirectional resource networks: A new flow model, *Dokl. Akad. Nauk,* **433**, No. 5, 609–612, 2010. Translated in *Dokl. Math.,* **82**, No. 1, 643–646, 2010.
5. **A. G. Kurosh,** *Kurs vysshei algebry*, Nauka, Moscow, 1975. Translated under the title *Higher Algebra,* Mir, Moscow, 1975.
6. **V. A. Skorokhodov,** Flows on graphs with varying transit times through the arcs, *Izv. VUZ. Sev.-Kavk. Reg., Ser. Estestv. Nauki,* No. 1, 21–26, 2011.
7. **V. A. Skorokhodov,** Flows in generalized nets with related arcs, *Model. Anal. Inf. Sist.,* **19**, No. 2, 41–52, 2012.
8. **L. R. Ford** and **D. R. Fulkerson,** *Flows in Networks,* Princeton Univ. Press, Princeton, 1962.
9. **R. K. Ahuja, T. L. Magnanti,** and **J. B. Orlin,** *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications,* Prentice Hall, Upper Saddle River, USA, 1993.
10. **M. Fonoberova,** On determining the minimum cost flows in dynamic networks, *Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold., Mat.,* No. 1., 51–56, 2006.
11. **A. V. Goldberg** and **S. Rao,** Beyond the flow decomposition barrier, *J. ACM,* **45**, No. 5, 783–797, 1998.

Vladimir A. Skorokhodov
Anastasia S. Chebotareva

Received
16 June 2014
Revised
25 March 2015